

Appunti di  
ANALISI MATEMATICA II  
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Umberto Massari

Anno accademico 2017-2018

## 1 SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI

### 1.1 Successioni di funzioni: convergenza puntuale ed uniforme

**Definizione 1.1** *convergenza puntuale*

Sia  $f_n : A \rightarrow \mathcal{R}$  (dove  $A \subset \mathcal{R}$  e  $n \in \mathcal{N}$ ) una successione di funzioni e  $f : A \rightarrow \mathcal{R}$  una data funzione, diremo che la successione  $f_n$  **converge puntualmente** alla funzione  $f$  (nell'insieme  $A$ ) se  $\forall x \in A$  risulta:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

Usando la  $\varepsilon$ -definizione di limite, si ottiene che  $\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0$

$$\exists n_{x,\varepsilon} \text{ tale che } \forall n > n_{x,\varepsilon} \text{ risulta } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (1)$$

Da notare che nella definizione (1.1) di convergenza puntuale, l'indice  $n_{x,\varepsilon}$  oltre il quale vale la disuguaglianza richiesta, dipende sia da  $\varepsilon$  che dal punto  $x \in A$  in cui si calcolano le funzioni e può variare al variare di  $x \in A$  (pur mantenendo fisso  $\varepsilon$ ).

**Definizione 1.2** *Convergenza uniforme* Diremo invece che la successione  $f_n$  **converge uniformemente** alla funzione  $f$  sull'insieme  $A$ , se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \text{ tale che } \forall n > n_\varepsilon \text{ risulta } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A \quad (2)$$

Da notare che nella definizione (1.2) di convergenza uniforme, l'indice  $n_\varepsilon$  oltre il quale vale la disuguaglianza richiesta, dipende solo da  $\varepsilon$  ed è quindi lo stesso qualunque sia  $x \in A$ .

Dalla (2) deriva pure subito che la successione  $f_n$  converge uniformemente ad  $f$  su  $A$  se e solo se, posto

$$\alpha_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in A\} \quad (3)$$

risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0 \quad (4)$$

Ovviamente la convergenza uniforme implica la convergenza puntuale ( su di uno stesso insieme  $A$ ), mentre il viceversa in generale è falso: ossia la convergenza di una successione di funzioni può essere puntuale ma non uniforme.

Un esempio interessante è la seguente successione

$$f_n(x) = x^n \quad x \in A = (0, 1)$$

Per ogni  $x \in (0, 1)$  risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$$

e quindi la successione  $f_n$  converge puntualmente alla funzione identicamente nulla in  $(0, 1)$  ( che indichiamo con  $f$  ). Usando la  $\varepsilon$ -definizione di limite, otteniamo che se  $x \in (0, 1)$  e  $\varepsilon > 0$

$$|f_n(x) - f(x)| = x^n < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\log \varepsilon}{\log x} = n_{x, \varepsilon}$$

D'altra parte la convergenza di  $f_n$  ad  $f$  non è uniforme come si può notare o osservando che

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} n_{x, \varepsilon} = +\infty$$

oppure osservando che, in questo caso:

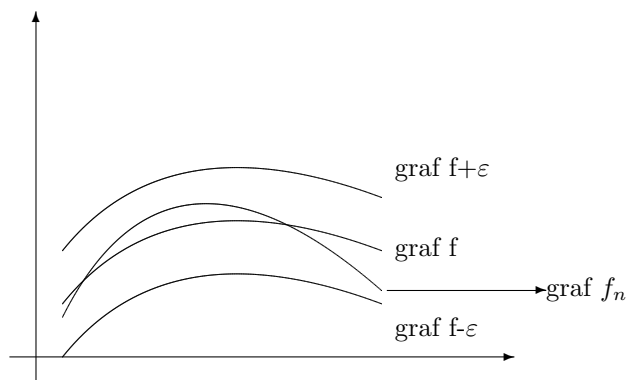
$$\alpha_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in (0, 1)\} = \sup\{x^n, x \in (0, 1)\} = 1 \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

e pertanto la richiesta (4) non è verificata.

Osserviamo infine che la definizione di convergenza uniforme può essere scritta anche nel seguente modo:  
 $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon$  tale che

$$\forall n > n_\varepsilon \text{ risulta } f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon \quad \forall x \in A.$$

In altre parole  $\forall n > n_\varepsilon$  il grafico della funzione  $f_n$  deve essere compreso tra i grafici delle funzioni  $f - \varepsilon$  e  $f + \varepsilon$ , come viene visualizzato dalla seguente figura:



Concludiamo il paragrafo con alcuni esempi.

1. Dire per quali valori di  $p \in \mathcal{R}$  converge uniformemente la successione:

$$f_n(x) = n^p x^n (1 - x^2), \quad x \in [0, 1]. \tag{5}$$

Risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

Per vedere se la convergenza di  $f_n$  a zero è uniforme, dobbiamo calcolare il valore massimo di  $|f_n - f(x)| = f_n(x)$ . Risulta

$$f'_n(x) = n^p [n x^{n-1}(1 - x^2) - 2 x x^n] = n^p x^{n-1}(n - (n+2)x^2)$$

La funzione  $f_n$  risulta pertanto crescente nell'intervallo  $[0, x_n]$ , dove

$$x_n = \sqrt{\frac{n}{n+2}}$$

Risulta quindi:

$$\alpha_n = \sup\{f_n(x), x \in [0, 1]\} = n^p \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n/2} \left(1 - \frac{n}{n+2}\right)$$

Pertanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \begin{cases} 0 & \text{se } p < 1 \\ 2/e & \text{se } p = 1 \\ +\infty & \text{se } p > 1 \end{cases}$$

Allora la convergenza di  $f_n$  a  $f$  è uniforme soltanto se  $p < 1$ .

2. Dire per quali valori di  $p \in \mathcal{R}$  converge uniformemente la successione di funzioni:

$$f_n(x) = n^p \sqrt{x} e^{-n^2 x^2}, \quad x \in \mathcal{R}, \quad x \geq 0 \quad (6)$$

Risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, \quad \forall p \in \mathcal{R}, \quad \forall x \geq 0$$

D'altra parte, risulta:

$$f'_n(x) = n^p \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 2n^2 x\sqrt{x}\right) e^{-n^2 x^2} = \frac{n^p}{2\sqrt{x}} (1 - 4n^2 x^2) e^{-n^2 x^2}$$

Risulta quindi che

$$f'_n(x) > 0 \iff 0 < x < \frac{1}{2n}$$

Ne possiamo concludere che

$$\alpha_n = \sup\{f_n(x), x \geq 0\} = f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = n^p \sqrt{\frac{1}{2n}} e^{-1/4}$$

In conclusione

$$\text{la convergenza di } f_n \text{ a zero è uniforme} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0 \iff p < \frac{1}{2}$$

3. Studiare la convergenza uniforme della successione:

$$f_n(x) = \sqrt{n^2 + nx + x^2} - n, \quad x \in \mathcal{R} \quad (7)$$

Razionalizzando, risulta:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx + x^2}{\sqrt{n^2 + nx + x^2} + n} = \frac{x}{2} = f(x), \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

