Università degli studi di Ferrara
Dipartimento di Matematica
A.A. 2019/2020 – I semestre

STATISTICA MULTIVARIATA

SSD MAT/06

LEZION 2 - Vettori e matrici

Docente: Valentina MINI

valentina.mini@unife.it

RICEVIMENTO: su appuntamento previa mail

STRUTTURA DELLA LEZIONE

1. INTRODUZIONE E DEFINIZIONI
2. RIPRENDERE L'ALGEBRA MATRICIALE
3. RAPPRESENTAZIONE GRAFICA

4. LABORATORIO R

1- INTRODUZIONE E DEFINIZIONI.

IL LEGAME TRA ALGEBRA MATRICIALE E STATISTICA MULTIVARIATA

introduzione

- Molte delle tecniche che affronteremo nel corso si fondano su algebra matriciale
  - Es. PCA può essere descritta come scomposizione del valore singolo (scomposizione di autovalore e autovettore) della matrice di correlazione per un set di variabili.
  - ES. anche le stime dei coefficienti di un modello di regressione multipla sono spesso derivate ed espresse nel modo seguente:

$$\hat{b} = (X'X)^{-1}X'y$$

dove $\hat{b}$ è un vettore dei coefficienti del modello stimato

y è un vettore che contiene la variabile dipendente

X è una matrice che contiene le variabili indipendenti (e il termine costante)

OBIETTIVO CONOSCITIVO DI OGGI

riprendere alcuni fondamenti del funzionamento dell'algebra matriciale,

Ricondurli alla statistica multivariata e

Dare una interpretazione geometrica delle operazioni (

es. moltiplicazione di V e M)

Legame tra algebra matriciale e statistica multivariata: i dati

L'analisi statistica multivariata utilizza **dati** che contengono osservazioni su due o più caratteristiche (variabili) ognuna misurata su un **set di oggetti** (unità statistiche)

Ex1: voti dell'esame in 5 corsi (Fisica, Algebra, Metodi, Analisi, Statistica)
Ottenuti da 88 studenti
- 88 studenti: unità statistiche
- voti ottenuti in 5 corsi: variabili

Ex 2: 5 studenti di cui si rileva l'età in entrata all'università, il voto in algebra conseguito al termine del primo anno e il genere.

Fate un esempio !!!

Legame tra algebra matriciale e statistica multivariata: i dati

$$\left.\begin{array}{l} n \text{ unità statistiche} \\ \\ k \text{ variabili} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad nk \text{ informazioni}$$

Informazione disponibile$\rightarrow$ Dataset $\rightarrow$ $n \times k$ matrice

Esempio 2: matrice con 5 studenti dove X_1= età in anni all'entrata dell'università, X_2=voto (su 100) nell'esame di Algebra al termine del primo anno e X_3= genere(1=M; 0= F)

	Variables		
units	X_1	X_2	X_3
1	18	70	1
2	18	65	0
3	18	71	0
4	18	72	0
5	18	94	1

Legame tra algebra matriciale e statistica multivariata: i problemi multivariati

Alcuni esempi di **problemi multivariati**

Ex A: studiare come il voto in Statistica (variabile dipendente) è influenzato dai voti conseguiti in altre materie o da variabili personali come l'età e il genere (variabili esplicative
→ **Problema riconducibile alla regressione**

Ex B: studiare come combinare l'informazione sulla performance di studenti partendo da 5 voti per determinare la loro performance generale
→ **factor analysis, principal component analysis, composite indicator**

Ex C: studiare come raggruppare gli studenti con performance simile considerando tutto il set di voti → **cluster analysis**

Legame tra algebra matriciale e statistica multivariata: problemi multivariati

Per risolvere questi problemi è necessario disporre di un database che contenga :

-Diverse **unità** (dette anche casi o oggetti)

-Diverse **rilevazioni** per ogni unità, ovvero una serie di osservazioni delle caratteristiche di interesse per ogni unità (dette **variabili**)

