Appunti di Fisica Matematica - I Modulo

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Vincenzo Coscia
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Ferrara

29 marzo 2016

Premessa

Indice

Capitolo 1

Richiami sulle equazioni differenziali ordinarie

1.1 Introduzione

Sia $D \subset \mathbf{R}^{n+2}$ aperto e connesso e sia $h : D \to \mathbf{R}$. La piú generale equazione differenziale ordinaria di ordine n si scrive:

$$h(t, u, u', u^{(2)}, ..., u^{(n)}) = 0. \tag{1.1}$$

Risolvere l'equazione (1.1) significa determinare l'insieme delle funzioni $u(t)$ le quali, sostituite a primo ed a secondo membro della (1.1), la rendono soddisfatta identicamente. Laddove sia possibile nella (1.1) esplicitare la derivata di ordine massimo e scrivere:

$$u^{(n)} = f(t, u, u', ..., u^{(n-1)}), \tag{1.2}$$

l'equazione differenziale si dice *di forma normale*. Nel seguito, a meno di indicazioni differenti, tratteremo di norma equazioni differenziali di forma normale. Data una equazione differenziale di ordine n, é sempre possibile scrivere un sistema di equazioni differenziali del primo ordine equivalente all'equazione assegnata. É sufficiente, allo scopo, porre:

$$y_1 = u,\ y_2 = u',\ y_3 = u^{(2)}, ..., y_n = u^{(n-1)}$$

per dare alla (1.2) la forma:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ ..... \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(t, y_1, y_2, ...y_n). \end{cases} \tag{1.3}$$

Quest'ultimo é un esempio particolare della classe dei sistemi di equazioni differenziali del primo ordine di forma normale:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2, ...y_n) \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2, ...y_n) \\ \ldots \\ y_n' = f_n(t, y_1, y_2, ...y_n). \end{cases} \tag{1.4}$$

Allo stesso modo, dato un sistema del tipo (4), derivando ciascuna equazione $n-1$ volte rispetto a t ed eliminando fra le n^2 equazioni cosi' ottenute le n^2-1 incognite:

$$y_2,\ y_2',\ ...y_2^{(n)},\ .....\ y_n,\ y_n',\ ...y_n^{(n)},$$

si otterrá un'unica equazione di ordine n di forma normale per l'incognita y_1. Osservata questa equivalenza fra equazioni di ordine n e sistemi di n equazioni del primo ordine, nel seguito studieremo nel dettaglio le proprietá di questi ultimi. A tale proposito, il sistema (4) si puó scrivere in forma *vettoriale* nel seguente modo:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \tag{1.5}$$

dove $\mathbf{f} : D \subset \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n$ é la funzione vettoriale $\mathbf{f} = (f_1, ..., f_n)$ e dove $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), ..., y_n(t))$.
Cominceremo trattando il caso, piú semplice, di un'equazione (scalare) del primo ordine in forma normale:

$$y' = f(t, y). \tag{1.6}$$

Esempio 1.1. *Consideriamo l'equazione:*

$$y' = y \tag{1.7}$$

che si ottiene dalla (1.6) nel caso particolare in cui $f : (t, y) \in \mathbf{R}^2 \to y$. *Per ogni scelta della costante* c, *la funzione:*

$$y(t) = c\exp(t) \tag{1.8}$$

risolve la (1.7). L'insieme ottenuto facendo variare $c \in \mathbf{R}$ *nella (1.8) si dice* integrale generale *della (1.7). Si osservi che ogni funzione dell'integrale generale (1.8) é definita in tutto* $\mathbf{R}$.

Riprendendo l'Esempio 1.1, possiamo pensare di selezionare uno dei possibili valori di c richiedendo che la funzione y, oltre a risolvere l'equazione *indefinita* (1.7), assuma, ad un certo istante t_0, il valore prefissato y_0. Si formula in questo modo il *problema ai valori iniziali o di Cauchy* relativo alla (1.7). In tal modo, imponendo alla (1.8) di assumere il valore y_0 per $t = t_0$, si trova $c = y_0 \exp(-t_0)$.

Esercizio 1.1. *Provare che la funzione:*

$$y(t) = y_0 \exp(t - t_0)$$

é l'unica soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y \\ \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Il problema ai valori iniziali si pone spontaneamente in molte questioni di interesse applicativo. Si consideri, ad esempio, in un riferimento inerziale $Oxyz$ un punto materiale libero P di massa m, soggetto alla forza $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z)$, essendo $\mathbf{r}$=(x,y,z) la posizione e $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) = (x', y', z')$ la velocitá di P al tempo t, rispettivamente. Come é noto dalla meccanica, il moto di P é determinato dall'equazione:

$$\mathbf{r}'' = \frac{\mathbf{F}}{m}(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z).$$

Questa é una equazione differenziale vettoriale del secondo ordine, che corrisponde al seguente sistema di tre equazioni scalari del secondo ordine:

$$\begin{cases} x'' = F_x(t, x, y, z, x', y', z') \\ y'' = F_y(t, x, y, z, x', y', z') \\ z'' = F_z(t, x, y, z, x', y', z'), \end{cases}$$

il quale, a sua volta, equivale al seguente sistema di sei equazioni scalari del primo ordine:

$$\begin{cases} x' = v_x \\ y' = v_y \\ z' = v_z \\ v_x' = F_x(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z) \\ v_y' = F_x(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z) \\ v_z' = F_x(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z). \end{cases}$$

Il moto di P risulta univocamente determinato quando se ne assegni, all'istante iniziale t_0, la posizione $\mathbf{r}(t_0)$ e la velocitá $\mathbf{v}(t_0)$. Ció corrisponde a formulare il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x' = v_x \\ y' = v_y \\ z' = v_z \\ v_x' = F_x(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z) \\ v_y' = F_x(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z) \\ v_z' = F_x(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z) \\ x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0, \\ v_x(t_0) = v_x^0, \quad v_y(t_0) = v_y^0, \quad v_z(t_0) = v_z^0 \quad . \end{cases}$$

Un esempio non fisico é il seguente. Consideriamo due popolazioni biologiche rappresentate dalle quantitá non negative $x(t)$ ed $y(t)$ che siano l'una predatore dell'altra (per esempio, $x(t)$ rappresenta una popolazione di erbivori ed $y(t)$ una popolazione di erba nutriente) e che evolvano l'una in presenza dell'altra, senza ulteriori interazioni con altre specie. Sia $\varepsilon > 0$ il tasso di crescita specifico (pro capite) della popolazione di prede (tasso di nascita meno tasso di morte), ed assumiamo che la presenza dei predatori diminuisca il tasso di crescita delle prede in misura proporzionale, con coefficiente $\alpha > 0$, al suo valore. Allora, la dinamica della popolazione di prede é:

$$\frac{y'}{y} = \varepsilon - \alpha x.$$

Sia ora $\gamma > 0$ il valore (costante) del tasso di mortalitá dei predatori in assenza delle prede, ed assumiamo che la presenza delle prede aumenti il tasso di crescita della popolazione di predatori in misura proporzionale, con coefficiente $\beta > 0$, al valore della propria popolazione. L'equazione di evoluzione per i predatori sará allora:

$$\frac{x'}{x} = -\gamma + \beta y.$$

In definitiva, la dinamica delle due popolazioni interagenti di predatori e prede risulterá governata dal seguente sistema del primo ordine di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' = -\gamma x + \beta xy \\ y' = \varepsilon y - \alpha xy. \end{cases} \tag{1.9}$$

Questo é il modello predatore-preda di Lotka-Volterra. Esso fu suggerito dal matematico italiano V. Volterra nel 1931 per spiegare il cambiamento nella composizione relativa delle specie pescate in Adriatico dopo la prima guerra mondiale, durante la quale la pesca si era praticamente fermata. Naturalmente, il problema ai valori iniziali per il modello di Lotka-Volterra si formula nel modo seguente: si cerca una soluzione $x(t)$, $y(t)$ del sistema (1.9) che assuma, ad un dato istante t_0, i valori $x(t_0) = x_0$ ed $y(t_0) = y_0$.
Torniamo ora al problema della determinazione di una soluzione dell'equazione scalare:

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y(0). \end{cases} \tag{1.10}$$

Per prima cosa, occorre definire la classe $\mathcal{C}$ di funzioni all'interno della quale cerchiamo soluzioni al problema (1.10). Questa coincide, per quanto ci riguarda, con l'insieme delle funzioni definite in un intervallo $I \subset \mathbf{R}$ ed ivi derivabili. Da questa scelta segue che, se vogliamo avere speranza di trovare soluzioni a (1.10), la funzione $f(t, y)$ nella $(1.10)_1$ deve almeno essere continua. Inoltre, poiché, come abbiamo visto con gli esempi delle pagine precedenti, il sistema (1.10) costituisce il modello matematico di un problema di evoluzione, se vogliamo che tale modello sia sensato dobbiamo operare alcune fondamentali richieste al problema (1.10).
In primo luogo, almeno una soluzione *deve* esistere, altrimenti va da sé che (1.10) non puó descrivere alcunché. Inoltre, é altrettanto importante che, se una soluzione esiste, essa sia *unica*. Se cosi' non fosse, non si potrebbe decidere

qual é effettivamente l'evoluzione della grandezza $y(t)$ di interesse nel modello. Abbiamo giá osservato che, ai fini dell'*esistenza* di soluzioni, la continuitá della $f(t,y)$ é un requisito necessario. Si tratta anche di una condizione sufficiente? Ovvero, la sola continuitá della $f(t,y)$ basta ad assicurare che almeno una soluzione di (1.10) esiste? La risposta, affermativa, a questa domanda é dovuta a G. Peano; tuttavia, la dimostrazione di questo risultato, andando al di lá degli scopi del presente corso, non sará qui fornita. Per quanto riguarda l'*unicitá*, si vede subito, con un esempio, che la sola continuitá della $f(t,y)$ non basta.

Esempio 1.2. *Il problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y}, \quad y \geq 0, \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

ammette come soluzione la funzione $y(t) = 0$ *per* $t \in (-\infty, +\infty)$*, ma anche le funzioni:*

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{(t-c)^2}{4} & se\ t \geq c > 0, \\ \\ 0 & se\ t \leq c, \end{cases}$$

per ogni $c > 0$*. Dunque, pur essendo il secondo membro dell'equazione* $(1.11)_1$ *continuo, il problema (1.11) ammette infinite soluzioni.*

Nel seguito vedremo quali sono le condizioni supplementari da richiedere alla $f(t,y)$ perché il problema (1.10) ammetta un'unica soluzione. Intanto, osserviamo che, in generale, se la funzione $f(t,y)$ é definita e continua in un certo intervallo $I \subset \mathbf{R}$ (possibilmente anche con $I = (-\infty, +\infty)$), non é detto che la soluzione resti definita nello stesso intervallo.

Esempio 1.3. *Il problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1, \end{cases} \tag{1.12}$$

che si ottiene da (1.10) ponendo $f : (t,y) \in \mathbf{R}^2 \to y^2$*, ha per soluzione:*

$$y(t) = \frac{1}{1-t}$$

che é definita nell'intervallo $(-\infty, 1)$*, strettamente contenuto in* $\mathbf{R}$*.*

In generale, dunque, l'intervallo di definizione della soluzione del problema ai valori iniziali (1.10) é esso stesso un'incognita del problema. Se, relativamente al problema (1.10), si chiede di determinare una soluzione in un intorno dell'istante iniziale t_0, si dice che si cerca una soluzione *locale* (o *in piccolo*) di (1.10). Se, invece, si cerca una soluzione definita in un intorno predeterminato di t_0 (per

esempio, in tutto l'intervallo temporale in cui la $f(t,y)$ é definita e continua), allora si dice che si cerca una soluzione *globale* (o *in grande*).
Un altro aspetto molto importante da considerare riguardo le soluzioni di (1.10) é legato alla proprietá di *continuitá nei dati iniziali.* Poiché la y rappresenta una grandezza (fisica o no) misurabile, il suo valore all'istante t_0 é assegnabile a meno di una certa indeterminazione. É dunque fondamentale che a valori "prossimi" dei dati iniziali corrispondano soluzioni "prossime", cioé che le soluzioni di (1.10) dipendano con continuitá dai dati iniziali.