D'altra parte, posto  $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$ , si ottiene:

$$g'_n(x) = \frac{n+2x}{2\sqrt{n^2 + nx + x^2}} - \frac{1}{2} = \frac{n+2x - \sqrt{n^2 + nx + x^2}}{2\sqrt{n^2 + nx + x^2}}$$

Ne deriva quindi che

$$g'_n(x) > 0 \Leftrightarrow n + 2x > \sqrt{n^2 + nx + x^2}$$

Deve quindi essere  $n + 2x \geq 0$  e  $n^2 + 4nx + 4x^2 > n^2 + nx + x^2$  ossia  $n + 2x \geq 0$  e  $x(x+n) > 0$ . La funzione  $g_n$  è dunque crescente in  $(0, +\infty)$ . Siccome

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g_n(x) = +\infty$$

ne segue che la convergenza di  $f_n$  ad  $f$  su tutto  $\mathcal{R}$  non è uniforme. D'altra parte se  $a > 0$ , allora

$$\alpha_n = \sup\{g_n(x), x \in [-a, a]\} = \max\{g_n(-a), g_n(a)\}$$

Pertanto la convergenza di  $f_n$  a  $f$  è uniforme in  $[-a, a]$ .

## 1.2 Alcuni teoremi sulla convergenza uniforme

Enunciamo ora alcuni importanti teoremi relativi alla convergenza uniforme.

### **Teorema 1.1** *Teorema sull'inversione dei limiti*

Siano  $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathcal{N}$  ed  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni assegnate ed  $x_0$  un punto di accumulazione di  $A$ . Supponiamo che:

i)  $f_n$  converge uniformemente ad  $f$  su  $A$ ,

ii)  $\forall n \in \mathcal{N}$  esiste il limite:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = L_n.$$

Allora:

a) esiste il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = L,$$

b) esiste il limite di  $f(x)$  per  $x \rightarrow x_0$  e risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

Da notare che la tesi può essere espressa in maniera più diretta scrivendo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) \quad (8)$$

ossia i due limiti per  $n \rightarrow \infty$  e per  $x \rightarrow x_0$  si possono scambiare.

**Dimostrazione.** Per provare la parte a) della tesi, proviamo che la successione  $\{L_n\}_{n \in \mathcal{N}}$  è una successione di Cauchy. Dalla definizione (2) di convergenza uniforme, risulta che:  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon$  tale che

$$\forall n > n_\varepsilon \quad \text{si ha} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A$$

Ne deriva quindi che se  $n, m > n_\varepsilon$ :

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < 2\varepsilon \quad \forall x \in A$$

Facendo ora tendere  $x \rightarrow x_0$ , nella relazione precedente, si ottiene:

$$|L_n - L_m| \leq 2\varepsilon$$

La successione  $\{L_n\}_{n \in \mathcal{N}}$  è quindi una successione di Cauchy e pertanto esiste il

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = L$$

Per provare la parte b) della tesi osserviamo che fissato  $\varepsilon > 0$ , possiamo scegliere  $m = m_\varepsilon \in \mathcal{N}$  tale che

$$|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A \quad (9)$$

$$|L_m - L| < \varepsilon \quad (10)$$

Siccome per l'ipotesi ii)  $f_m(x) \rightarrow L_m$  per  $x \rightarrow x_0$ , possiamo infine scegliere  $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ , tale che

$$|f_m(x) - L_m| < \varepsilon \quad \forall x \in A \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta \quad (11)$$

Dalle relazioni (9), (10) e (11), possiamo infine ottenere che se  $x \in A$  e  $0 < |x - x_0| < \delta$ :

$$|f(x) - L| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - L_m| + |L_m - L| < 3\varepsilon$$

e quindi vale la tesi b).

q.e.d.

### Corollario 1.1 Teorema sulla continuità del limite

Supponiamo che  $f_n : A \rightarrow R$ ,  $n \in \mathcal{N}$  ed  $f : A \rightarrow R$  siano funzioni tali che

- i)  $f_n$  converge uniformemente ad  $f$  su  $A$ ,
- ii)  $\forall n \in \mathcal{N}$  la funzione  $f_n$  è continua in  $A$ .

Allora anche la funzione limite  $f$  è continua in  $A$ .

Pertanto la convergenza uniforme preserva la proprietà delle funzioni di essere continue.

(Fare la dimostrazione per esercizio come corollario immediato del teorema 1.1.)

**Osservazione 1.1** Se la convergenza di  $f_n$  ad  $f$  non è uniforme, allora il teorema precedente e il suo corollario in generale non sono veri. Un esempio può essere la seguente successione:

$$f_n(x) = e^{-nx} \quad x \in A = [0, 1]$$

Infatti risulta:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (0, 1] \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e quindi  $f$  non è continua in  $x = 0$ . Da notare che risulta:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = 0$$

### Teorema 1.2 Teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale

Supponiamo che  $f_n : [a, b] \rightarrow R$  ed  $f : [a, b] \rightarrow R$  siano funzioni tali che

- i)  $f_n$  converge uniformemente ad  $f$  su  $[a, b]$ ,
- ii)  $f_n$  è continua in  $[a, b] \quad \forall n \in \mathcal{N}$ ;

Allora si ha che

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \quad (12)$$

Si possono quindi scambiare i due simboli di integrale e di limite, infatti la formula precedente può anche essere scritta nel modo

$$\int_a^b \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \quad .$$

La dimostrazione viene lasciata per esercizio.

**Osservazione 1.2** Osserviamo che se la convergenza di  $f_n$  ad  $f$  non è uniforme, il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale, in generale, non vale. Consideriamo infatti la successione

$$f_n(x) = n x e^{-n x^2} \quad x \in [0, 1]$$

Risulta che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

D'altra parte

$$f'_n(x) = n e^{-n x^2} (1 - 2 n x^2)$$

Pertanto la funzione assume il suo valore massimo nell'intervallo  $[0, 1]$ , nel punto  $x = \frac{1}{\sqrt{2n}}$  e risulta

$$\alpha_n = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \sqrt{\frac{n}{2}} e^{-1/2}$$

Ne deriva quindi che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = +\infty$$

La convergenza di  $f_n$  a  $f$  risulta quindi essere non uniforme. Notiamo infine che risulta

$$\int_0^1 f_n(x) dx = -\frac{e^{-n x^2}}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (1 - e^{-n})$$

ossia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2}$$

D'altra parte

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 0 dx = 0$$

Pertanto in questo caso non vale la (12).

Osserviamo infine che è possibile enunciare un teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale con ipotesi più deboli di quelle da noi considerate. Infatti l'ipotesi ii) può essere sostituita dall'ipotesi: ii')  $f_n$  è Riemann-integrabile su  $[a, b] \forall n \in \mathcal{N}$ . Allora si può provare che anche  $f$  è Riemann-integrabile e vale la (12).

( Riportiamo quì la dimostrazione di questo teorema più generale solo per completezza, ma non sarà richiesta all'esame).

Verifichiamo che la funzione limite  $f$  è Riemann-integrabile.