La matrice $n \times k$ rappresenta il dataset con n unità statistiche e k variabili può essere rappresentata nel modo seguente:

$$
\begin{array}{l l}
 & \overbrace{\begin{array}{ccccc} \phantom{x_{11}} & & \phantom{x_{1v}} & & \phantom{x_{1k}} \end{array}}^{\text{Variabili}} \\
 & \begin{array}{ccccc} X_1 & \dots & X_v & \dots & X_k \end{array} \\
\text{Unità} & \\
\begin{array}{l} 1 \\ \dots \\ u \\ \dots \\ n \end{array} &
\left\{ \begin{array}{ccccc}
x_{11} & \dots & x_{1v} & \dots & x_{1k} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_{u1} & \dots & x_{uv} & \dots & x_{uk} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_{n1} & \dots & x_{nv} & \dots & x_{nk}
\end{array} \right.
\end{array}
$$

Tale matrice può essere identificata come $\mathbf{X}$ o (x_{uv})

$$
\mathbf{x}_u = \begin{pmatrix} x_{u1} \\ \dots \\ x_{uv} \\ \dots \\ x_{uk} \end{pmatrix}
\qquad\qquad
\mathbf{x}_{(v)} = \begin{pmatrix} x_{1v} \\ \dots \\ x_{uv} \\ \dots \\ x_{nv} \end{pmatrix}
$$

definizioni

- **VETTORI :** un vettore x di ordine (nx1) è un set ordinato di numeri reali (detti scalari) che possiamo scrivere come segue:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{bmatrix}$$

i valori scalari Xi sono i componenti o elementi del vettore.

Tale rappresentazione = "**vettore colonna**" composto da n righe e 1 colonna.

Un vettore di ordine (1 x m) è definito "**vettore riga**" ed è scritto come segue:

$$x' = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_m]$$

Dove: ' indica la **trasposizione.** Nel corso utilizzeremo questa scrittura (x = vettore colonna e x'= vettore riga)

definizioni

MATRICE: una matrice X di ordine (nxm) - dove un valore generale è x_{ij} – è una disposizione rettangolare di numeri reali organizzati in *n righe e m colonne*.

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{pmatrix}$$

I valori scalari x_{ij} sono definiti **elementi della matrice.**

Una matrice può essere pensata anche come

un **insieme di vettori colonna** o un **insieme di vettori riga.**

2 – RIPRENDERE L’ALGEBRA MATRICIALE

A m×n = matrice con m righe e n colonne

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 3 & 5 \\ 9 & 1 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad a_{23} = 1$$

3 righe e 4 colonne . If $m=n$ MTRICE QUADRATA

$$a_{ij}$$

i denotes the row

j denotes the column

UNA MATRICE CON DIMENSIONE $1 \times n$ è detta VETTORE RIGA:

$$\underset{1\times 5}{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

UNA MATRICE CON DIMENSIONE $m \times 1$ è detta VETTORE COLONNA, O VETTORE:

$$\underset{5\times 1}{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Un vettore unità è un VETTORE DI "UNI ":

$$\underset{5\times 1}{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Date le matrici ***A*** e ***B***, la loro somma è definita come ***C***=***A*** + ***B***, dove

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Ex:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 3 & 5 \\ 9 & 1 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 9 \\ 9 & 1 & 4 & 3 \\ 6 & 6 & 9 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 8 & 14 \\ 18 & 2 & 5 & 11 \\ 10 & 12 & 13 & 8 \end{pmatrix}$$

$$a_{23} = 1 \quad b_{23} = 4 \qquad\qquad c_{23} = 5$$

Il prodotto di una matrice A $m \times n$ e uno scalare(valore singolo) λ è **detta moltiplicazione scalare** e consiste in una matrice con LA STESSA DIMENSIONE DI ***A***, ottenuta moltiplicando ogni elemento di ***A*** per lo scalare λ

$$\boldsymbol{C} = \lambda \boldsymbol{A} \iff c_{ij} = \lambda a_{ij}$$

Ex:

$$\lambda = 2 \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 3 & 5 \\ 9 & 1 & 1 & 8 \\ 4 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$2\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 16 & 6 & 10 \\ 18 & 2 & 2 & 16 \\ 8 & 12 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Il prodotto tra due matrici A e B è possibile se il numero di colonne di A = numero di righe di B

Il singolo elemento risulterà: $c_{ij} = \mathbf{a}_i'\mathbf{b}_{(j)}$

ES:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ -1 & -2 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

… dove gli elementi della matrice risultante C sono uguali a:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} = 1\cdot 1 + 2\cdot 3 = 7 & c_{12} = 1\cdot 2 + 2\cdot 6 = 14 \\ c_{21} = -1\cdot 1 + 0\cdot 3 = -1 & c_{22} = -1\cdot 2 + 0\cdot 6 = -2 \\ c_{31} = 3\cdot 1 + 1\cdot 3 = 6 & c_{32} = 3\cdot 2 + 1\cdot 6 = 12 \end{pmatrix}$$