1.2 Esistenza e unicitá locali per il problema di Cauchy

Sia $A \subseteq \mathbf{R}^2$ aperto e sia $f : A \to \mathbf{R}$ continua.

Definizione 1.1. *La funzione f si dice localmente lipschitziana in A (rispetto alla variabile y) se per ogni $(t,y) \in A$ esistono un intorno I di t, un intorno J di y_0 ed una costante positiva L tali che:*

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \tag{1.13}$$

per ogni $t \in I$ e per ogni y_1, $y_2 \in J$.

Teorema 1.1. *Sia $f : A \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ continua (in y e t) e localmente lipschitziana (in y) e sia $(t_0, y_0) \in A$. Si possono, quindi, trovare due quantitá positive a, b tali che nel rettangolo $D = [t_0 - a, t_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subset A$ la funzione f verifichi la condizione (1.13), ovvero esista $L > 0$ tale che:*

$$\begin{aligned} &|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \\ &\forall t \in [t_0 - a, t_0 + a],\ \forall y \in [y_0 - b, y_0 + b]. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Allora, si puó determinare un δ, $0 < \delta \leq a$, tale che il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.15}$$

ammetta una soluzione, ed una soltanto, nell'intervallo $I = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Dimostrazione. Cominciamo con l'osservare che se $y(t)$ é soluzione di (1.15), essa é una funzione di classe $C^1(I)$ e quindi, utilizzando il secondo teorema fondamentale del calcolo:

$$\int_{t_0}^{t} y' ds = y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) ds, \quad t \in I$$

e dunque $y(t)$ verifica l'equazione integrale di Volterra:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds, \quad t \in I \ . \tag{1.16}$$

Viceversa, sia $y(t)$ una soluzione *continua* di (1.16) per $t \in I$. Allora, $f(t, y(t))$ é una funzione continua in I e utilizzando il primo teorema fondamentale del calcolo si ha:

$$y'(t) = f(t, y(t)).$$

É poi evidente che $y(t_0) = y_0$ e dunque $y(t)$ é soluzione del problema di Cauchy (1.15). Pertanto, nel seguito dimostreremo l'esistenza e l'unicitá in $I = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ di una soluzione continua dell'equazione integrale (1.16). A tale scopo faremo uso del metodo delle approssimazioni successive di Peano-Picard.
Sia M tale che:

$$|f(t, y)| \leq M \quad \forall (t, y) \in D$$

e sia $\delta = \min\{a, b/M\}$. Costruiamo la successione di funzioni $\{y^{(m)}(t)\}_{m \in \mathbf{N}}$ definita ricorsivamente come segue:

$$\begin{aligned}
&y^{(0)}(t) = y_0 \\
&y^{(1)}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y^{(0)}(s))ds \\
&..... \\
&y^{(m)}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y^{(m-1)}(s))ds \\
&.....
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Mostriamo innanzitutto che per ogni $m \in \mathbf{N}$:

$$y_0 - b \leq y^{(m)}(t) \leq y_0 + b \qquad \text{se } t \in I = (t_0 - \delta, t_0 + \delta).$$

Infatti:

$$\begin{aligned}
&|y^{(1)}(t) - y_0| \leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, y_0)| ds \right| \leq M|t - t_0| \leq M\delta \leq b, \\
&|y^{(2)}(t) - y_0| \leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, y^{(1)}(s))| ds \right| \leq M|t - t_0| \leq M\delta \leq b, \\
&.....
\end{aligned} \tag{1.18}$$

e cosi' via. Questa osservazione é molto importante, in quanto vuol dire che, se $t \in I$, le funzioni della successione $\{y^{(m)}(t)\}$ hanno il grafico contenuto nel rettangolo D nel quale f é lipschitziana.
Mostriamo ora che la successione $\{y^{(m)}(t)\}_{m \in \mathbf{N}}$ converge uniformemente in I ad una funzione $y(t)$. A tale scopo, consideriamo la serie di funzioni:

$$y^{(0)}(t) + [y^{(1)}(t) - y^{(0)}(t)] + ... + [y^{(m+1)}(t) - y^{(m)}(t)] + ... \tag{1.19}$$

le cui somme parziali coincidono con i termini della successione $\{y^{(m)}(t)\}_{m\in\mathbf{N}}$, e mostriamo che essa converge uniformemente in I. Infatti dalle (1.14), (1.18) si ha:

$$|y^{(1)}(t)-y^{(0)}(t)|\le M|t-t_0|,$$

$$|y^{(2)}(t)-y^{(1)}(t)|\le\left|\int_{t_0}^{t}|f(s,y^{(1)}(s))-f(s,y^{(0)}(s))|ds\right|\le$$

$$\le L\left|\int_{t_0}^{t}|y^{(1)}(s)-y^{(0)}(s)|ds\right|\le ML\left|\int_{t_0}^{t}|s-t_0|ds\right|=$$

$$=\frac{ML}{2}|t-t_0|^2\le\frac{ML}{2}\delta^2\qquad\text{per } t\in I,$$

.....

$$|y^{(m)}(t)-y^{(m-1)}(t)|\le ML^{m-1}\tfrac{|t-t_0|^m}{m!}\le\frac{M}{L}\frac{(L\delta)^m}{m!}\qquad\text{per } t\in I.$$

Allora, il termine generale della serie (1.19) é maggiorato nell'intervallo $I=(t_0-\delta,t_0+\delta)$ dal termine $M(L\delta)^m/Lm!$ ed é ben noto che la serie:

$$\frac{M}{L}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(L\delta)^m}{m!}\tag{1.20}$$

é convergente. Dunque, per il criterio M di Weierstrass (teorema della convergenza totale), la successione $\{y^{(m)}(t)\}$ converge uniformemente in I alla funzione $y(t)$ che, essendo limite uniforme di una successione di funzioni continue in I, é ivi continua e verifica la relazione:

$$|y(t)-y_0|\le b.$$

Resta da provare che $y(t)$ é effettivamente soluzione dell'equazione di Volterra (1.16) e quindi del problema di Cauchy (1.15). A tale scopo, riprendendo la definizione ricorsiva della successione di funzioni $\{y^{(m)}(t)\}_{m\in\mathbf{N}}$:

$$y^{(m)}(t)=y_0+\int_{t_0}^{t}f(s,y^{(m-1)}(s))ds\tag{1.21}$$

e osservando che il primo membro tende uniformemente ad $y(t)$ in I per $m\to\infty$, sará sufficiente provare che si puó portare tale limite sotto il segno di integrale a secondo membro. Per fare ció basta, come é noto, provare che la successione di funzioni $\{f(t,y^{(m-1)}(t))\}_{m\in\mathbf{N}}$ converge uniformemente in I alla funzione $f(t,y(t))$. Infatti:

$$|f(t,y^{(m-1)}(t)-f(t,y(t))|\le L|y^{(m-1)}-y(t)|.$$

Ma l'espressione $|y^{(m-1)} - y(t)|$ non é altro che il resto m-esimo della serie (1.17) che, per quanto si é visto, é limitato dal resto m-esimo della serie numerica esponenziale (1.20), il quale evidentemente tende a zero per $m \to \infty$ uniformemente rispetto a t. L'esistenza é cosi' dimostrata.
Supponiamo ora che, accanto ad $y(t)$, esista un'altra soluzione $y^*(t)$ all'equazione integrale (1.16), cioé $y^*(t)$ é una funzione continua in $I = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ tale che:

$$y^*(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y^*(s))ds. \tag{1.22}$$

Innanzitutto, a patto eventualmente di sostituire l'intervallo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ con un altro piú piccolo $(t_0 - \delta', t_0 + \delta')$, si ha:

$$|y^*(t) - y_0| \leq b$$

da cui segue che:

$$|y^*(t) - y_0| \leq M|t - t_0|.$$

Ora, sottraendo membro a membro dalla (1.22) la relazione ricorrente (1.21) si ha:

$$|y^*(t) - y^{(1)}(t)| \leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, y^*(s)) - f(s, y^{(0)}(s))| ds \right| \leq$$

$$\leq L \left| \int_{t_0}^{t} |y^*(t) - y_0| ds \right| \leq \frac{ML}{2} |t - t_0|^2$$

e, per induzione:

$$|y^*(t) - y^{(m)}(t)| \leq \frac{M}{L} \frac{(L|t - t_0|)^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Poiché il secondo membro tende a zero per $m \to \infty$, si conclude che $y^*(t)$ é limite della stessa successione $\{y^{(m)}(t)\}$ di cui é limite $y(t)$ e che quindi $y^*(t) = y(t)$. □

Osservazione 1.1. *L'ultima relazione é interessante in quanto fornisce una stima dell'errore che si commette approssimando, in I, la soluzione con la m-esima approssimante di Peano-Picard.*

Osservazione 1.2. *Anche se abbiamo rilevato come sia possibile dimostrare esistenza di soluzioni locali al problema di Cauchy (1.15) con la sola ipotesi di continuitá sulla funzione $f(t, y)$, occorre osservare che il metodo utilizzato nel Teorema 1.1 per provare l'esistenza non puó prescindere dall'ipotesi di lipschitzianitá locale. Si consideri, infatti, il problema:*

$$\begin{cases} y' = 2t - 2\sqrt{y} \\ \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

La funzione $f : \mathbf{R} \times [0, +\infty) \to 2t - 2\sqrt{y}$ *é continua ma non é localmente lipschitziana, in quanto non é possibile soddisfare la condizione (1.13) in alcun intorno dell'origine. La successione delle approssimanti di Peano-Picard risulta essere:*

$$y^{(m)}(t) = \begin{cases} t^2 & \text{se } m \text{ é dispari,} \\ \\ 0 & \text{se } m \text{ é pari,} \end{cases}$$

la quale non converge, nemmeno puntualmente, in alcun intorno dell'origine.

1.3 Prolungamento delle soluzioni locali. Soluzioni massimali

Il Teorema 1 fornisce esistenza e unicitá di soluzioni locali al problema di Cauchy (1.15), cioé di soluzioni definite in un intorno I dell'istante iniziale t_0 di semiampiezza:

$$\delta = \min \left\{ a, \, \frac{b}{M} \right\}.$$

In generale, tuttavia, é possibile determinare soluzioni definite in intervalli di tempo piú grandi di I.

Esempio 1.4. *Si consideri il problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y' = 1 + (y - t)^2 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Si verifica, per sostituzione diretta, che esso ha per soluzione la funzione $y(t) = t$*, definita in tutto* $\mathbf{R}$*. Valutiamo ora gli elementi della successione delle approssimanti di Peano-Picard:*

$$y^{(0)}(t) = 0$$

$$y^{(m+1)}(t) = \textstyle\int_0^t (1 + (y^{(m)}(s) - s)^2 ds, \qquad m \geq 1.$$

Si verifica per induzione che:

$$y^{(m)}(t) = t + \frac{t^{2^{n+1}-1}}{c_n}, \qquad t \in \mathbf{R}, \ n \geq 1$$

dove la successione $\{c_n\}$ *é definita da:*

$$\begin{aligned} c_1 &= 3 \\ c_{n+1} &= (2^{n+2}-1)c_n^2. \qquad n \geq 1. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Verifichiamo, sempre per induzione, che per un opportuno $\lambda > 0$ risulta per ogni $n \geq 1$ che:

$$c_n \leq \frac{\lambda^{2^n}}{2^{n+3}}. \tag{1.24}$$

Infatti, la (20) vale per $n = 1$ pur di prendere $\lambda \geq \sqrt{48}$. Quindi, supponendola valida per n, dalla (1.23) segue:

$$c_{n+1} \leq 2^{n+3}c_n^2 \leq 2^{n+2}\Big(\frac{\lambda^{2^n}}{2^{n+3}}\Big)^2 = \frac{\lambda^{2^{n+1}}}{2^{(n+1)+3}}.$$

Dunque, la (1.24) vale per ogni $n \geq 1$. Si fissi ora un valore di λ per cui la (1.24) vale. Si verifica che, poiché:

$$y^{(m)}(t) \geq t + \frac{t^{2^{n+1}-1}2^{n+3}}{\lambda^{2^n}} > t + t^{2^n-1}2^{n+3}, \ \textit{se } t > \lambda,$$

la successione $\{y^{(m)}(t)\}$ diverge.