$\forall \varepsilon > 0$ , sia  $s = s_\varepsilon$  tale che  $|f_s(x) - f(x)| < \varepsilon \forall x \in [a, b]$ . Essendo la funzione  $f_s$  Riemann-integrabile, esiste una partizione  $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_N = b\}$  tale che

$$S(f_s, P) - s(f_s, P) < \varepsilon$$

dove

$$S(f_s, P) = \sum_{j=1}^N M_j^{(s)}(x_j - x_{j-1}), \quad s(f_s, P) = \sum_{j=1}^N m_j^{(s)}(x_j - x_{j-1})$$

con

$$M_j^{(s)} = \sup\{f_s(x), x \in [x_{j-1}, x_j]\}, \quad m_j^{(s)} = \inf\{f_s(x), x \in [x_{j-1}, x_j]\}$$

Ora  $\forall x \in [x_{j-1}, x_j]$

$$f(x) = f(x) - f_s(x) + f_s(x) \leq M_j^{(s)} + \varepsilon, \quad f(x) = f(x) - f_s(x) + f_s(x) \geq m_j^{(s)} - \varepsilon.$$

Pertanto  $M_j - m_j \leq M_j^{(s)} - m_j^{(s)} + 2\varepsilon$  e quindi:

$$S(f, P) - s(f, P) \leq S(f_s, P) - s(f_s, P) + 2\varepsilon(b-a) < \varepsilon(1 + 2(b-a))$$

Pertanto  $f$  è Riemann-integrabile in  $[a, b]$ .

### **Teorema 1.3** *Teorema di passaggio al limite per le derivate*

Supponiamo che  $f_n : [a, b] \rightarrow R$ ,  $f : [a, b] \rightarrow R$  e  $g : [a, b] \rightarrow R$  siano funzioni tali che

- i)  $f_n$  converge uniformemente ad  $f$  su  $[a, b]$ ,
- ii)  $f_n$  è derivabile in  $[a, b]$  con derivata prima continua in  $[a, b] \forall n \in \mathcal{N}$ ,
- iii)  $f'_n$  converge uniformemente ad  $g$  su  $[a, b]$

Allora la funzione  $f$  risulta derivabile in  $[a, b]$  e vale l'uguaglianza  $f'(x) = g(x) \forall x \in [a, b]$ .

Si possono quindi scambiare i simboli di limite e di derivata, infatti la relazione  $f'(x) = g(x)$  può anche essere scritta come

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n\right)'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \quad (13)$$

**Dimostrazione.** Usando la formula fondamentale del calcolo integrale, possiamo scrivere  $\forall x \in [a, b]$ :

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt \quad (14)$$

Passando al limite in (14) per  $n \rightarrow \infty$  e ricordando il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale, si ottiene:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt$$

Siccome la funzione  $g$  è continua in  $[a, b]$  essendo il limite uniforme di una successione di funzioni continue, dal teorema fondamentale del calcolo integrale si ricava che  $f'(x) = g(x) \forall x \in [a, b]$ . q.e.d.

Osserviamo che nel teorema precedente, si suppone, oltre alla convergenza uniforme di  $f_n$  a  $f$ , anche la convergenza uniforme di  $f'_n$  a  $g$ . Se questa seconda ipotesi non è verificata, il teorema in generale, non vale. Consideriamo ad esempio la successione

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \quad x \in [-1, 1]$$

Risulta  $\forall x \in [-1, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$$

Inoltre la convergenza è uniforme. Infatti, posto

$$h_n(x) = \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right|$$

otteniamo una funzione pari. Se  $x \geq 0$  si ha :

$$h_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - x$$

e quindi

$$h'_n(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} - 1 < 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

Pertanto il massimo valore della funzione  $h_n$  nell'intervallo  $[-1, 1]$  è assunto nel punto  $x = 0$  e quindi

$$\alpha_n = h_n(0) = \sqrt{\frac{1}{n}}$$

Allora  $f_n$  converge ad  $f$  uniformemente. Osserviamo ora che

$$f'_n(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} \quad \forall x \in [-1, 1]$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (0, 1] \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x \in [-1, 0) \end{cases}$$

Essendo  $f'_n$  continua nell'intervallo  $[-1, 1]$  e  $g$  discontinua nello stesso intervallo, per il teorema sulla continuità del limite, la convergenza di  $f'_n$  a  $g$  non può essere uniforme.

Il teorema non vale, in questo caso, in quanto la funzione limite  $f$  non è derivabile nel punto  $x_0 = 0$ .

Osserviamo infine che il teorema precedente sul passaggio al limite per le derivate può essere dimostrato senza l'ipotesi che le derivate prime  $f'_n$  siano continue. In particolare, vale il seguente teorema:

**Teorema 1.4 Teorema di passaggio al limite per le derivate più generale**

Supponiamo che  $f_n : [a, b] \rightarrow R$ ,  $f : [a, b] \rightarrow R$  e  $g : [a, b] \rightarrow R$  siano funzioni tali che

i) esiste il

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) \in \mathcal{R},$$

ii)  $\forall n \in \mathcal{N}$ ,  $f_n$  è derivabile in  $[a, b]$ ,

iii)  $f'_n$  converge uniformemente ad una funzione  $g$  su  $[a, b]$

Allora

a)  $f_n$  converge uniformemente in  $[a, b]$  ad una funzione  $f$ ,

b)  $f$  è derivabile in  $[a, b]$  e  $f'(x) = g(x) \forall x \in [a, b]$

**Dimostrazione.** (Dimostrazione inserita solo per completezza ma non richiesta per l'esame)



a) Verifichiamo che  $\forall x \in [a, b]$ ,  $\{f_n(x)\}_n$  è una successione di Cauchy. Infatti  $\forall \varepsilon > 0$ , sia  $n_\varepsilon \in \mathcal{R}$  tale che  $\forall n, m > n_\varepsilon$ :

$$|f'_n(x) - f'_m(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b], \quad |f_n(a) - f_m(a)| < \varepsilon$$

Allora:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= |f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f_m(a) + f_m(a) - f_m(x)| \leq \\ &\leq |f_n(a) - f_m(a)| + |(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(a) - f_m(a))| \end{aligned}$$

Pertanto, applicando il teorema di Lagrange alla funzione  $f_n - f_m$ , si ottiene che esiste un punto  $c \in [a, b]$  tale che:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(a) - f_m(a)| + |(f'_n(c) - f'_m(c))(b - a)| \leq \varepsilon + \varepsilon(b - a)$$

Da quest'ultima diseuguaglianza si ottiene pure che la convergenza di  $f_n$  al suo limite, che indichiamo con  $f$ , è uniforme.

b) Consideriamo infine un punto  $x_0 \in [a, b]$  e poniamo

$$\sigma_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}, \quad x \in A = [a, b] - \{x_0\}$$

La successione  $\sigma_n$  converge uniformemente in  $A$ , infatti se  $x \in A$ :

$$|\sigma_n(x) - \sigma_m(x)| = \left| \frac{f_n(x) - f_n(x_0) - f_m(x) + f_m(x_0)}{x - x_0} \right|$$

e quindi, sempre per il teorema di Lagrange, esiste un punto  $c$  tra  $x$  e  $x_0$  tale che  $|\sigma_n(x) - \sigma_m(x)| = |f'_n(c) - f'_m(c)|$ . Possiamo quindi concludere che  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists n_\varepsilon$  tale che  $\forall n, m > n_\varepsilon$ ,  $|\sigma_n(x) - \sigma_m(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A$ . Applicando infine il teorema sull'inversione dei limiti alle successione  $\sigma_n$ , si ottiene

$$\begin{aligned} g(x_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} \sigma_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \end{aligned}$$

q.e.d.