Si noti che :

$$\underset{(m\times n)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(n\times h)}{\mathbf{B}} = \underset{(m\times h)}{\mathbf{C}}$$

Quindi il prodotto tra un vettore riga e un vettore colonna

è uno scalare;

Il prodotto tra un vettore colonna e un vettore riga

è una matrice

$$\underset{1\times n}{\mathbf{a}} \cdot \underset{n\times 1}{\mathbf{b}} = \underset{1\times 1}{c} \qquad \underset{n\times 1}{\mathbf{b}} \cdot \underset{1\times n}{\mathbf{a}} = \underset{n\times n}{\mathbf{C}}$$

Ex:

$$\underset{1\times 2}{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \underset{2\times 1}{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}\times\mathbf{b} = 2\cdot 5 + 4\cdot 2 = 18$$

$$\underset{2\times 1}{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \underset{1\times 2}{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b}\times\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

La TRASPOSTA della matrice $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ è la matrice $\boldsymbol{A}'=(a_{ji})$ *DOVE LE RIGHE CORRISPONDNO ALLE COLONNE DI* $\boldsymbol{A}$:

Ex:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 2 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 6 & 8 & 5 \\ 4 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice quadrata calcolata su $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ è SIMMETRICA

se $a_{ij}= a_{ji}$ or in modo equivalente se $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}$.

Ex:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 6 & 8 & 9 \\ 4 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Una MATRICE NULLA è una matrice in cui tutti gli elementi sono uguali a 0.

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 \end{pmatrix}$$

Una MATRICE DIAGONALE è una matrice quadrata dovegli elementi non sulla diagonale principale sono uguali a 0.

$$diag(a_1, \cdots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & . & 0 \\ 0 & a_2 & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & a_n \end{pmatrix}$$

La matrice trasposta soddisfa le seguenti proprietà:

1. $(\boldsymbol{A}')'=\boldsymbol{A}$
2. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})'=\mathbf{A}'+\mathbf{B}'$
3. $(\boldsymbol{AB})'=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'$

La TRACCIA di $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ è la somma degli elementi nella diagonale principale di $\boldsymbol{A}$:

$$tr(\boldsymbol{A})=\Sigma_i\, a_{ii}$$

Ex:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 7 & 5 & 8 \\ 9 & 7 & 5 \end{pmatrix} \qquad tr(\mathbf{A})=2+5+5=12$$

Main diagonal

La traccia soddisfa le seguenti proprietà per

A *(m×m)*, ***B*** *(m×m)*, ***C*** *(m×n)*, ***D*** *(n×m)* e uno scalare λ:

1. tr(λ)= λ
2. tr(***A***)=tr(***A'***)
3. tr(***A+B***)=tr(***A***)+tr(***B***)
4. tr(***CD***)=tr(***DC***)=$\Sigma_{i,j}\, c_{ij}\, d_{ji}$
5. tr(***CC'***)=tr(***C'C***)=$\Sigma_{i,j}\, c_{ij}^2$

Data una matrice A *2×2*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Il DETERMINANATE di ***A*** è

$$\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \quad a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Data la matrice A $m \times m$

Il **DETERMINANTE di** ***A*** è

$$\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} A_{ij} \quad \text{for any } i,j$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

Il calcolo del determinante di 3^{rd} ordine (Sarrus rule):

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \left(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}\right)$$

Ex:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 3\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3(24-14) - 4(16-10) + 1(28-30) = 4$$

or alternatively:

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= 3\cdot 6\cdot 4 + 4\cdot 2\cdot 5 + 1\cdot 4\cdot 7 - (5\cdot 6\cdot 1 + 7\cdot 2\cdot 3 + 4\cdot 4\cdot 4) =$$

$$= 140 - 136 = 4$$

Proprietà del determinante:

1. If $\boldsymbol{A}=diag(a_1,\ldots,a_n)$ then $det(\boldsymbol{A})=a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = \Pi_i\, a_i$
2. $det(\lambda\boldsymbol{A})= |\lambda\boldsymbol{A}| = \lambda^n\, |\boldsymbol{A}|$
3. $det(\boldsymbol{AB})= |\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$
4. If $\boldsymbol{A}$ has two equal rows or two equal columns then $det(\boldsymbol{A})=0$
5. If $\boldsymbol{A}$ has a row of zeros or a column of zeros then $det(\boldsymbol{A})=0$
6. $det(\boldsymbol{A})=det(\boldsymbol{A}')$
7. If $\boldsymbol{B}$ is the matrix obtained by exchanging the position of two rows or two columns of $\boldsymbol{A}$, then $det(\boldsymbol{B})= - det(\boldsymbol{A})$
8. If $\boldsymbol{B}$ is the matrix obtained by summing to a row or a column of $\boldsymbol{A}$ a linear combination of the other rows or columns of $\boldsymbol{A}$ respectively then $det(\boldsymbol{B})=det(\boldsymbol{A})$
9. A square matrix $\boldsymbol{A}$ is **non-singular** if $\det(\boldsymbol{A})\neq 0$; otherwise $\boldsymbol{A}$ is singular

Ex:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}) = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 1 = 9 \qquad \det(\mathbf{B}) = 2 \cdot 3 - 5 \cdot 7 = -29$$

$$\det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}) = 9 \cdot (-29) = -261$$

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 7 & 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 + 6 \cdot 7 & 1 \cdot 5 + 6 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 19 \\ 44 & 23 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{AB}) = 25 \cdot 23 - 19 \cdot 44 = -261$$

Matrix algebra

L'inversa di una matrice quadrata $\boldsymbol{A}$ è la matrice $\boldsymbol{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

diag(1)= matrice identità

$$\mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

L'inversa $\boldsymbol{A}^{-1}$ se e solo se $\boldsymbol{A}$ det($\boldsymbol{A}$)≠0.

La matrice IDENTITA' è una matrice diagonale dove tutti gli elementi sulla diagonale principale sono uguali a 1.

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 1 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proprietà di $\mathbf{I}$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{I} = \mathbf{I} \times \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

Una matrice quadrata $\boldsymbol{A}$ è **orthogonale se** $\boldsymbol{AA'} = \boldsymbol{I}$
Con le seguenti proprietà soddisfatte:

1. $\boldsymbol{A'} = \boldsymbol{A}^{-1}$
2. $\boldsymbol{A'A} = \boldsymbol{I}$
3. $|\boldsymbol{A}| = \pm 1$
4. $\boldsymbol{a}_i'\boldsymbol{a}_j = 0,\ i \neq j;\ \boldsymbol{a}_i'\boldsymbol{a}_i = 0, \forall\, i;\ \boldsymbol{a}_{(i)}'\boldsymbol{a}_{(j)} = 0,\ i \neq j;\ \boldsymbol{a}_{(i)}'\boldsymbol{a}_{(i)} = 0, \forall\, i;$

Ex:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^{-1} \text{ because } \boldsymbol{AA}' = \boldsymbol{I}$$

Il **rango di una matrice A** *n×k è* definito come il massimo numero di colonne (righe) linearmente indipendenti in ***A***.

Quelle seguenti sono le proprietà del rango di ***A***, identificato con *r(**A**)*:

1. *r(**A**)* è il rango di A.
2. 0≤ *r(**A**) ≤min(n,k)*
3. *r(**A**)=r(**A'**)*
4. *r(**A'A**)= r(**AA'**)= r(**A**)*
5. Se *n=k* quindi *r(**A**)=k* se e solo se A non è singolare

Ex:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 9 \end{pmatrix} \quad \det(\mathbf{A}) = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$$

Quindi r(***A***)=2

Se A è una matrice quadrata di ordine n, in alcuni problemi potremmo essere interessati al vettore x e allo scalare λ che soddisfano la seguente proprietà:

autovalore

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

autovettore

Quindi gli *n* ***autovalori di A*** $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono le *n* della equazione seguente

$$\left|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}\right| = \mathbf{0}$$

Proprietà degli autovalori di ***A***:

1. $|\boldsymbol{A}| = \Pi_i \lambda_i$
2. $tr(\boldsymbol{A}) = \Sigma_i \lambda_i$
3. *r(**A**)* equals the number of non-zero eigenvalues
4. The set of all eigenvectors for an eigenvalue λ_i is called the eigenspace of ***A*** for λ_i
5. Any symmetric $n \times n$ matrix ***A*** can be written as $\boldsymbol{A} = \Gamma \Lambda \Gamma' = \Sigma_i \lambda_i \gamma_{(i)} \gamma_{(i)}'$ where Λ is a diagonal matrix of eigenvalues of ***A*** and Γ is an orthogonal matrix whose columns are eigenvectors with $\gamma_{(i)}' \gamma_{(i)} = 1$