Si pone quindi il problema di prolungare, se possibile, le soluzioni locali ottenute dal Teorema 1.1 ad un intervallo piú ampio di quello fornito dal teorema stesso.

Definizione 1.2. *Siano $y_1(t)$ ed $y_2(t)$ due soluzioni locali del problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases},$$

definite rispettivamente negli intervalli $I_1 = (a_1, b_1)$ ed $I_2 = (a_2, b_2)$ (ovviamente, $t_0 \in I_1 \cap I_2$). Si dirá che y_2 é un prolungamento di y_1 se $I_2 \supset I_1$ e $y_1(t) = y_2(t)$ per $t \in I_1$. In tal caso, y_1 si dirá una restrizione di y_2.

Definizione 1.3. *Una soluzione $y(t)$ si dirá massimale se non ammette alcun prolungamento. L'intervallo in cui é definita una soluzione massimale si dirá intervallo massimale.*

Teorema 1.2. *Il problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{1.25}$$

con $f : A \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ continua e localmente lipschitziana e $(t_0, y_0) \in A$, ha una ed una sola soluzione massimale. Ogni soluzione locale di (1.25), poi, é una restrizione di tale soluzione massimale.

Dimostrazione. Diciamo $\mathcal{Y}$ l'insieme di tutte le soluzioni locali di (1.25), insieme che é non vuoto per il Teorema 1.1. Siano $y_1,\ y_2 \in \mathcal{Y}$ e mostriamo che y_1 coincide con y_2 nell'intersezione $I = \operatorname{dom} y_1 \cap \operatorname{dom} y_2$ dei loro domini. Sia $t' \in I$ tale che $y_1(t') \neq y_2(t')$. Ovviamente, $t' \neq t_0$. Possiamo supporre, senza perdere di generalitá, che $t' > t$ ed osservare che l'intervallo $[t_0, t'] \subset I$. Sia:

$$t^* = \sup\{t \in [t_0, t'] : y_1(t) = y_2(t) \quad \forall t \in [t_0, t]\}.$$

Poiché $y_1(t) \neq y_2(t)$, le due funzioni (continue) restano distinte in un intorno sinistro di t, cosicché $t^* < t'$. In particolare, $t^* \in I$ e $y_1(t^*) = y_2(t^*)$. Allora, considerato il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t^*) = y_1(t^*), \end{cases}$$

si osserva che tanto $y_1(t)$ quanto $y_2(t)$ ne sono soluzioni locali; pertanto, esse devono coincidere in un intorno del tipo $[t^*, t'')$, con $t'' > t^*$, in contraddizione con la definizione di t^*.
Conseguenza immediata del risultato appena ottenuto é che se un istante t appartiene all'unione dei domini degli elementi di $\mathcal{Y}$, tutte le funzioni di $\mathcal{Y}$ definite in t assumono ivi lo stesso valore. Siamo indotti, cosi', a definire la funzione $v(t)$:

$$v(t) = y(t) \qquad \text{se } y \in \mathcal{Y} \text{ e } t \in \operatorname{dom} y, \qquad \operatorname{dom} v = \bigcup_{y \in \mathcal{Y}} \operatorname{dom} y.$$

Intanto, dom v, essendo unione di intervalli aperti contenenti t_0, é esso stesso un intervallo aperto contenente t_0. Fissato poi un qualsiasi $t \in$ dom v, la v verrá a coincidere, in un intorno di t con una delle soluzioni locali di $\mathcal{Y}$, cosicché v é essa stessa soluzione. Inoltre, $v(t_0) = y_0$ e dunque v é soluzione del problema (1.25). Infine, essendo v prolungamento di y, $\quad \forall y \in \mathcal{Y}$, essa é una soluzione massimale del problema di Cauchy (1.25). Che poi sia l'unica soluzione massimale é del tutto ovvio, essendo sufficiente osservare che se esistesse un'altra soluzione massimale w, dovendo essere l'una prolungamento dell'altra deve necessariamente aversi $v(t) = w(t)$, $\forall t$. □

Il Teorema 1.2 assicura l'esistenza e l'unicitá della soluzione massimale del problema di Cauchy (1.25). Ma come si puó procedere, operativamente, a prolungare una soluzione locale $y(t)$ di (1.25)? Un modo spontaneo é il seguente. Sia $y(t)$ la soluzione locale fornita dal Teorema 1.1, definita nell'intervallo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, supponiamo che esista finito il limite:

$$\lim_{t \to t_0 + \delta} y(t) = y^* \tag{1.26}$$

e che il punto $(t_0 + \delta, y^*) \in A$. Allora, stante il Teorema 1.1, il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0+\delta) = y^* \end{cases}$$

ammette una soluzione unica $v(t)$ in un intorno $(t_0+\delta-\delta', t_0+\delta+\delta')$ (supponiamo $\delta > \delta'$). Allora, la funzione:

$$w(t) = \begin{cases} \mathbf{y}(t) & \text{se } t \in (t_0-\delta, t_0+\delta), \\ v(t) & \text{se } t \in [t_0+\delta, t_0+\delta+\delta') \end{cases}$$

é soluzione di (1.25) nell'intervallo $(t_0-\delta, t_0+\delta+\delta')$ e dunque é un prolungamento della $y(t)$.
La principale difficoltá in questo modo di procedere é la verifica dell'ipotesi (1.26). Il risultato seguente consente di "indebolire" tale ipotesi.

Teorema 1.3. *Sia $y(t)$ una soluzione locale del problema di Cauchy (1.25) e sia $I = (a,b)$ il suo intervallo di definizione. Se si puó determinare una successione crescente $\{t_h\}$ di istanti convergente a b, con $\{y(t_h)\} \to y^*$ e se il punto $(b, y^*) \in A$, allora:*

$$\lim_{t \to b^-} y(t) = y^* \tag{1.27}$$

e la $y(t)$ é prolungabile (a destra).

Dimostrazione. Per ipotesi, $(b, y^*) \in A$. Allora, é possibile determinare un intorno I di b ed un intorno J di y^* tali che $I \times J \subset A$. Definiamo poi:

$$M = \sup_{I \times J} |f(t,y)|.$$

Per provare la (1.27) occorre e basta provare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $m \in \mathbf{N}$ tale che $|y(t) - y^*| < \varepsilon$ se $t_m < t < b$. Intanto, é sempre possibile scegliere ε sufficientemente piccolo per cui $(y^*-\varepsilon, y^*+\varepsilon) \subset J$. Ancora, poiché la successione $\{t_h\}$ é crescente e convergente a b e $\{y(t_h)\} \to y^*$, esisterá un $m \in \mathbf{N}$ tale che $t_m \in I$ e:

$$|t_m - b| < \frac{\varepsilon}{4M}, \qquad |y(t_m) - y^*| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.28}$$

Proveremo che se $t_m < t < b$ si ha $|y(t) - y^*| < \varepsilon$. Per fare questo, grazie alla seconda delle (1.28) ed alla disuguaglianza triangolare, sará sufficiente mostrare che $|y(t) - y(t_m)| < \varepsilon/2$. Supponiamo per assurdo che quest'ultima disuguaglianza sia falsa, cioé che l'insieme:

$$E = \{t \in (t_m, b) : |y(t) - y(t_m)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$$

sia non vuoto. Allora, detto $\tau = \inf E$, per continuitá si avrá $|y(\tau) - y(t_m)| = \varepsilon/2$. D'altronde, se $t_m < \xi < \tau$, si avrá $|y(\xi) - y(t_m)| < \varepsilon/2$ e dunque $y(\xi) \in J$, cosicché $|y'(\xi)| = |f(\xi, y(\xi))| < M$. Allora dal teorema del valor medio, essendo ξ un istante opportuno nell'intervallo (t_m, τ), si ha:

$$\frac{\varepsilon}{2} = |y(\tau) - y(t_m)| = |y'(\xi)(\tau - t_m)|$$

e quindi:

$$\frac{\varepsilon}{2} < M|b - t_m| < \frac{\varepsilon}{4}$$

il che é evidentemente assurdo. □

Osservazione 1.3. *Naturalmente, quanto provato nel Teorema 1.3 a proposito della prolungabilitá a destra di $y(t)$ vale anche per la prolungabilitá a sinistra, a patto di apportare le ovvie modifiche all'enunciato.*

Il risultato che ora proveremo si pronuncia sul comportamento delle soluzioni massimali del problema di Cauchy (1.25) quando ci avviciniamo agli estremi dell'intervallo massimale di definizione.

Teorema 1.4. *Se y(t) é soluzione del problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

con, al solito, $f : A \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ continua e localmente lipschitziana e $(t_0, y_0) \in A$, e se K é un compatto tale che, indicato con $\operatorname{graf} y$ il grafico della soluzione $y(t)$, si abbia:

$$\operatorname{graf} y \subseteq K \subset A, \tag{1.29}$$

allora $y(t)$ non é massimale.

Dimostrazione. Dalla (1.29) si ha che, detto (a, b) l'intervallo di definizione della soluzione $y(t)$, esistono istanti t prossimi quanto si vuole all'estremo, diciamo, b tali che i punti $(t, y(t)) \in K$. Si puó costruire, dunque, una successione crescente $\{t_h\} \to b$ con $(t_h, y(t_h)) \in K$. Poiché K é compatto, dalla successione $\{t_h\} \to b$ si puó estrarre una sottosuccessione $\{t_{h'}\} \to b$ tale che la successione $\{y(t_{h'})\}$ é convergente ad un punto y^*, con $(b, y^*) \in K \subset A$. Dunque, $y(t)$ é prolungabile a destra. Analogo ragionamento si puó produrre in corrispondenza dell'estremo sinistro a. □

Conseguenza del Teorema 1.4 é che, se $y(t)$ é soluzione massimale e se (a, b) é il corrispondente intervallo massimale di esistenza, per $t \to b$ il punto $(t, y(t))$ deve andare verso la frontiera ∂A di A (analogamente si puó ragionare per $t \to a$). Tuttavia, il punto $(t, y(t))$ convergerá ad un punto di ∂A soltanto se esiste il limite:

$$\lim_{t \to b^-} y(t) \qquad \Big(\text{ovvero} \quad \lim_{t \to a^+} y(t)\Big).$$

Osserviamo infine che sussiste il seguente risultato, di cui ci si convincerá facilmente tenendo presente il Teorema 1.4.

Teorema 1.5. *Sia $y(t)$ la soluzione massimale del problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

e sia $[t_0, b)$ il corrispondente intervallo massimale destro. Se esiste un compatto $K \subset A$ tale che:

$$\{(t, y(t)) : t \in [t_0, b)\} \subseteq K,$$

allora $b = +\infty$. Analogamente, detto $(a, t_0]$ é l'intervallo massimale sinistro, se esiste un compatto $K' \subset A$ tale che:

$$\{(t, y(t)) : t \in (a, t_0]\} \subseteq K',$$

allora $a = -\infty$.

1.4 Esistenza e unicitá globali per il problema di Cauchy

Sia $f : A = \mathcal{I} \times \mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. In questo paragrafo studieremo sotto quali condizioni la soluzione massimale del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{1.30}$$

che esiste ed é unica nelle ipotesi del Teorema 1.2, risulta definita in grande, ovvero in tutto l'intervallo $\mathcal{I}$. Che ció non si verifichi sempre é giá stato mostrato con diversi esempi. Eccone ancora uno.

Esempio 1.5. *La soluzione massimale del problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

dove f é definita in tutto $\mathbf{R}^2$, cioé $\mathcal{I} = \mathbf{R}$, risulta essere:

$$y(t) = \tan y$$

ed il corrispondente intervallo massimale $I = (-\pi/2, \pi/2) \neq \mathcal{I}$.