### 1.3 Serie di funzioni

Data una successione di funzioni  $f_n : A \rightarrow \mathcal{R}$ , possiamo definire la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{15}$$

considerando, come nel caso delle serie numeriche, la nuova successione (di funzioni):  $s_n : A \rightarrow \mathcal{R}$ , definita da:

$$s_n(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) \quad x \in A$$

La successione  $\{s_n\}_{n \in \mathcal{N}}$  viene chiamata **serie (di funzioni) o successione delle somme parziali** della serie (15).

Tutte le definizioni ed i teoremi, che avete visti per le serie numeriche, si possono estendere al caso di serie di funzioni ( basta pensare ad  $x \in A$  come ad un parametro fissato ).

In particolare, per esempio, diremo che:

- i) la serie (15) converge puntualmente in  $A$  se converge puntualmente in  $A$  la successione di funzioni  $s_n$ ,
- ii) la serie (15) converge uniformemente in  $A$  se converge uniformemente in  $A$  la successione di funzioni  $s_n$ ,
- iii) la serie (15) converge assolutamente in  $A$  se converge in  $A$  la serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$$

In particolare i teoremi visti nel paragrafo precedente per le successioni di funzioni si possono enunciare anche per le serie di funzioni. Abbiamo quindi:

a) **Continuità della somma** Supponiamo che  $f_n : A \rightarrow R$  ed  $s : A \rightarrow R$  siano funzioni tali che

- i)  $f_n$  è continua in  $A \forall n \in \mathcal{N}$  ;
- ii) la serie (15) converge uniformemente ad  $s$  su  $A$ .

Allora la funzione  $s$  è continua in  $A$ .

b) **Integrazione per serie** Supponiamo che  $f_n : [a, b] \rightarrow R$  ed  $s : [a, b] \rightarrow R$  siano funzioni tali che

- i)  $f_n$  è continua in  $[a, b] \forall n \in \mathcal{N}$  ;
- ii) la serie (15) converge uniformemente ad  $s$  su  $[a, b]$ .

Allora si ha che

$$\int_a^b s(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Ossia si possono scambiare i due simboli di integrale e di serie, infatti la formula precedente può anche essere scritta nel modo seguente

$$\int_a^b \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx \quad (16)$$

c) **Teorema di derivazione per serie** Supponiamo che  $f_n : [a, b] \rightarrow R$  ,  $s : [a, b] \rightarrow R$  e  $g : [a, b] \rightarrow R$  siano funzioni tali che

- i)  $f_n$  è derivabile in  $[a, b]$  con derivata prima continua in  $[a, b] \forall n \in \mathcal{N}$  ;
- ii) la serie (15) converge uniformemente ad  $s$  su  $[a, b]$  ;
- iii) la serie delle derivate  $f'_n$  converge uniformemente ad  $g$  su  $[a, b]$

Allora la funzione  $s$  risulta derivabile in  $[a, b]$  e vale l'uguaglianza  $s'(x) = g(x) \forall x \in [a, b]$ .

In altre parole si possono scambiare i simboli di serie e di derivata, infatti la relazione  $s'(x) = g(x)$  può anche essere scritta nel modo seguente:

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right)' (x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \quad (17)$$

Per le serie di funzioni si può definire un ulteriore tipo di convergenza che viene chiamata convergenza totale.

### Definizione 1.3 Definizione di convergenza totale

Diremo che la serie di funzioni (15) **converge totalmente** sull'insieme  $A$  se, indicato con

$$\beta_n = \sup\{|f_n(x)| ; x \in A\} \quad (18)$$

risulta convergente la serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$$

L'importanza della definizione precedente deriva dal seguente

**Teorema 1.5** *Se una serie di funzioni è totalmente convergente, allora è anche uniformemente convergente.*

**Dimostrazione.** Poniamo:

$$\sigma_n = \sum_{j=1}^n \beta_j \quad e \quad \sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$$

Risulta  $\forall x \in A$  e  $\forall n, m \in \mathcal{N}$ ,  $n < m$

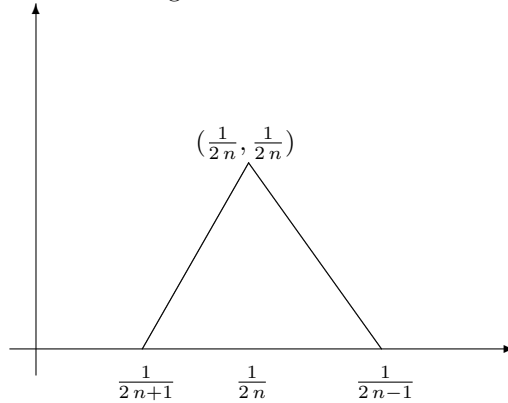
$$|s_n(x) - s_m(x)| = \left| \sum_{j=n+1}^m f_j(x) \right| \leq \sum_{j=n+1}^m \beta_j = \sigma_m - \sigma_n$$

Passando al limite per  $m \rightarrow \infty$  nella relazione precedente, si ottiene  $\forall x \in A$  e  $n \in \mathcal{N}$ :

$$|s_n(x) - s(x)| \leq \sigma - \sigma_n$$

Siccome  $\sigma_n \rightarrow \sigma$ ,  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon$  tale che  $\forall n > n_\varepsilon$   $|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon \forall x \in A$ . Pertanto la serie considerata converge uniformemente. q.e.d.

Notiamo che il viceversa del teorema precedente non vale; ossia una serie di funzioni può essere uniformemente convergente senza essere totalmente convergente. Un esempio è dato dalla successione  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathcal{R}$ ,  $n \in \mathcal{N}$  il cui grafico è indicato in figura:



Analiticamente risulta:

$$f_n(x) = (2n+1) \left( x - \frac{1}{2n+1} \right) \quad \text{se } x \in \left( \frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n} \right)$$

$$f_n(x) = -(2n-1) \left( x - \frac{1}{2n-1} \right) \quad \text{se } x \in \left( \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \right)$$

$$f_n(x) = 0 \quad \text{se } x \in [0, 1] - \left( \frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n-1} \right)$$

Posto

$$s_n(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x) \quad x \in [0, 1]$$

se  $n, m \in \mathcal{N}$ ,  $n < m$  si ha:

$$|s_n(x) - s_m(x)| = \left| \sum_{j=n+1}^m f_j(x) \right| \leq \frac{1}{2n+2}$$

Pertanto la successione  $s_n$  converge uniformemente alla funzione

$$s(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) \quad x \in [0, 1]$$

D'altra parte

$$\beta_n = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = \frac{1}{2n}$$

e quindi la serie considerata non converge totalmente.