Ex:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

L'equazione caratteristica è:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 3 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Calcolando il determinante otteniamo:

$$(2-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1-\lambda & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\left[-1+\lambda^2-3\right] - 2 - 2\lambda + 9 - 2 - 3 + 3\lambda = (\lambda+2)(\lambda-1)(3-\lambda) = 0$$

La soluzione rappresenta i 3 autovalori di $\boldsymbol{A}$:

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = -2 \qquad \lambda_3 = 3$$

L'autovalore con massimo valore assoluto $\lambda_3 = 3$ è detto DOMINANTE

Esiste un numero finito di autovalori ***x*** che soddifano ***(A-3I)x= 0***

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3- RAPPRESENTAZIONE GRAFICA

Sistemi di coordinate: utilizzo

Utilizzo sistema coordinate: rappresentare dati multivariati (es. bivariati)

ES. Misure di altezza e peso di 20 donne (un sottocampione molto piccolo di una ricerca condotta in GB nel 1951 su 4'995 donne).

si usi: X_1 e X_2 per indicare rispettivamente le variabili altezza e peso (*si veda tabella 1 – colonne 2 e 3*)

L'altezza media nel nostro campione è 62.85 inches (media di X_1)

Il peso medio è 123.6 pounds (media di X_2)

Usiamo la notazione X_{d1} e X_{d2} per la deviazione di ogni variabile dalla propria media (*colonne 4 e 5*)

Siccome i dati sono misurati in unità non confrontabili (inches e pounds), ha senso standardizzare i dati - ovvero sottrarre la media e dividere per la deviazione standard (o scarto quadratico medio)

X_{s1} e X_{s2} indicano le variabili standardizzate di altezza e peso (*ultime due colonne della tabella*).

Sistemi di coordinate: utilizzo

Possiamo rappresentare i dati di un database:

- come vettori e
- Come matrici.

ES. possiamo creare due vettori colonna (indicati come X_{s1} e X_{s2}) che assumono i valori delle variabili (X_{s1} e X_{s2}).

Rappresentando tutti i punti nello stesso sistema di coordinate si può vedere la traccia delle osservazioni e la posizione di ogni punto rispetto agli altri: SCATTER PLOT (o diagramma a dispersione) dove ogni osservazione è rappresentata da un punto.

Riassunto di apprendimento

-Vettore: definizione, utilizzo in algebra e rappresentazione

-Matrice: definizione, operazioni algebriche (*con scomposizione, varianza e determinante*) e rappresentazione

-Spesso i dati multivariati sono organizzati in matrice

-I dati nella matrice possono essere rappresentati in sistema di coordinate su sistema Cartesiano.

-Le operazioni algebriche di vettori e matrici hanno una interpretazione geometrica; le trasformazioni possono essere utilizzate per migliorare l'interpretazione dei dai.

Letture di approfondimento consigliate

Lattin, Carroll, Green (2003)

Analyzing Multivariate data. Duxbury applied series.

Ch. 2

Per esercitarsi

Q01

Given the matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} 1/7 & -2/7 \\ 3/7 & 1/7 \end{pmatrix}$, and the vector $c = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix}$, what's the result of the product Ac?

$\begin{pmatrix} 17 \\ 19 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 19 & 17 \end{pmatrix}$	Impossible
(a)	(b)	(c)

Q02

What is the determinant of A?

a) 0.14.
b) 7.
c) 0.

Q03

Is c an eigenvector of B?

a) Yes.
b) No.
c) Yes, under some conditions.

Per esercitarsi

Q01

Given the matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, and the scalar λ= -2, what's the result of the product λB?

(a)	(b)	(c)
$\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 0 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$	Impossible

Q02

Given the same matrices of the previous question, and denoting with *A'* the transposition of *A*, what's the result of the product *A'B*?

(a)	(b)	(c)
$\begin{pmatrix} 7 & 23 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 13 & 2 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	Impossible

Q03

Given the same matrices of the previous question, what's the result of A+λB?

(a)	(b)	(c)
$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 9 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$	Impossible