Al principale risultato di questo paragrafo premettiamo il seguente

Teorema 1.6. ***(Lemma di Gronwall)*** *Sia $I = [t_0, t_1]$ un intervallo, con $t_0 < t_1 \leq +\infty$, e siano α, β e φ funzioni continue in I, con α non decrescente e β non negativa, tali che:*

$$\varphi(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^{t} \beta(s)\varphi(s)ds \qquad \forall t \in I. \tag{1.31}$$

Allora, vale la disuguaglianza:

$$\varphi(t) \leq \alpha(t) \exp\Big(\int_{t_0}^{t} \beta(s)ds\Big) \qquad \forall t \in I. \tag{1.32}$$

Dimostrazione. Sia:

$$B(t) = \int_{t_0}^{t} \beta(s)ds.$$

Poiché β é non negativa, dalla (1.31) segue:

$$\frac{d}{dt}\Big(e^{-B(t)}\int_{t_0}^{t}\beta(s)\varphi(s)ds\Big) = -\beta(t)e^{-B(t)}\int_{t_0}^{t}\beta(s)\varphi(s)ds + \beta(t)\varphi(t)e^{-B(t)} =$$

$$= \beta(t)e^{-B(t)}\Big(\varphi(t) - \textstyle\int_{t_0}^{t}\beta(s)\varphi(s)ds\Big) \leq \alpha(t)\beta(t)e^{-B(t)} \qquad \forall t \in I.$$

Fissato ora un qualsiasi $t \in I$, integrando fra t_0 e t ed applicando il secondo teorema fondamentale del calcolo (le funzioni α, β e φ sono continue in I) otteniamo:

$$e^{-B(t)}\int_{t_0}^{t}\beta(s)\varphi(s)ds \leq \int_{t_0}^{t}\alpha(s)\beta(s)e^{-B(s)}ds.$$

Sfruttando le ipotesi sulle funzioni α e β e sviluppando l'integrale a secondo membro abbiamo:

$$e^{-B(t)}\int_{t_0}^{t}\beta(s)\varphi(s)ds \leq \alpha(t)\int_{t_0}^{t}\beta(s)e^{-B(s)}ds = \alpha(t)\Big(1 - e^{-B(t)}\Big),$$

da cui, moltiplicando per $e^{B(t)}$ ed utilizzando ancora la (1.31), si giunge infine all'asserto. $\square$

Siamo ora in condizione di provare il seguente

Teorema 1.7. *Sia* $f : A = \mathcal{I}\times\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *continua e localmente lipschitziana e siano* $a(t)$ *e* $b(t)$ *due funzioni continue e non negative in* $\mathcal{I}$ *tali che:*

$$|f(t,y)| \leq a(t) + b(t)|y|, \qquad \forall t \in \mathcal{I} \quad \forall y \in \mathbf{R}. \tag{1.33}$$

Allora, per ogni $(t_0, y_0) \in A$*, la soluzione massimale del problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{1.34}$$

é definita in tutto $\mathcal{I}$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{I} = (t_1^*, t_2^*)$ e sia $I = (t_1, t_2)$ l'intervallo di definizione della soluzione $y(t)$ di (1.34). Ragioniamo, per fissare le idee, nel secondo estremo, supponendo che risulti $t_2 < t_2^*$ e dimostriamo che $y(t)$ non puó essere massimale. Poiché $y(t)$ é soluzione, essa risolve l'equazione di Volterra:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds \qquad t_0 \leq t < t_2.$$

Prendendo i moduli di entrambi i membri e sfruttando l'ipotesi (1.33) si ha:

$$|y(t)| \leq |y_0| + \int_{t_0}^{t} a(s)ds + \int_{t_0}^{t} b(s)|y(s)|ds \qquad t_0 \leq t < t_2.$$

Scegliendo $\varphi(t) = |y(t)|$, $\beta(t) = b(t)$ e $\alpha(t) = |y_0| + \int_{t_0}^{t} a(s)ds$ ed osservato che si tratta di funzioni continue, con β non negativa ed α non decrescente, l'applicazione del Teorema 1.6 conduce a:

$$|y(t)| \leq \Big(|y_0| + \int_{t_0}^{t} a(s)ds\Big) \exp\Big(\int_{t_0}^{t} b(s)ds\Big) \qquad t_0 \leq t < t_2. \tag{1.35}$$

Siccome $t_2 < t_2^*$, il secondo membro della (1.35) é limitato da una costante M. Allora, il grafico della restrizione della $y(t)$ all'intervallo $[t_0, t_2)$ é incluso in $[t_0, t_2] \times [-M, M]$, che é un compatto contenuto in A. Allora, a norma del Teorema 1.4, $y(t)$ non é massimale. Ragionando analogamente nel primo estremo, si giunge infine all'asserto. $\square$

Osservazione 1.4. *Le ipotesi del Teorema 1.7 sono soddisfatte se la $f(t, y)$ é una funzione lineare della y, cioé del tipo:*

$$f(t, y) = a(t) + b(t)y,$$

con $a(t)$ e $b(t)$ funzioni continue in $\mathcal{I}$. Dunque, il problema di Cauchy relativo ad una equazione differenziale lineare:

$$\begin{cases} y' = a(t) + b(t)y \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione globale. Ancora, le ipotesi del Teorema 1.2 sono soddisfatte se la funzione $f : A = \mathcal{I} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ é continua e lipschitziana *(non soltanto localmente) in A rispetto ad y, cioé se la L nella (1.13) non dipende dal punto $(t_0, y_0) \in A$. Infatti:*

$$|f(t, y)| \leq |f(t, 0)| + |f(t, y) - f(t, 0)| \leq |f(t, 0)| + L|y|$$

e quindi la (1.33).

1.5 Regolaritá delle soluzioni del problema di Cauchy

Sia $f : A \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ continua in t ed y e localmente lipschitziana in y nell'aperto A. Se $(t_0, y_0) \in A$, il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{1.36}$$

ammette un'unica soluzione massimale $y(t)$, definita nel corrispondente intervallo massimale I. Ovviamente, se in (32) si cambiano i dati, cioé t_0 oppure y_0 o entrambi, cambiano in corrispondenza sia la soluzione massimale che l'intervallo massimale di esistenza. Per evidenziarne la dipendenza dai dati, indicheremo con $y(t; t_0, y_0)$ la soluzione massimale di (1.36) e con $I(t_0, y_0)$ il corrispondente intervallo massimale di esistenza. Scopo di questo paragrafo é studiare le proprietá di regolaritá della $y(t; t_0, y_0)$ in funzione dei suoi argomenti.

Teorema 1.8. *Se la funzione $f(t, y)$ in (1.36) é di classe C^k, allora ogni soluzione locale $y(t)$ (e quindi, in particolare, la soluzione massimale $y(t; t_0, y_0)$) é una funzione di classe C^{k+1} in t.*

Dimostrazione. Proveremo l'asserto per induzione. Si supponga $k = 0$. La $y(t)$ é una funzione derivabile nel suo dominio I e quindi continua. Inoltre, essendo la $f(t, y)$ continua, dalla $(1.36)_1$ tale é anche $y'(t)$. Dunque, la tesi é vera se $k = 0$. Supponiamo ora che essa sia verificata per un generico intero k e proviamo che vale anche per $k + 1$. Sia f di classe C^{k+1}. Ovviamente, essa sará anche di classe C^k e quindi, per ipotesi, $y(t)$ sará di classe C^{k+1}. Ma, ancora dalla $(1.36)_1$, segue che y' é di classe C^{k+1}. Quindi, $y(t)$ é di classe C^{k+2} e l'asserto é dimostrato. □

Osservazione 1.5. *Ovviamente, se $f(t, y)$ é di classe C^∞, anche ogni soluzione locale $y(t)$ di (1.36) é di classe C^∞.*

Come é stato rilevato nell'introduzione, dal punto di vista applicativo é molto importante conoscere la regolaritá della soluzione di un problema di Cauchy rispetto ai dati. Sussiste, a proposito, il seguente

Teorema 1.9. *Sia $f : A \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua, localmente lipschitziana in y e sia $(t_0, y_0) \in A$. Supponiamo poi che si possa determinare un intervallo $[\tau_1, \tau_2]$ tale che, per ogni (t^*, y^*) in un intorno $\mathcal{N}$ di (t_0, y_0), la soluzione $y(t; t^*, y^*)$ sia definita in $[\tau_1, \tau_2]$[1]. Allora, se $(t^*, y^*) \to (t_0, y_0)$, la funzione $y(t; t^*, y^*)$ converge uniformemente alla $y(t; t_0, y_0)$ in $[\tau_1, \tau_2]$.*

[1] In realtá, si puó dimostrare che un tale intervallo esiste sempre.

Dimostrazione. Restringendo eventualmente l'intorno $\mathcal{N}$ di (t_0, y_0) é possibile determinare un compatto $K \subset A$ che contenga i grafici delle $y(t; t^*, y^*)$ per $(t^*, y^*) \in \mathcal{N}$. Siano:

$$M = \max_{(t,y)\in K} |f(t, y)|$$

e L la costante di Lipschitz della $f(t, y)$ in K. Si ha, per ogni $t \in [\tau_1, \tau_2]$:

$$y(t; t^*, y^*) = y^* + \int_{t^*}^{t} f(s, y(s; t^*, y^*))ds$$

e:

$$y(t; t_0, y_0) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s; t_0, y_0))ds.$$

Sottraendo membro a membro e scrivendo $\int_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t^*} + \int_{t^*}^{t}$ si ottiene:

$$|y(t; t^*, y^*) - y(t; t_0, y_0)| \leq |y^* - y_0| + \left| \int_{t_0}^{t^*} f(s, y(s; t_0, y_0))ds \right| +$$

$$+ \left| \int_{t^*}^{t} \{f(s, y(s; t^*, y^*)) - f(s, y(s; t_0, y_0))\}ds \right|.$$

Da qui si ricava:

$$|y(t; t^*, y^*) - y(t; t_0, y_0)| \leq |y^* - y_0| + M|t^* - t_0| + \left| \int_{t^*}^{t} L|y(s; t^*, y^*) - y(s; t_0, y_0)|ds \right|.$$

Applicando ora il Teorema 1.6 all'intervallo $[\tau_1, \tau_2]$ con $\varphi(t) = |y(s; t^*, y^*) - y(s; t_0, y_0)|$, $\alpha = |y^* - y_0| + M|t^* - t_0|$ e $\beta = L$ si ottiene:

$$|y(t; t^*, y^*) - y(t; t_0, y_0)| \leq (|y^* - y_0| + M|t^* - t_0|)e^{L|\tau_2 - \tau_1|}, \qquad (1.37)$$

la quale immediatamente implica la tesi. □

Osservazione 1.6. *É importante osservare, dalla (1.37), che la convergenza é uniforme in intervalli* limitati, *mentre non si esclude affatto un allontanamento all'infinito anche per soluzioni corrispondenti a dati iniziali molto vicini, come é mostrato nell'esempio seguente.*

Esempio 1.6. *Consideriamo i problemi di Cauchy:*

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 + \varepsilon, \end{cases} \qquad \varepsilon > 0.$$

Le corrispondenti soluzioni sono:

$$y_1(t) = e^t \qquad e \qquad y_2(t) = (1+\varepsilon)e^t$$

ma:

$$|y_1(t) - y_2(t)| = \varepsilon e^t \to +\infty \qquad per\ t \to +\infty.$$

Osservazione 1.7. *Il Teorema 7 fornisce la continuitá della soluzione $y(t; t_0, y_0)$ rispetto ad y_0. Si puó dimostrare che, se la $f(t, y)$ nella $(1.36)_1$ possiede la derivata rispetto ad y continua, allora esiste continua anche la derivata di $y(t; t_0, y_0)$ rispetto ad y_0.*