Consideriamo, per concludere, alcuni esempi.

a) Studiare la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^4 + 3n^4} \quad x \in \mathcal{R}$$

Osservando che  $\forall x \neq 0$

$$\left| \frac{x}{x^4 + 3n^4} \right| = \frac{1}{n^4} \left| \frac{x}{3 + \frac{x^4}{n^4}} \right|$$

si ottiene, dal criterio del confronto, che la serie considerata converge assolutamente  $\forall x \in \mathcal{R}$ . D'altra parte

$$f'_n(x) = \frac{x^4 + 3n^4 - 4x^3}{(x^4 + 3n^4)^2} = \frac{3(n^2 + x^2)(n^2 - x^2)}{(x^4 + 3n^4)^2}$$

Pertanto  $f_n$  assume il suo valore massimo per  $x = n$  e risulta

$$\beta_n = f_n(n) = \frac{n}{n^4 + 3n^4} = \frac{1}{4n^3}$$

Allora la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$  è convergente e quindi la serie di funzioni considerata è totalmente convergente e quindi uniformemente convergente.

b) Studiare la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^n$$

La serie considerata è una serie geometrica di ragione

$$q = \frac{x+1}{x-1}$$

e quindi è convergente se e solo se  $|q| < 1$ , ossia se e solo se  $x \in (-\infty, 0)$ . Usando la formula:

$$\sum_{h=1}^n q^h = q \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

si ottiene che:

$$|s(x) - s_n(x)| = \frac{|q|^n}{1 - q}, \quad q = \frac{x+1}{x-1}$$

Pertanto

$$\sup\{|s(x) - s_n(x)|, x \in (-\infty, 0)\} = +\infty$$

e la convergenza della serie di funzioni é solo puntuale e non uniforme nella semiretta  $(-\infty, 0)$ . Da notare infine che se  $a < b < 0$ , allora

$$\sup \left\{ \left| \frac{x+1}{x-1} \right|, x \in [a, b] \right\} = k < 1$$

e quindi

$$|s(x) - s_n(x)| \leq \frac{k^n}{1-k}$$

Ne deriva che la convergenza della serie di funzioni considerata è totale e quindi uniforme nell'intervallo  $[a, b]$ .

## 1.4 Serie di potenze

Tra le serie di funzioni hanno particolare interesse le serie di potenze.

### Definizione 1.4 Serie di potenze

Una serie di funzioni si chiama una **serie di potenze** se la successione  $f_n$  é del tipo:

$$f_n(x) = a_n (x - x_0)^n$$

Il punto  $x_0$  è un punto fisso che viene chiamato il **punto iniziale** della serie di potenze e la successione di numeri reali  $\{a_n\}$  viene chiamata la **successione dei coefficienti** della serie di potenze.

Noi permetteremo inoltre che  $n$  possa assumere anche il valore  $n = 0$  in modo che il primo termine della serie sia la funzione costante

$$f_0(x) = a_0 (x - x_0)^0 = a_0$$

Pertanto una serie di potenze é una serie di funzioni del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{19}$$

Indicheremo con  $X$  l'insieme dei numeri reali  $x$  in cui la serie di potenze converge, ossia in simboli

$$X = \left\{ x \in \mathcal{R} ; \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ converge} \right\} \tag{20}$$

L'insieme  $X$  viene chiamato **insieme di convergenza** della serie (19). Da notare che risulta sempre  $X \neq \emptyset$  in quanto almeno  $x_0 \in X$ .

### Definizione 1.5 Raggio di convergenza

Il **raggio di convergenza** di una serie di potenze è definito come

$$r = \sup\{|x - x_0| ; x \in X\} \tag{21}$$

Da notare che può essere  $r = 0$  e allora la serie di potenze converge solo per  $x = x_0$  ossia  $X = \{x_0\}$ ; oppure può essere anche  $r = +\infty$  e allora l'insieme di convergenza  $X$  non é superiormente o inferiormente limitato.

Molto importante é il seguente:

### Teorema 1.6 Proprietà del raggio di convergenza

Sia

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

una serie di potenze ed  $r$  sia il suo raggio di convergenza. Allora :

i) se  $x \in \mathcal{R}$  e  $|x - x_0| < r$ , la serie di potenze converge assolutamente in  $x$ ,

ii) se  $x \in \mathcal{R}$  e  $|x - x_0| > r$ , la serie di potenze non converge in  $x$ ,

iii) se  $\rho \in \mathcal{R}$  é tale che  $0 < \rho < r$ , la serie di potenze converge totalmente nell'intervallo chiuso  $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$ .

**Dimostrazione.** Sia  $x \in \mathcal{R}$  con  $|x - x_0| < r$ . Dalla definizione (21) di raggio di convergenza e per la seconda proprietà caratteristica dell'estremo superiore, esiste  $y \in X$  con  $|x - x_0| < |y - x_0|$ . Siccome  $y \in X$ , la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (y - x_0)^n$$

converge. Pertanto si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n (y - x_0)^n = 0.$$

Possiamo quindi trovare un numero positivo  $k \in \mathcal{R}$  tale che

$$|a_n (y - x_0)^n| < k \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

Risulta allora:

$$|a_n (x - x_0)^n| = |a_n (y - x_0)^n| \left| \frac{x - x_0}{y - x_0} \right|^n \leq k q^n$$

dove abbiamo posto

$$q = \left| \frac{x - x_0}{y - x_0} \right|$$

Siccome  $q \in (0, 1)$ , per il criterio del confronto, si ottiene che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (x - x_0)^n|$$

è convergente. Abbiamo quindi provato la i). La ii) è immediata. Per ottenere la iii), osserviamo che posto  $x = x_0 + \rho$ , risulta  $|x - x_0| = \rho < r$  e quindi per la parte i) la serie di potenze converge assolutamente in  $x$  e quindi converge la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (x - x_0)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \rho^n$$

Basta infine osservare che

$$|a_n| \rho^n = \sup_{x \in [x_0 - \rho, x_0 + \rho]} |a_n (x - x_0)^n| = \beta_n$$

q.e.d.

Alcune importanti osservazioni sono le seguenti.

- a) L'intervallo  $(x_0 - r, x_0 + r)$  viene chiamato l'**intervallo di convergenza** della serie di potenze. La parte i) del teorema appena enunciato, afferma che la serie di potenze converge ( in verità converge assolutamente) se  $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ , mentre la parte ii) afferma che la serie di potenze non converge se  $x \notin [x_0 - r, x_0 + r]$ ;
- b) La parte iii) del teorema precedente afferma che la serie di potenze converge totalmente e quindi anche uniformemente in ogni intervallo chiuso del tipo  $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$ , qualunque sia  $\rho \in (0, r)$ ;
- c) Da notare anche che la serie di potenze, pur avendo la proprietà enunciata al punto iii) del teorema, può non convergere né uniformemente né totalmente in tutto l'intervallo (grande)  $(x_0 - r, x_0 + r)$ ;

- d) Da notare infine che gli estremi  $x_0 - r$  e  $x_0 + r$  dell'intervallo di convergenza sono esclusi sia dall'enunciato i) che dall'enunciato ii) del teorema precedente. Infatti, come vedremo in seguito con alcuni esempi, il comportamento di una serie di potenze in tali punti dipende dai singoli casi che si stanno considerando e può essere diverso in esempi diversi.

Uno strumento molto utile per calcolare il raggio di convergenza di una serie di potenze è il seguente:

**Teorema 1.7** *Calcolo del raggio di convergenza*

Sia

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

una serie di potenze. Supponiamo che esista uno dei seguenti due limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \quad (22)$$

oppure

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L \quad (23)$$

(dove  $L$  può essere un numero reale o anche  $+\infty$ ). Allora il raggio di convergenza della serie di potenza risulta essere uguale a :

$$r = \begin{cases} \frac{1}{L} & \text{se } L \in \mathcal{R}, L \neq 0 \\ +\infty & \text{se } L = 0 \\ 0 & \text{se } L = +\infty \end{cases} \quad (24)$$

**Dimostrazione.** Basta applicare il criterio della radice o del rapporto per le serie numeriche, pensando ad  $x$  come ad un parametro fissato diverso da  $x_0$ . q.e.d.

Consideriamo per concludere alcuni esempi.

1. Trovare l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

La serie di potenze considerata viene chiamata la **serie esponenziale** (vedremo in seguito perchè).

Risulta :

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

Pertanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$$

Allora  $r = +\infty$ , la serie di potenze converge assolutamente quindi  $\forall x \in \mathcal{R}$  e converge totalmente in ogni intervallo del tipo  $[-\rho, \rho]$  qualunque sia  $\rho > 0$ .

2. Trovare l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

In questo caso risulta:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n}{n+1}$$

Pertanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Allora il raggio di convergenza è  $r = 1$  e quindi la serie converge assolutamente per ogni  $x \in (-1, 1)$ . Ora se  $x = 1$ , la serie diventa  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  ed è quindi divergente, mentre se  $x = -1$ , la serie diventa  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  e quindi, per il criterio di Leibniz, è convergente. Concludendo l'insieme di convergenza della serie considerata è  $X = [-1, 1)$ .

3. Trovare l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

In questo caso risulta:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

Pertanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

Allora il raggio di convergenza è  $r = 1$  e quindi la serie converge assolutamente per ogni  $x \in (-1, 1)$ . Ora se  $x = 1$ , la serie diventa  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  ed è quindi convergente, mentre se  $x = -1$ , la serie diventa  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$  che risulta pure convergente (anche assolutamente). Concludendo l'insieme di convergenza della serie considerata è  $X = [-1, 1]$ .

4. Trovare l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{3^n + 1}$$

In questo caso risulta:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 2 \frac{3^n + 1}{3^{n+1} + 1}$$

Pertanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 1}{3^{n+1} + 1} = \frac{2}{3}$$

Allora il raggio di convergenza è  $r = \frac{3}{2}$  e quindi la serie converge assolutamente per ogni  $x \in (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ . Ora se  $x = \frac{3}{2}$ , la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n + 1}$$

ed è quindi divergente (perché il termine generale non tende a zero), mentre se  $x = -\frac{3}{2}$ , la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{3^n + 1}$$

che risulta non convergente (sempre perché il termine generale non tende a zero). Concludendo l'insieme di convergenza della serie considerata è  $X = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ .

5. Trovare l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1) \log(n+2)}$$

In questo caso risulta:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1) \log(n+2)}{(n+2) \log(n+3)}$$



Pertanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \log(n+2)}{(n+2) \log(n+3)} = 1$$

Allora il raggio di convergenza è  $r = 1$  e quindi la serie converge assolutamente per ogni  $x \in (-1, 1)$ . Ora se  $x = 1$ , la serie diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \log(n+2)}$$

ed è quindi divergente, mentre se  $x = -1$ , la serie diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) \log(n+2)}$$

che risulta convergente ( basta applicare il criterio di Leibnitz sulle serie a termini di segno alterno ). Concludendo l'insieme di convergenza della serie considerata è  $X = [-1, 1)$ .

## 1.5 Serie derivata e regolarità della somma di una serie di potenze

Data una serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

chiameremo **serie derivata** la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} \tag{25}$$

cioè la serie di potenze che si ottiene derivando termine a termine la serie di potenze iniziale. Vale il seguente teorema:

**Teorema 1.8** *Una serie di potenze e la sua serie derivata hanno lo stesso raggio di convergenza.*

**Dimostrazione.** Indichiamo rispettivamente con  $X$  e  $X'$  ed  $r$  ed  $r'$  gli insiemi di convergenza e i raggi di convergenza di una serie di potenze e della sua serie derivata e proviamo che deve essere sia  $r \leq r'$  sia  $r' \leq r$ .

**Primo passo**  $r \leq r'$ .

Se  $r = 0$  è ovvio che  $0 \leq r'$ . Se  $r > 0$ , sia  $x \in X - \{x_0\}$ . Verifichiamo che  $\forall y \in \mathcal{R}$  con  $0 < |y - x_0| < |x - x_0|$  risulta  $y \in X'$ . Infatti:

$$|n a_n (y - x_0)^{n-1}| = \frac{n}{|y - x_0|} |a_n (x - x_0)^n| \left| \frac{y - x_0}{x - x_0} \right|^n$$

Siccome  $x \in X$ , possiamo trovare  $k > 0$  tale che:

$$|a_n (x - x_0)^n| \leq k, \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

e quindi posto

$$q = \left| \frac{y - x_0}{x - x_0} \right|$$

risulta:

$$|n a_n (y - x_0)^{n-1}| \leq \frac{k}{|y - x_0|} n q^n$$

Essendo  $q \in (0, 1)$  la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} n q^n$  è convergente e quindi converge pure la serie di termine generale  $|n a_n (y - x_0)^{n-1}|$ . Ne deriva quindi, per definizione di raggio di convergenza che

$$|y - x_0| \leq r' \tag{26}$$

Siccome la (26) vale  $\forall y \in \mathcal{R}$  con  $|y - x_0| < |x - x_0|$ , si ottiene che vale pure  $|x - x_0| \leq r'$  e siccome  $x$  è un generico punto di  $X - \{x_0\}$ , si ricava che  $r \leq r'$ .

**Secondo passo**  $r' \leq r$ .

Se  $r' = 0$  è ovvio che  $0 \leq r$ . Se  $r' > 0$ , ragionando in maniera simile al passo primo, sia  $x \in X' - \{x_0\}$  e verifichiamo che  $\forall y \in \mathcal{R}$  con  $0 < |y - x_0| < |x - x_0|$  risulta  $y \in X$ . Infatti:

$$|a_n(y - x_0)^n| \leq n |a_n(x - x_0)^{n-1}| |y - x_0| \left| \frac{y - x_0}{x - x_0} \right|^{n-1} \leq k' |y - x_0| q^{n-1}$$

Essendo  $q \in (0, 1)$  la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$  è convergente e quindi converge pure la serie di termine generale  $|a_n(y - x_0)^n|$ . Ne deriva quindi, per definizione di raggio di convergenza che

$$|y - x_0| \leq r \quad (27)$$

Siccome la (27) vale  $\forall y \in \mathcal{R}$  con  $|y - x_0| < |x - x_0|$ , si ottiene che vale pure  $|x - x_0| \leq r$  e siccome  $x$  è un generico punto di  $X' - \{x_0\}$ , si ricava che  $r' \leq r$ . q.e.d.