Osservazione 1.8. *Sinora abbiamo considerato il problema ai valori iniziali per una equazione differenziale scalare, per evitare inutili complicazioni formali nelle dimostrazioni dei teoremi. In realtá, tutti i risultati fin qui ottenuti si applicano,* con le opportune evidenti modifiche*, al problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases} \tag{1.38}$$

relativo ad un'equazione differenziale vettoriale*. Per dare un esempio, il risultato di differenziabilitá enunciato nell'Osservazione 1.7 si estende al problema (1.38) dicendo che, se $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n$, continua e localmente lipschitziana rispetto ad $\mathbf{y}$, possiede le derivate parziali $\partial f_i/\partial y_k$ $(i, k = 1, ..., n)$ continue in A, allora esistono continue anche le derivate della soluzione massimale $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$ rispetto ad y_{0i}, $i = 1, ..., n$.*

1.6 Il punto di vista dei sistemi dinamici

Questo paragrafo ha lo scopo di introdurre alla teoria geometrica delle equazioni differenziali ordinarie, che costituirá una parte rilevante del Corso. Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \end{cases} \tag{1.39}$$

dove $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, continua e localmente lipschitziana, non dipende esplicitamente dal tempo t. In questo caso, il problema (1.39) si dice *autonomo.* Sia $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$ la soluzione massimale di (1.39) relativa ai dati $t_0, \mathbf{y}_0$ e sia $I(t_0, \mathbf{y}_0)$ il corrispondente intervallo massimale di esistenza. Allora, se $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}(t_0 + \tau)$, $\tau \in \mathbf{R}$, si ha che:

$$\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}(t + \tau; t_0 + \tau, \mathbf{y}_0) I(t_0, \mathbf{y}_0) = I(t_0 + \tau, \mathbf{y}_0). \tag{1.40}$$

Infatti, le due funzioni a primo ed a secondo membro della $(1.40)_1$ sono entrambe soluzioni massimali di (1.39) ed assumono lo stesso valore per $t = 0$, Dunque,

esse coincidono ed hanno lo stesso intervallo di definizione. Le (1.40) esprimono la cosiddetta proprietá di invarianza della soluzione del problema autonomo (1.39) rispetto all'istante iniziale t_0. Se si cambia il dato iniziale temporale t_0 (ma non quello spaziale $\mathbf{y}_0$) di una quantitá τ, la soluzione massimale (ovvero il suo grafico) semplicemente trasla in t della stessa quantitá. Per questa ragione, la soluzione massimale di (1.39) si indicherá semplicemente con $\mathbf{y}(t;\mathbf{y}_0)$ e con $I(\mathbf{y}_0)$ il corrispondente intervallo massimale di esistenza.
Ritorniamo al problema di Cauchy (1.39) e supponiamo che $\mathbf{f} \in C^1(A)$ e che siano soddisfatte le ipotesi del Teorema 1.7, cosicché vi sia esistenza globale. La soluzione $\mathbf{y}(t;\mathbf{y}_0)$ di (1.39) si puó riguardare in due modi distinti:

a) per ogni $\mathbf{y}_0 \in A$, la $\mathbf{y}(t;\mathbf{y}_0)$ é un'applicazione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}^n$ che a t associa $\mathbf{y}_{\mathbf{y}_0}(t)$ (abbiamo posto $\mathbf{y}_0$ a pedice per sottolineare che, da questo punto di vista, esso é un *parametro*);

b) per ogni $t \in \mathbf{R}$, la $\mathbf{y}(t;\mathbf{y}_0)$ é un'applicazione da $\mathbf{R}^n$ in sé che ad $\mathbf{y}_0$ associa $\mathbf{y}_t(\mathbf{y}_0)$.

É precisamente quest'ultimo il punto di vista della teoria dei sistemi dinamici. Al variare di $t \in \mathbf{R}$, si ottiene una famiglia ad un parametro di trasformazioni di $\mathbf{R}^n$ in sé, che prende il nome di *flusso di fase* e che sará indicata con il simbolo $\{\phi_t\}$. In altri termini $\phi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{y}(t;\mathbf{x}),\ t \in \mathbf{R}$. Dal Teorema 1.7 di esistenza e unicitá in grande e dalle Osservazioni 1.7, 1.8 segue che il flusso di fase gode delle seguenti proprietá:

1) ϕ_0 é l'identitá in $\mathbf{R}^n$, ovvero $\phi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$;

2) $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s = \phi_s \circ \phi_t$; in particolare, $\phi_{-t} \circ \phi_t$ é l'identitá in $\mathbf{R}^n$;

3) per ogni $t \in \mathbf{R}$, ϕ_t é un'applicazione biunivoca di $\mathbf{R}^n$ in sé, di classe C^1 con la sua inversa ϕ_{-t}, ovvero é un diffeomorfismo di $\mathbf{R}^n$ in sé.

Stanti le proprietá 1) e 2), la famiglia $\{\phi_t\}$ costituisce un gruppo commutativo rispetto alla ordinaria legge di composizione di funzioni. Dunque, se la $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ nella $(1.39)_1$ é di classe C^1, il flusso di fase é un gruppo commutativo ad un parametro di diffeomorfismi di $\mathbf{R}^n$ in sé. Una struttura algebrica di questo tipo si dice *sistema dinamico* di classe C^1.

1.7 Equazioni differenziali lineari. Introduzione

Sia $\mathcal{M}_n$ lo spazio delle matrici quadrate reali di ordine n. In questo paragrafo tratteremo la classe particolare delle equazioni differenziali *lineari*, cioé della forma:

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \tag{1.41}$$

con $A : I \to \mathcal{M}_n$ e $\mathbf{b} : I \to \mathbf{R}^n$ continue. La funzione matriciale $A(t)$ si dice *matrice dei coefficienti* mentre la funzione vettoriale $\mathbf{b}(t)$ si dice *termine noto*.
L'equazione differenziale:

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} \tag{1.42}$$

che si ottiene dalla (1.41) sopprimendo il termine noto si dice *equazione omogenea associata* alla (1.41).
Tenuto conto dell'Osservazione 1.4 e del Teorema 1.8, il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases} \tag{1.43}$$

ammette, per ogni scelta di $t_0 \in I$ e di $\mathbf{y}_0 \in \mathbf{R}^n$, una ed una sola soluzione massimale globale $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$, ovvero definita in tutto I, e tale soluzione é di classe $C^1(I)$ in t. Viceversa, se la matrice dei coefficienti é continua e se $\mathbf{y}(t)$ é una funzione di classe $C^1(I)$, allora é continua in I la funzione:

$$t \to \mathbf{y}'(t) - A(t)\mathbf{y}(t).$$

Dunque, sempre nell'ipotesi che $A(t)$ sia continua, si puó considerare l'operatore lineare di $C^1(I, \mathbf{R}^n)$ in $C^0(I, \mathbf{R}^n)$[2]:

$$L_A : \mathbf{y} \to \mathbf{y}'(t) - A(t)\mathbf{y}(t), \quad t \in I, \ \mathbf{y} \in C^1(I, \mathbf{R}^n). \tag{1.44}$$

Se poi $\mathbf{b} \in C^0(I, \mathbf{R}^n)$, l'insieme delle soluzioni dell'equazione (1.41) é l'immagine inversa di $\mathbf{b}$ tramite L_A. Allora, un ben noto risultato di algebra lineare consente di enunciare il seguente

Teorema 1.10. *Sia $I \subset \mathbf{R}$ un intervallo aperto e siano A e $\mathbf{b}$ funzioni continue in I a valori in $\mathcal{M}_n$ ed in $\mathbf{R}^n$, rispettivamente. Sia poi $\mathbf{w}$ una qualsiasi soluzione (una soluzione* particolare*) della equazione inomogenea (1.41). Allora, l'integrale generale della (1.41) é l'insieme:*

$$\ker L_A \cup \{\mathbf{w}\},$$

ovvero l'insieme costituito da tutte e sole le funzioni $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, con $\mathbf{v}$ che varia nell'insieme $\ker L_A$ *delle soluzioni dell'equazione omogenea associata (1.42).*

Dunque, il problema della determinazione dell'insieme delle soluzioni della equazione inomogenea (1.41) si condurrá in due passi. Nel primo, si tratterá di determinare l'integrale generale della omogenea associata (1.42), nel secondo di determinare una soluzione particolare dell'equazione completa (1.41). Nel prossimo paragrafo affronteremo il primo aspetto del problema.

[2] Con il simbolo $C^k(I, \mathbf{R}^n)$ si intende l'insieme delle funzioni $\mathbf{y}(t)$ di classe C^k in I a valori in $\mathbf{R}^n$.

1.8 Equazioni differenziali lineari omogenee

In questo paragrafo tratteremo il problema della determinazione dell'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea:

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} \tag{1.45}$$

dove $A(t)$ é continua nell'intervallo $I \subset \mathbf{R}$, ovvero il nucleo dell'operatore L_A definito nella (1.44). Essendo L_A un operatore lineare, il suo nucleo é uno spazio vettoriale. La struttura di questo spazio vettoriale é descritta dal seguente

Teorema 1.11. *Comunque si scelga $t_0 \in I$, l'applicazione:*

$$\mathbf{v} \in \ker L_A \to \mathbf{v}(t_0) \in \mathbf{R}^n \tag{1.46}$$

é un isomorfismo di $\ker L_A$ *su* $\mathbf{R}^n$*. Quindi,* $\dim \ker L_A = n$ *e una sua base é costituita dalle soluzioni dei problemi di Cauchy:*

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_k \qquad k = 1, ..., n \end{cases} \tag{1.47}$$

essendo $\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_n$ *una qualsiasi base di* $\mathbf{R}^n$*.*

Dimostrazione. L'applicazione definita dalla (1.46) é evidentemente lineare, in conseguenza delle definizioni di somma di funzioni e di prodotto di uno scalare per una funzione. Inoltre, poiché per ogni $\mathbf{y}_0 \in \mathbf{R}^n$, il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione, essa é anche biettiva. Dunque, é un isomorfismo. □

Definizione 1.4. *Ogni matrice $Y(t) \in \mathcal{M}_n$ le cui colonne costituiscono una base di* $\ker L_A$ *si dice* matrice fondamentale *relativa alla equazione omogenea (1.45).*

Non é difficile verificare, per sostituzione diretta, che ogni matrice fondamentale $Y(t)$ soddisfa l'equazione differenziale:

$$Y'(t) = A(t)Y(t), \qquad t \in I. \tag{1.48}$$

Tuttavia, non é detto che ogni soluzione della (1.48) sia una matrice fondamentale. A questo proposito, sussiste il seguente

Teorema 1.12. *Sia $Y(t)$ una soluzione dell'equazione differenziale (1.48). Allora, $Y(t)$ é una matrice fondamentale se e soltanto se esiste almeno un $t^* \in I$ per cui* $\det Y(t^*) \neq 0$*.*

Dimostrazione. La condizione é necessaria. Infatti, se $Y(t)$ é fondamentale, essa soddisfa la (1.48) e inoltre, essendo le sue colonne linearmente indipendenti, si ha che $\det Y(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$.
La condizione é sufficiente. Infatti, se $Y(t)$ é soluzione della (1.48), indichiamo con $\mathbf{y}_1(t), ..., \mathbf{y}_n(t)$ le sue colonne e supponiamo che esista un $t^* \in I$ per cui $\det Y(t^*) \neq 0$. Allora, il sistema $\mathbf{y}_1(t^*), ..., \mathbf{y}_n(t^*)$ di vettori di $\mathbf{R}^n$ é una base di $\mathbf{R}^n$, essendo un sistema di n vettori linearmente indipendenti di $\mathbf{R}^n$. Ma allora le colonne $\mathbf{y}_1(t), ..., \mathbf{y}_n(t)$ di $Y(t)$ sono soluzioni degli n problemi di Cauchy (1.47) corrispondenti ai dati linearmente indipendenti $\mathbf{y}_1(t^*), ..., \mathbf{y}_n(t^*)$ e dunque costituiscono una base di $\ker L_A$. □

Poiché in uno spazio vettoriale esistono infinite basi, allo stesso modo esistono infinite matrici fondamentali relative all'equazione omogenea (1.45). L'insieme delle matrici fondamentali é caratterizzato dal seguente

Teorema 1.13. *Se $Y_1(t)$ ed $Y_2(t)$ sono due matrici fondamentali relative alla (1.45), allora é possibile determinare una matrice costante non singolare C tale che:*

$$Y_2(t) = Y_1(t)C.$$

Viceversa, se $Y_1(t)$ é una matrice fondamentale relativa alla (1.45) e se C é una matrice costante non singolare, anche la matrice $Y_1(t)C$ é una matrice fondamentale relativa all'equazione omogenea (1.45).

Dimostrazione. Siano $Y_1(t)$ ed $Y_2(t)$ due matrici fondamentali. Poniamo:

$$X(t) = Y_1^{-1}(t)Y_2(t). \tag{1.49}$$

(Osserviamo che $Y_1^{-1}(t)$ esiste in quanto $Y_1(t)$ é fondamentale.) Dalla (1.49) segue che:

$$Y_2(t) = Y_1(t)X(t). \tag{1.50}$$

Derivando rispetto al tempo la (1.50) e tenendo conto che $Y_1(t)$ ed $Y_2(t)$, essendo fondamentali, soddisfano la (1.48), si ha:

$$\begin{aligned} Y_2'(t) = A(t)Y_2(t) = Y_1(t)X'(t) + Y_1'(t)X(t) = Y_1(t)X'(t) + A(t)Y_1(t)X(t) = \\ = Y_1(t)X'(t) + A(t)Y_2(t). \end{aligned}$$

Dunque, deve necessariamente essere:

$$Y_1(t)X'(t) = 0. \tag{1.51}$$

La (1.51) implica che $X(t)$ é una matrice costante C (é sufficiente moltiplicare ambo i membri per $Y_1^{-1}(t)$, che esiste in quanto $Y_1(t)$ é fondamentale). Inoltre, essendo:

$$\det C = \det(Y_1^{-1}(t)Y_2(t)) = \det Y_1^{-1}(t)\ \det Y_2(t) \neq 0,$$

C é non singolare. La prima parte del teorema é dimostrata.
Siano ora $Y_1(t)$ una matrice fondamentale e C una matrice costante non singolare. Allora:

$$Y_1'(t) = A(t)Y_1(t). \tag{1.52}$$

Moltiplicando a destra ambo i membri della (1.52) per C si ha:

$$Y_1'(t)C = A(t)Y_1(t)C,$$

ovvero:

$$(Y_1(t)C)' = A(t)(Y_1(t)C)$$

visto che C é una matrice costante. Inoltre:

$$\det(Y_1(t)C) = \det Y_1(t)\ \det C \neq 0,$$

per cui $Y_1(t)C$ é una matrice fondamentale. L'asserto é cosi' dimostrato. □

Il passo successivo consiste nel determinare una qualsiasi matrice fondamentale relativa all'equazione omogenea (1.45). Stante il Teorema 1.12, una matrice fondamentale é la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} Y'(t) = A(t)Y(t) \\ Y(t_0) = I \end{cases} \tag{1.53}$$

dove I é la matrice identitá. Dunque, il problema é determinare la soluzione $Y(t)$ del problema di Cauchy (1.53). A tale proposito sussiste il seguente

Teorema 1.14. *Poniamo:*

$$B(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)ds \tag{1.54}$$

e supponiamo che:

$$A(t)B(t) = B(t)A(t) \qquad \forall t \in I. \tag{1.55}$$

Allora, la soluzione del problema di Cauchy (1.53), e quindi una matrice fondamentale relativa all'equazione omogenea (1.45), é data da:

$$Y(t) = \exp B(t).$$

Dimostrazione. Prima di dimostrare l'asserto proviamo che vale la formula:

$$\frac{d}{dt}B^m(t) = mA(t)B^{m-1}(t). \tag{1.56}$$

Per $m = 1$ la (1.57) segue direttamente dalla (1.54). Ora, ragionando per induzione, supposto che la (1.57) sia verificata per $m-1$, proviamo che essa vale anche per m. Infatti:

$$\frac{d}{dt}B^m(t) = \frac{d}{dt}B^{m-1}(t)B(t) =$$

$$= (m-1)A(t)B^{m-1}(t) + B^{m-1}(t)A(t) = mA(t)B^{m-1}(t)$$

dove l'ultimo passaggio é lecito stante la (1.55).
La soluzione al problema (1.53) sará ottenuta con il metodo delle approssimazioni successive (cf. Teorema 1.1). Costruiamo la successione $\{Y_m(t)\}$ ponendo:

$$Y_0 = I$$

$$Y_m(t) = Y_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)Y_{m-1}(s)ds \qquad m = 1, 2, ... \tag{1.57}$$

Osserviamo ora che risulta:

$$Y_m(t) = I + B(t) + \frac{B^2(t)}{2} + ... + \frac{B^m(t)}{m!}. \tag{1.58}$$

Infatti, la (1.58) é vera per $m = 1$ in quanto:

$$Y_1(t) = Y_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)Y_0 ds = I + B(t).$$

Supponendo, poi, la (1.58) vera per $m-1$, proviamola per m. Infatti, poiché risulta:

$$Y'_m(t) = A(t)Y_{m-1}(t) = A(t)\left(I + B(t) + ... + \frac{B^{m-1}(t)}{(m-1)!}\right) =$$

$$= A(t) + A(t)B(t) + ... + \frac{A(t)B^{m-1}(t)}{(m-1)!} =$$

$$= \frac{d}{dt}B(t) + \frac{d}{dt}\frac{B^2(t)}{2} + ... + \frac{d}{dt}\frac{B^m(t)}{m!}$$

si ha:

$$Y_m(t) = K + B(t) + \frac{B^2(t)}{2} + ... + \frac{B^m(t)}{m!}$$

dove K é una matrice costante. Ma, essendo $B(t_0) = 0$, si ha $I = Y_m(t_0) = K$, per cui:

$$Y_m(t) = I + B(t) + \frac{B^2(t)}{2} + ... + \frac{B^m(t)}{m!}$$

e cioé la (53). Ma la successione (52) converge alla soluzione $Y(t)$ del problema di Cauchy (49) (cf. Teorema 1). Dunque, ricordando la definizione di esponenziale di una matrice (vedi Appendice 1), si ha:

$$Y(t) = \lim_{m} Y_m(t) = \exp B(t)$$

e quindi l'asserto. □

La condizione (1.55), ovvero la commutativitá delle matrici $A(t)$ e $B(t)$ per ogni $t \in I$, é molto forte. Esiste, tuttavia, un'ampia classe di equazioni in cui essa é certamente verificata e precisamente la classe delle equazioni lineari omogenee autonome. *Infatti, se A é una matrice* costante*, la (1.42) assume la forma:*

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}. \tag{1.59}$$

Vale allora il seguente

Teorema 1.15. *La matrice:*

$$Y(t) = e^{At}$$

é una matrice fondamentale relativa all'equazione (1.59).

Dimostrazione. Infatti, dalla (1.54), si ha che:

$$B(t) = A(t - t_0).$$

La condizione (1.55) é quindi immediatamente verificata e dunque, a norma del Teorema 1.14, la matrice

$$e^{B(t)} = e^{At}e^{-At_0}, \tag{1.60}$$

é una matrice fondamentale relativa al problema (1.59). D'altra parte, moltiplicando la (1.60) a destra per la matrice costante non singolare $\exp(At_0)$, dal Teorema 1.13 segue immediatamente l'asserto. □

Dalla Definizione 1.4 una matrice fondamentale, avendo per colonne una base di $\ker L_A$*, contiene tutte le informazioni sullo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione omogenea (1.45). In particolare, la conoscenza di una matrice fondamentale consente di risolvere un qualsiasi problema di Cauchy relativo alla (1.45), come mostrato nel seguente*

Teorema 1.16. *Il problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases} \tag{1.61}$$

ha per soluzione:

$$\mathbf{y}(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)\mathbf{y}_0\,, \tag{1.62}$$

dove $Y(t)$ é una matrice fondamentale della $(1.61)_1$.

Dimostrazione. La (1.62) é soluzione dell'equazione indefinita $(1.61)_1$, come si verifica direttamente:

$$\mathbf{y}'(t) = Y'(t)Y^{-1}(t_0)\mathbf{y}_0 = A(t)Y(t)Y^{-1}(t_0)\mathbf{y}_0 = A(t)y(t).$$

Inoltre, la (1.62) assume per t_0 il dato $\mathbf{y}_0$. Dunque, essa é la soluzione, unica, del problema (1.61). □

1.9 Il problema di Cauchy per un'equazione lineare inomogenea

Il Teorema 1.10 afferma che per determinare l'integrale generale della equazione lineare inomogenea:

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \tag{1.63}$$

occorre e basta determinare l'insieme $\ker L_A$ delle soluzioni dell'equazione omogenea associata ed una soluzione particolare della (1.63). In questo paragrafo mostreremo come la conoscenza di una matrice fondamentale dell'omogenea é sufficiente anche per determinare tale soluzione particolare dell'equazione completa.

Teorema 1.17. *La funzione:*

$$\mathbf{y}(t) = Y(t)\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)\mathbf{b}(s)ds \tag{1.64}$$

é una soluzione particolare dell'equazione inomogenea (1.63).

Dimostrazione. La verifica é diretta. Infatti, derivando la (1.64) rispetto al tempo, si trova:

$$\mathbf{y}'(t) = Y'(t)\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)\mathbf{b}(s)ds + Y(t)Y^{-1}(t)\mathbf{b}(t) =$$

$$= A(t)Y(t)\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)\mathbf{b}(s)ds + \mathbf{b}(t) = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t).$$

□

Immediata conseguenza del precedente risultato é il seguente teorema, la cui dimostrazione é lasciata al lettore, che fornisce la soluzione del problema ai valori iniziali per la (1.63).

Teorema 1.18. *Il problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b} \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases} \tag{1.65}$$

ha per soluzione:

$$\mathbf{y}(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)\mathbf{y}_0 + Y(t)\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)\mathbf{b}(s)ds. \tag{1.66}$$

Nel caso particolare che la matrice dei coefficienti della $(60)_1$ sia costante, la soluzione (1.66) del problema (1.65) diventa:

$$\mathbf{y}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}\mathbf{b}(s)ds. \tag{1.67}$$

1.10 Esponenziale di matrici reali

In questo paragrafo riportiamo qualche cenno a ben noti risultati di algebra lineare.
Sia $\mathbf{E}_n$ uno spazio vettoriale n-dimensionale (tipicamente $\mathbf{E}_n = \mathbf{R}^n$ oppure $\mathbf{E}_n = \mathbf{C}^n$) e sia $\mathbf{M}_n$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n, reali o complesse a seconda che $\mathbf{E}_n = \mathbf{R}^n$ oppure $\mathbf{E}_n = \mathbf{C}^n$. Sia poi $\mathbf{Lin}(\mathbf{E}_n)$ lo spazio vettoriale delle trasformazioni lineari di $\mathbf{E}_n$ in $\mathbf{E}_n$. È ben noto che èpossibile stabilire un isomorfismo tra $\mathbf{Lin}(\mathbf{E}_n)$ e $\mathbf{M}_n$ tramite la relazione:

$$\tau \in \mathbf{Lin}(\mathbf{E}_n) \to A_{ij} \in \mathbf{M}_n,$$

$$\tau(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}\mathbf{e}_i, \qquad 1 \le j \le n,$$

essendo $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ una base di $\mathbf{E}_n$. Questa osservazione permette di identificare le matrici quadrate su $\mathbf{E}_n$ con le trasformazioni lineari di $\mathbf{E}_n$ in sè e di mutuare le proprietà di $\mathbf{M}_n$ da quelle di $\mathbf{Lin}(\mathbf{E}_n)$.

Definizione 1.5. *La norma della matrice $A \in \mathbf{M}_n$ è:*

$$||A|| = \sup_{|\mathbf{x}|\neq 0} \frac{|A\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|}, \tag{1.68}$$

dove $|\mathbf{x}|$ è il modulo di $\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n$ e $|A\mathbf{x}|$ il modulo dell'immagine di $\mathbf{x}$ tramite A.