Osserviamo ora che se una serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

ha un raggio di convergenza  $r$  positivo, possiamo definire la funzione somma ponendo  $\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

La funzione somma  $s$  risulta derivabile in ogni punto  $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ . Infatti, fissato un punto  $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$  e scelto  $\rho$  con  $|x - x_0| < \rho < r$ , in vista della convergenza totale nell'intervallo  $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$  sia della serie di potenze considerata che della sua serie derivata, applicando il teorema di derivazione per serie, si ottiene che la somma  $s$  è derivabile in  $x$  e vale

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

Da notare ora che questo ragionamento può essere ripetuto per ottenere le formule

$$s''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2}$$

$$s'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n (x - x_0)^{n-3}$$

e, in generale, per ogni naturale  $h$

$$s^{(h)}(x) = \sum_{n=h}^{\infty} n(n-1)(n-2)\dots(n-h+1) a_n (x - x_0)^{n-h}$$

Osserviamo infine che, se nella formula precedente, poniamo  $x = x_0$ , otteniamo

$$s^{(h)}(x_0) = h! a_h$$

Possiamo quindi concludere tutte queste osservazioni enunciando il seguente:

**Teorema 1.9** *Se*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

è una serie di potenze con raggio di convergenza  $r$  positivo, allora la funzione somma  $s : (x_0 - r, x_0 + r) \rightarrow \mathcal{R}$  ha derivata di ogni ordine e  $\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$  e  $\forall h \in \mathcal{N}$  vale la formula:

$$s^{(h)}(x) = \sum_{n=h}^{\infty} n(n-1)(n-2)\dots(n-h+1)a_n(x-x_0)^{n-h} \quad (28)$$

In particolare

$$s^{(h)}(x_0) = h! a_h \quad (29)$$

## 1.6 Polinomio di Taylor e serie di Taylor

In questo paragrafo cercheremo di dare una risposta alla seguente domanda:

Data una funzione  $f : (x_0 - r, x_0 + r) \rightarrow \mathcal{R}$ , esiste una serie di potenze tale che

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \quad ?$$

Ossia la funzione  $f$  si può sviluppare in serie di potenze ?

Dal teorema finale del paragrafo precedente, risulta che condizione necessaria affinché tale serie di potenze esista è che la funzione  $f$  abbia derivate di ogni ordine e che tra la funzione  $f$  ed i coefficienti  $\{a_n\}$  della serie di potenze valgano le relazioni

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

L'unica serie di potenze quindi che eventualmente risolve il problema ( di avere come somma la funzione  $f$  ) è la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Questa serie di potenze viene chiamata la **serie di Taylor** della funzione  $f$  e la somma finita corrispondente, ossia

$$s_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j$$

viene chiamata il **polinomio di Taylor di ordine  $n$**  della funzione  $f$ .

La differenza  $f(x) - s_n(x)$  viene chiamata **resto di Taylor** ed indicato col simbolo  $R_n(x, x_0)$ , ossia

$$R_n(x, x_0) = f(x) - s_n(x) = f(x) - \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j \quad (30)$$

Noi studieremo il comportamento del resto di Taylor sia per  $x \rightarrow x_0$  che per  $n \rightarrow \infty$ . In tale studio sarà utile il seguente teorema:

**Teorema 1.10** Sia  $f : (x_0 - r, x_0 + r) \rightarrow \mathcal{R}$  una data funzione. Allora:

i) se  $f$  è derivabile  $n$  volte nell'intervallo  $(x_0 - r, x_0 + r)$ , allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x, x_0)}{(x - x_0)^n} = 0 \quad (31)$$

ii) se  $f$  è derivabile  $n + 1$  volte nell'intervallo  $(x_0 - r, x_0 + r)$  e la derivata  $(n + 1)$ -esima è continua in  $(x_0 - r, x_0 + r)$ , allora il resto si può esprimere mediante il seguente integrale :

$$R_n(x, x_0) = \frac{(-1)^n}{n!} \int_{x_0}^x (t - x)^n f^{(n+1)}(t) dt \quad (32)$$

**Dimostrazione.** Dalla definizione (30), il resto è derivabile  $n$  volte in  $(x_0 - r, x_0 + r)$  e risulta per  $h \leq n$ :

$$R_n^{(h)}(x, x_0) = f^{(h)}(x) - \sum_{j=h}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} j(j-1) \dots (j-h+1)(x-x_0)^{j-h}$$

In particolare

$$R_n^{(h)}(x_0, x_0) = 0 \quad \forall h \in \mathcal{N}, \quad h \leq n$$

e

$$\begin{aligned} R_n^{(n-1)}(x, x_0) &= f^{(n-1)}(x) - \sum_{j=n-1}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} j(j-1) \dots (j-n+2)(x-x_0)^{j-n+1} = \\ &= f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x-x_0) \end{aligned}$$

Usando pertanto il teorema di De l'Hospital, si ottiene:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x, x_0)}{(x-x_0)^n} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n^{(n-1)}(x, x_0)}{n!(x-x_0)} = \\ &= \frac{1}{n!} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{(x-x_0)} - f^{(n)}(x_0) \right) = 0 \end{aligned}$$

Per ottenere la (32), ragioniamo per induzione su  $n$ .

Per  $n = 1$ , si ottiene, integrando per parti:

$$\begin{aligned} R_1(x, x_0) &= f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) dt - f'(x_0)(x-x_0) = \\ &= (t-x) f'(t) \Big|_{t=x_0}^{t=x} - \int_{x_0}^x (t-x) f''(t) dt - f'(x_0)(x-x_0) = - \int_{x_0}^x (t-x) f''(t) dt \end{aligned}$$

Supponiamo ora che la formula (32) sia vera per un certo valore di  $n$  e verifichiamola per  $n+1$ . Risultata:

$$R_{n+1}(x, x_0) = f(x) - \sum_{j=0}^{n+1} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x-x_0)^j = R_n(x, x_0) - \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

Usando infine l'ipotesi induttiva e una integrazione per parti, otteniamo:

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x, x_0) &= \frac{(-1)^n}{n!} \int_{x_0}^x (t-x)^n f^{(n+1)}(t) dt - \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} = \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \left( \frac{(t-x)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(t) \Big|_{t=x_0}^{t=x} - \frac{1}{n+1} \int_{x_0}^x (t-x)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt \right) - \\ &\quad - \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \int_{x_0}^x (t-x)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt \end{aligned}$$

q.e.d.