È immediato verificare che:

$$||A|| = \sup_{|\mathbf{x}|\le 1} |A\mathbf{x}| = \sup_{|\mathbf{x}|=1} |A\mathbf{x}|. \tag{1.69}$$

Teorema 1.19. *Valgono le seguenti proprietà:*

a) *Se $||A|| = k$, allora $|A\mathbf{x}| \le k|\mathbf{x}|$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{E}_n$;*

b) $||A_1A_2|| \le ||A_1||\,||A_2||$;

c) $||A^m|| \le ||A||^m$, *per ogni $m \in \mathbf{N}$.*

Teorema 1.20. *Sia $A \in \mathbf{M}_n$. La serie:*

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!},$$

è assolutamente convergente e si dice esponenziale di A.

Teorema 1.21. *Se le matrici A e B commutano, allora:*

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

Dimostrazione. Per definizione, si ha:

$$e^{A+B} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!}.$$

Poichè $[A, B] = 0$ è possibile usare la formula del binomio di Newton:

$$(A+B)^k = \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} A^h B^{k-h} = \sum_{h=0}^{k} \frac{k!}{h!(k-h)!} A^h B^{k-h}.$$

Sostituendo e riordinando i termini (il che è lecito giacchè la serie è assolutamente convergente) si ottiene:

$$e^{A+B} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{k} \frac{A^h}{h!} \frac{B^{k-h}}{(k-h)!},$$

che è proprio la serie prodotto secondo Cauchy delle due serie esponenziali. Poichè tutte queste serie convergono assolutamente possiamo concludere:

$$e^{A+B} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{B^h}{h!} = e^A e^B.$$

□

Teorema 1.22. *L'esponenziale* $\exp(At)$ *è derivabile rispetto a t per ogni $t \in \mathbf{R}$ e:*

$$\left(e^{At}\right)' = A e^{At}.$$

Dimostrazione. Basta utilizzare il teorema di derivazione per serie. □

Teorema 1.23. *Sia P una matrice invertibile. Allora:*

$$e^{(PAP^{-1})t} = P e^{At} P^{-1}.$$

Dimostrazione. Infatti:

$$e^{(PAP^{-1})t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(PAP^{-1})^k t^k}{k!} = \mathbf{1} + PAP^{-1}t + \frac{(PAP^{-1})^2 t^2}{2} + \ldots =$$

$$= P\left(\mathbf{1} + At + \frac{A^2t^2}{2} + \ldots\right)P^{-1} = P\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}\right)P^{-1} = Pe^{At}P^{-1}.$$

□

Le proprietà precedenti permettono di ottenere facilmente l'espressione della matrice fondamentale $Y(t) = \exp(At)$. Nei paragrafi che seguono esamineremo i differenti casi che si possono presentare.

1.10.1 Caso di autovalori reali e distinti

Sia $A \in \mathbf{M}_n$ reale e supponiamo che essa ammetta n autovalori reali e distinti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Indichiamo con $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ i corrispondenti autovettori. Questi costituiscono una base dello spazio vettoriale $\mathbf{E}_n = \mathbf{R}^n$. La matrice:

$$P = [\mathbf{v}_1\, \mathbf{v}_2\, \ldots\, \mathbf{v}_n],$$

le cui colonne sono gli autovettori di A è non singolare. Ponendo:

$$\mathbf{x} = P^{-1}\mathbf{y}, \tag{1.70}$$

dove $\mathbf{y}(t)$ è soluzione del problema di Cauchy (1.61) abbiamo:

$$\mathbf{x}' = P^{-1}\mathbf{y}' = P^{-1}A\mathbf{y} = P^{-1}AP\mathbf{x} = \Lambda\mathbf{x}, \tag{1.71}$$

dove:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = P^{-1}AP,$$

è l'espressione della matrice A nella base dei suoi autovettori. Considerato ora il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \Lambda\mathbf{x}, \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \tag{1.72}$$

abbiamo che la sua soluzione si scrive:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\Lambda t}\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}\mathbf{x}_0, \tag{1.73}$$

e quindi, tenendo conto della (1.70) e del Teorema 1.23, la soluzione di (1.61) si scrive:

$$\mathbf{y}(t) = P\mathbf{x}(t) = Pe^{\Lambda t}\mathbf{x}_0 = Pe^{\Lambda t}P^{-1}\mathbf{y}_0 = e^{At}\mathbf{y}_0. \tag{1.74}$$

1.10.2 Caso di autovalori complessi

Sia A una matrice reale $n \times n$, sia λ un suo autovalore complesso e sia $\mathbf{v}$ il corrispondente autovettore. Intanto, è chiaro che anche $\bar{\lambda}$ è autovalore di A e, siccome A è reale, $\bar{\mathbf{v}}$ è autovettore di A corrispondente all'autovalore $\bar{\lambda}$. Poniamo:

$$\lambda = a + ib, \qquad \mathbf{v} = \mathbf{u} + i\mathbf{w}. \tag{1.75}$$

Allora:

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} = (a+ib)(\mathbf{u}+i\mathbf{w}) = (a\mathbf{u} - b\mathbf{w}) + i(b\mathbf{u} + a\mathbf{w}). \tag{1.76}$$

Indichiamo ora con P la matrice $n \times 2$ le cui colonne sono rispettivamente la parte reale e quella immaginaria di $\mathbf{v}$:

$$P = [\mathbf{u}\ \mathbf{w}].$$

Si ha:

$$\begin{aligned}
AP = A[\mathbf{u}\ \mathbf{w}] = [A\mathbf{u}\ A\mathbf{w}] &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \\ \vdots & \vdots \\ u_n & w_n \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}u_1 + \ldots + a_{1n}u_n & a_{11}w_1 + \ldots + a_{1n}w_n \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}u_1 + \ldots + a_{nn}u_n & a_{n1}w_1 + \ldots + a_{nn}w_n \end{pmatrix} = \\
&= \left[\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \right] = \\
&= \begin{pmatrix} a\mathbf{u} & b\mathbf{u} \\ -b\mathbf{w} & a\mathbf{w} \end{pmatrix} = [\mathbf{u}\ \mathbf{w}] \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{1.77}$$

In generale, se A possiede k autovalori reali ed $n-k$ autovalori complessi, a cui corrispondono i $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ autovettori reali ed i $\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{u}_{k+1} + i\mathbf{w}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n = \mathbf{u}_n + i\mathbf{w}_n$ autovettori complessi, allora la matrice:

$$P = [\mathbf{v}_1 \, \ldots \mathbf{v}_k \, \mathbf{u}_{k+1} \, \mathbf{w}_{k+1} \ldots \mathbf{u}_n \, \mathbf{w}_n] \,, \tag{1.78}$$

è non singolare e:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & \vdots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & B_{k+1} & & 0 \\ \vdots & & \ldots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & & 0 & B_n \end{pmatrix}, \tag{1.79}$$

dove i B_j sono blocchi 2×2 del tipo:

$$B_j = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix}, \qquad j = k+1, \ldots, n.$$

Si osservi che le matrici:

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \lambda_i & \ldots & 0 \\ \vdots & \ldots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & & \ldots & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & B_j & \ldots & 0 \\ \vdots & \ldots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

commutano tra loro, per cui:

$$e^{At} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & e^{B_{k+1} t} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ldots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & & \ldots & e^{B_n t} \end{pmatrix} P^{-1}. \tag{1.80}$$

Infine, osservato che ciascuna delle matrici B_j si scrive:

$$B_j = a\mathbf{1} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = a\mathbf{1} + b\sigma,$$

e che:

$$\sigma^2 = \mathbf{1}, \; \sigma^3 = -\sigma, \; \sigma^4 = \mathbf{1}, \ldots$$

si ha:

$$
\begin{aligned}
e^{B_j t} &= e^{(a\mathbf{1}t + b\sigma t)} = e^{a\mathbf{1}t} e^{b\sigma t} = \\
&= e^{at}\mathbf{1} \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix} = \\
&= e^{at} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{1.81}
$$

1.10.3 Caso degli autovalori molteplici

Supponiamo che la matrice A ammetta un autovalore λ di molteplicità algebrica $m \leq n$ e sia $\mathbf{v}$ il corrispondente autovettore, cioè un vettore non nullo soluzione di:

$$
(A - \lambda\mathbf{1})\mathbf{v} = \mathbf{0}. \tag{1.82}
$$

In questo caso occorre considerare gli autovettori generalizzati associati all'autovalore molteplice λ, cioè i vettori non nulli soluzione di:

$$
(A - \lambda\mathbf{1})^m\mathbf{v} = \mathbf{0}. \tag{1.83}
$$

L'insieme delle soluzioni di (1.83), cioè lo spazio vettoriale $E = \ker[(A-\lambda\mathbf{1})^m]$, si dice autospazio generalizzato associato all'autovalore molteplice λ. Mostriamo che E è invariante rispetto ad A, cioè che se $\mathbf{v} \in E$, allora $A\mathbf{v} \in E$. Intanto, se $\mathbf{v} \in E$ osserviamo preliminarmente che:

$$
(A - \lambda\mathbf{1})^m A\mathbf{v} = (A - \lambda\mathbf{1})^m A\mathbf{v} - (A - \lambda\mathbf{1})^m \lambda\mathbf{v},
$$

poichè $(A - \lambda\mathbf{1})^m\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Quindi:

$$
(A - \lambda\mathbf{1})^m A\mathbf{v} = (A - \lambda\mathbf{1})^m (A - \lambda\mathbf{1})\mathbf{v} = (A - \lambda\mathbf{1})(A - \lambda\mathbf{1})^m\mathbf{v} = \mathbf{0},
$$

poichè ogni matrice commuta con sè stessa. Dunque, anche $A\mathbf{v} \in E$. È possibile poi dimostrare che se A possiede autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ di molteplicità algebriche $m_1, \ldots, m_k$, con $\sum_{i=1}^k m_i = n$, allora la somma diretta degli autospazi generalizzati E_i associati agli autovalori molteplici λ_i, $i = 1, \ldots, k$, coincide con l'intero spazio vettoriale E:

$$
\bigoplus_{i=1}^{k} E_i = E. \tag{1.84}
$$

Il risultato precedente consente di affermate che se A possiede autovalori λ_i, $i = 1, \ldots, n$, non necessariamente distinti, allora la matrice P le cui colonne sono gli autovettori generalizzati associati ai singoli autovalori[3]:

$$P = [\mathbf{v}_1\, \mathbf{v}_2\, \ldots\, \mathbf{v}_n],$$

è non singolare. Dunque, introdotta la matrice diagonale:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{1.85}$$

resta definita la matrice:

$$S = P\Lambda P^{-1} \tag{1.86}$$

semisemplice, cioè diagonalizzabile per mezzo di una trasformazione di similitudine. Dalla (1.86) segue che:

$$SP = P\Lambda, \tag{1.87}$$

cioè:

$$S\mathbf{v}_j = \lambda \mathbf{v}_j, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{1.88}$$

Mostriamo ora che la matrice di partenza A si ottiene come:

$$A = S + N, \tag{1.89}$$

dove N commuta con S ed è una matrice nilpotente di ordine non superiore alla più grande tra le molteplicità degli autovalori di A.
Poniamo:

$$N := A - S, \tag{1.90}$$

dove S è definita dalle (1.89), (1.86). Intanto:

$$[S, N] = [S, A - S] = [S, A].$$

Detto poi λ_j un autovalore di A e E_j il corrispondente autospazio generalizzato, se $\mathbf{v} \in E_j$ si ha:

$$[S, A]\mathbf{v} = SA\mathbf{v} - \lambda A\mathbf{v} = (S - \lambda_j \mathbf{1})A\mathbf{v} = 0, \tag{1.91}$$

visto che $A\mathbf{v} \in E_j$ poichè E_j è invariante rispetto ad A. Peraltro, stante la (1.84), un qualsiasi elemento $\mathbf{w}$ di E si scrive come combinazione lineare di autovettori generalizzati, per cui:

[3]Naturalmente, agli eventuali autovalori semplici si fanno corrispondere gli autovettori.

$$[S, A]\mathbf{w} = 0, \qquad \text{per ogni } \mathbf{w} \in E,$$

e quindi $[S, A] = [S, N] = 0$. Sia ora m la massima tra le molteplicità degli autovalori di A e sia $\mathbf{v} \in E_j$. Si ha:

$$\begin{aligned} & N^m\mathbf{v} = (A - S)^m\mathbf{v} = (A - S)^{m-1}(A\mathbf{v} - \lambda_j\mathbf{v}) = \\ & = (A - \lambda_j)(A - S)^{m-1}\mathbf{v} = \cdots = \\ & = (A - \lambda_j)^m\mathbf{v} = 0. \end{aligned}$$

In virtù della (1.84) la relazione precedente vale per ogni $\mathbf{w} \in E$ e quindi $N^m = 0$.

Capitolo 2

Stabilità: concetti, proprietà ed applicazioni

2.1 Definizioni fondamentali

Consideriamo l'equazione differenziale vettoriale:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \tag{2.1}$$

ed il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \tag{2.2}$$

relativo al dato iniziale $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Nel seguito supporremo sempre che $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ sia tale da soddisfare il teorema di esistenza ed unicitá globali e, per semplicitá di esposizione, che la soluzione $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ di (2.2) sia definita per ogni $t \in (-\infty, +\infty)$. Dal punto di vista modellistico, $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ rappresenta l'evoluzione del sistema descritto dalla (2.1) a partire dallo stato iniziale $\mathbf{x}_0$. Poiché in pratica é possibile assegnare tale stato soltanto a meno di un certo grado di indeterminatezza, affinché l'evoluzione $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ risulti effettivamente osservabile é necessario che, se il dato iniziale *vero* é prossimo ad $\mathbf{x}_0$, la corrispondente soluzione si mantenga prossima alla $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ per ogni $t > t_0$. Tale concetto è reso esplicito dalla seguente

Definizione 2.1. ***(Liapunov)*** *La soluzione $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ del problema di Cauchy (2.2) si dice stabile (secondo Liapunov) se, detta $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0^*)$ la soluzione del problema di Cauchy corrispondente alla (2.1) relativo al dato $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0^*$, avviene che:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(t_0, \varepsilon) > 0 \ : |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0^*| < \delta \Rightarrow |\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0^*)| < \varepsilon \quad \forall t > t_0.$$

Se il δ che appare nella Definizione 2.1 é indipendente dall'istante iniziale t_0, si parla di stabilitá uniforme. Nel seguito identificheremo sempre la stabilitá con la stabilitá uniforme, in quanto le applicazioni che andremo a considerare riguarderanno quasi esclusivamente equazioni autonome, per le quali vale la proprietá di invarianza della soluzione rispetto al dato iniziale temporale.

Definizione 2.2. *Si dice punto di equilibrio della (2.1) ogni soluzione dell'equazione:*

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Analogamente a quanto fatto per una qualsiasi soluzione , é possibile definire la stabilitá di un punto di equilibrio. In realtá, é sufficiente definire la stabilitá della soluzione identicamente nulla $\mathbf{x}(\mathrm{t})=\mathbf{0}$. Infatti, laddove la (2.1) ammettesse un punto di equilibrio nella posizione, diciamo, $\bar{\mathbf{y}}$, sarebbe sempre possibile, con una opportuna trasformazione di coordinate, ricondurci ad un'altra equazione differenziale nelle nuove variabili che ammetta l'origine come punto di equilibrio. Per questo motivo, nel seguito supporremo sempre che si abbia $\mathbf{f}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\forall t$.

Definizione 2.3. *L'origine é un punto di equilibrio stabile della (2.1) se avviene che*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; : |\mathbf{x}_0| < \delta \Rightarrow |\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)| < \varepsilon \quad \forall t > t_0.$$

Nella precedente definizione, $\mathbf{x}_0$ rappresenta la perturbazione iniziale dell'equilibrio ed $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ l'evoluzione nel tempo di detta perturbazione iniziale. Dunque, l'origine é un punto di equilibrio stabile se ogni perturbazione iniziale *piccola* si mantiene *piccola* per ogni tempo successivo. Dal punto di vista geometrico, l'origine é un punto di equilibrio stabile nello spazio delle fasi della (2.1) se, scelto comunque $\varepsilon > 0$, é possibile determinare $\delta > 0$ tale che da ogni dato $\mathbf{x}_0$ interno alla sfera $B_\delta(\mathbf{0})$ di centro l'origine e raggio δ si origina un orbita $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ che permane interna alla sfera $B_\varepsilon(\mathbf{0})$ per ogni $t > 0$.

Definizione 2.4. *L'origine é un punto di equilibrio attrattivo della (2.1) se*

$$\forall t_0 \; \exists \eta(t_0) > 0 : \; |\mathbf{x}_0| < \eta \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{0},$$

ovvero la soluzione $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ *converge all'origine* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *per* $t \to +\infty$.

Se nella Definizione precedente η é indipendente da t_0 si parla di attrattivitá uniforme dell'origine. Analogamente a quanto fatto a proposito della stabilitá, nel seguito identificheremo la attrattivitá con la attrattivitá uniforme. Dal punto di vista geometrico, l'origine é un punto di equilibrio attrattivo se é possibile determinare un $\eta > 0$ tale che, per ogni dato $\mathbf{x}_0 \in B_\eta(\mathbf{0})$ si ha $\omega(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.[1]

[1] $\omega(\mathbf{x}_0)$ é l'insieme limite superiore di $\mathbf{x}_0$, ovvero dell'orbita che si origina da $\mathbf{x}_0$.

Osservazione 2.1. *É assolutamente fondamentale tenere distinte le nozioni di attrattivitá e di stabilitá. In particolare, é necessario osservare che la attrattivitá non implica la stabilitá. A tale proposito, si consideri il sistema (Vinograd, 1957):*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{x_1^2(x_2 - x_1) + x_2^5}{(x_1 + x_2)[1 + (x_1 + x_2)^2]}, \\ \\ \dot{x}_2 = \dfrac{x_2^2(x_2 - 2x_1)}{(x_1 + x_2)[1 + (x_1 + x_2)^2]}, \end{cases} \tag{2.3}$$

se $x_1,\ x_2 \neq 0$, *e:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0, \\ \\ \dot{x}_2 = 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

se $x_1 = x_2 = 0$. *Tale sistema possiede un punto di equilibrio in* $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2) = \mathbf{0}$. *Per un'analisi dettagliata di tale sistema rimandiamo a Hahn (1967), pp.191-194. Basta comunque osservare il quadro delle orbite ottenuto mediante un software commerciale (vedi Figura 2.1) per convincersi che* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *è attrattivo (in realtà non uniformemente) ma non stabile.*

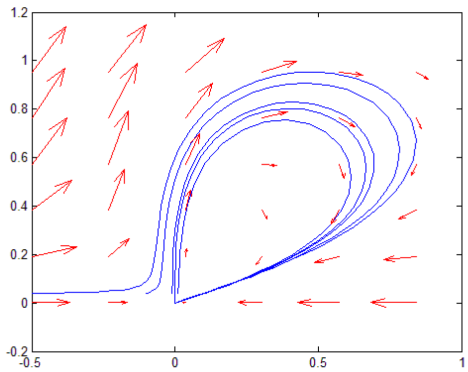

Figura 2.1: Quadro delle orbite per il sistema di Vinograd.

Definizione 2.5. *L'origine é un punto di equilibrio asintoticamente stabile della (2.1) se é stabile ed attrattiva.*

Definizione 2.6. *L'origine é un punto instabile della (2.1) se non é stabile, ovvero se*

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall \delta > 0, \ |\mathbf{x}_0| < \delta, \ \exists t^* > 0 : \ |\mathbf{x}(t^*; t_0, \mathbf{x}_0)| = \varepsilon.$$

2.2 Stabilitá per sistemi lineari

Consideriamo una equazione differenziale lineare:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}. \tag{2.5}$$

L'equazione é presa omogenea per modo che l'origine $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sia un punto di equilibrio della (2.5). Il problema di Cauchy associato alla (2.5) relativo al dato iniziale $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ ha soluzione:

$$\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) = Y(t)Y^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0, \tag{2.6}$$

essendo $Y(t)$ una matrice fondamentale della (2.5). Come detto ai Capitoli precedenti, la conoscenza di una matrice fondamentale comporta la conoscenza di tutte le informazioni relative ad una generica soluzione della (2.5); non deve quindi sorprendere che anche le proprietá di stabilitá delle soluzioni, in particolare delle soluzioni di equilibrio, della (2.5) siano collegate a proprietá della matrice fondamentale.

Teorema 2.1. *L'origine é un punto di equilibrio stabile della (2.5) se e soltanto se la matrice fondamentale $Y(t)$ é limitata.*[2]

Dimostrazione. La condizione é necessaria. Infatti, supponiamo che la soluzione $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ della (2.5) sia stabile, cioè che

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ tale che se } |\mathbf{x}_0| < \delta \text{ allora } |\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)| < \varepsilon, \text{ per ogni } t \geq t_0,$$

ovvero, riscalando la $\mathbf{x}$ come $\mathbf{x}/\delta$, che

$$\text{se } |\mathbf{x}_0| < 1 \text{ allora } |\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)| < \frac{\varepsilon}{\delta}, \text{ per ogni } t \geq t_0.$$

Quest'ultima relazione si può scrivere come

$$|\mathbf{x}_0| < 1 \;\Rightarrow\; \sup_{t \geq t_0} |\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)| = \frac{\varepsilon}{\delta},$$

vale a dire

$$\sup_{t \geq t_0} \sup_{|\mathbf{x}_0| \leq 1} |\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)| = \frac{\varepsilon}{\delta}.$$

Poniamo $\|Y^{-1}(t_0)\| = L$. Allora

[2] Una matrice $Y(t)$ si dice limitata se é possibile determinare un numero reale positivo k tale che

$$\|Y(t)\| \leq k \quad \forall t \in [t_0, +\infty)$$

In generale, k dipende da t_0.

$$||Y(t)Y^{-1}(t_0)|| = L||Y(t)|| = \sup_{|\mathbf{x}_0|=1} ||Y(t)Y^{-1}(t_o)\mathbf{x}_0|| \leq$$

$$\leq \sup_{|\mathbf{x}_0|\leq 1} ||Y(t)Y^{-1}(t_o)\mathbf{x}_0|| = \sup_{|\mathbf{x}_0|\leq 1} |\mathbf{x}(t;t_0,\mathbf{x}_0)| < \frac{\varepsilon}{\delta},$$

per ogni $t \geq t_0$. Dunque, $Y(t)$ è limitata.
La condizione é sufficiente. Infatti, supponendo che $Y(t)$ sia limitata e posto $\delta = \varepsilon/kL$, risulta

$$|\mathbf{x}(t;t_0,\mathbf{x}_0)| = \|Y(t)Y^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0\| \leq kl|\mathbf{x}_0| < \varepsilon.$$

L'asserto é cosi' dimostrato. □

Teorema 2.2. *L'origine é un punto di equilibrio asintoticamente stabile della (2.5) se e soltanto se*

$$\lim_{t\to+\infty} \|Y(t)\| = 0. \tag{2.7}$$

Dimostrazione. La prova della necessitá della condizione é banale. Per provarne la sufficienza, nell'ipotesi che valga la (2.7) esiste $k = k(t_0)$ tale che $\|Y(t)\| \leq k$ $\forall t \geq t_0$. Quindi, a norma del Teorema 2.1, segue la stabilitá. Inoltre, dalla (2.6), si ha che

$$\lim_{t\to+\infty} |\mathbf{x}(t;t_0,\mathbf{x}_0)| = 0,$$

e quindi l'attrattivitá dell'origine, che risulta dunque essere asintoticamente stabile. □

Particolarmente semplice risulta l'analisi della stabilitá nel caso in cui la (2.5) é autonoma. Infatti, in tal caso, una matrice fondamentale é data da

$$Y(t) = e^{\mathbf{A}t}. \tag{2.8}$$