Dalla formula (32) deriva il seguente importante:

**Teorema 1.11 Condizione sufficiente di sviluppabilità in serie**

Supponiamo che la funzione  $f : (x_0 - r, x_0 + r) \rightarrow \mathcal{R}$  abbia derivate di ogni ordine e che esistano due numeri positivi  $M$  ed  $L$  tali

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq M L^n \quad \forall n \in \mathcal{N} \quad e \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \quad (33)$$

allora la funzione  $f$  risulta sviluppabile in serie di Taylor nell'intervallo  $(x_0 - r, x_0 + r)$  ossia

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$

**Dimostrazione.** Dalla (32) e dall'ipotesi (33), si ottiene:

$$|R_n(x, x_0)| \leq \frac{1}{(n+1)!} M L^{n+1} |x - x_0|^{n+1}$$

Ne segue quindi che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x, x_0) = 0 \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$

q.e.d.

Osserviamo che una funzione può essere derivabile infinite volte senza essere sviluppabile in serie di Taylor. Consideriamo infatti la funzione definita da  $f(0) = 0$  e

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{se } x \neq 0$$

Questa funzione è derivabile infinite volte e risulta:

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

Ne deriva quindi che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

mentre  $f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$ . Pertanto la funzione  $f$  non è la somma della sua serie di Taylor. Verifichiamo, ad esempio, che risulta  $f'(0) = f''(0) = 0$ . Infatti:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}$$

Ora, facendo la sostituzione  $\frac{1}{x} = y$ , si ottiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} y e^{-y^2} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^{y^2}} = 0$$

Analogamente si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0$$

e quindi  $f'(0) = 0$ . D'altra parte, se  $x \neq 0$ :

$$f'(x) = 2 \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$$

Ragionando come prima si ottiene pure

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4} = 0$$

Piú in generale, si può facilmente dimostrare, ragionando per induzione, che per ogni  $n \in \mathcal{N}$  risulta:

$$f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_{3n} \left( \frac{1}{x} \right) \quad \forall x \neq 0$$

dove  $P_{3n}(t)$  è un polinomio di grado  $3n$  in  $t$  e quindi la funzione  $f$  in zero ha derivata  $n$ -sima zero, qualunque sia  $n \in \mathcal{N}$ .

Concludiamo il paragrafo, scrivendo lo sviluppo in serie di Taylor di alcune funzioni elementari.

## 1.7 Alcuni sviluppi in serie di Taylor

1. **La serie geometrica**  $\forall x \in (-1, 1)$  abbiamo

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (34)$$

2. Dalla serie geometrica, con semplici varianti, si ottengono i seguenti sviluppi in serie, sempre validi se  $x \in (-1, 1)$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (35)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad (36)$$

3. Integrando per serie gli sviluppi (35) e (36) si ottengono i seguenti sviluppi in serie validi sempre per  $x \in (-1, 1)$  relativi alle funzioni logaritmo ed arcotangente:

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (37)$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (38)$$

4. **La serie esponenziale** Per ogni  $x \in R$  vale :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (39)$$

5. **Le funzioni trigonometriche** Risultano validi  $\forall x \in R$  i seguenti sviluppi in serie di Taylor :

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (40)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (41)$$

6. **Serie binomiale** Se  $x \in (-1, 1)$  e  $\alpha \in R$ , vale il seguente sviluppo in serie di Taylor :

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (42)$$

dove

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$$

Verifichiamo che vale lo sviluppo in serie (42), il meno immediato degli sviluppi in serie ottenuti sopra, che non si può ottenere dal teorema generale sugli sviluppi in serie in quanto le stime richieste sulle derivate successive della funzione  $f(x) = (1+x)^\alpha$  non valgono. Infatti:

$$f^{(h)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-h+1)(1+x)^{\alpha-h}$$

e quindi se  $h > \alpha$ .

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f^{(h)}(x) = +\infty$$

Osserviamo in primo luogo che la serie di potenze che sta a secondo membro della (42) ha raggio di convergenza  $r = 1$  (verificarlo per esercizio) e quindi, se poniamo:

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad x \in (-1, 1)$$

otteniamo una funzione derivabile infinite volte in  $(-1, 1)$ . Se indichiamo infine con

$$g(x) = (1+x)^{-\alpha} s(x) \quad x \in (-1, 1)$$

Risulta:

$$g'(x) = (1+x)^{-\alpha-1} [(1+x)s'(x) - \alpha s(x)]$$

D'altra parte, derivando per serie, si ottiene se  $x \in (-1, 1)$ :

$$(1+x)s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^n$$

e ponendo nelle due somme precedenti rispettivamente  $h = n - 1$  e  $h = n$  si ottiene:

$$(1+x)s'(x) = \binom{\alpha}{1} + \sum_{h=1}^{\infty} \left[ (h+1) \binom{\alpha}{h+1} + h \binom{\alpha}{h} \right] x^h$$

Osserviamo infine che:

$$\begin{aligned} (h+1) \binom{\alpha}{h+1} + h \binom{\alpha}{h} &= (h+1) \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-h)}{(h+1)!} + h \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-h+1)}{h!} = \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-h+1)}{h!} [\alpha - h + h] = \alpha \binom{\alpha}{h} \end{aligned}$$

Ne possiamo concludere che  $(1+x)s'(x) = \alpha s(x)$  e quindi  $g'(x) = 0 \quad \forall x \in (-1, 1)$ . Pertanto  $g(x) = g(0) = 1 \quad \forall x \in (-1, 1)$  e vale la (42).

## 1.8 Alcuni esercizi in cui si usa il Polinomio di Taylor

1. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \arctan x}$$

Usando la formula di Taylor, possiamo scrivere

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + R_3(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \bar{R}_3(x)$$

Si ottiene quindi

$$\frac{x - \sin x}{x - \arctan x} = \frac{\frac{x^3}{6} - R_3(x)}{\frac{x^3}{3} - \bar{R}_3(x)} = \frac{\frac{1}{6} - \frac{R_3(x)}{x^3}}{\frac{1}{3} - \frac{\bar{R}_3(x)}{x^3}}$$

e ricordando la prima proprietà del resto nella formula di Taylor, si ha che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \arctan x} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

2. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - \frac{\sin x}{x}}{1 - \cos x}$$

Ricordando le formule di Taylor

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + R_2(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \bar{R}_2(x)$$

si ottiene

$$\frac{e^x - x - \frac{\sin x}{x}}{1 - \cos x} = \frac{\frac{2}{3}x^2 + R_2(x) - \frac{R_3(x)}{x}}{\frac{x^2}{2} - \bar{R}_2(x)}$$

Pertanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - \frac{\sin x}{x}}{1 - \cos x} = \frac{4}{3}$$

3. Determinare  $a \in R$  ( se esiste ), tale che il seguente limite esista finito :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - (ax)^2} - \frac{\sin x}{x}}{x^4}$$

Usando la formula

$$(1 + y)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \hat{R}_2(y)$$

e la formula per il seno con un termine in piú, ossia

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + R_5(x)$$

si ottiene :

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - (ax)^2} - \frac{\sin x}{x} &= 1 - \frac{1}{2}a^2x^2 - \frac{1}{8}a^4x^4 + \hat{R}_2(a^2x^2) - 1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{5!} - \frac{R_5(x)}{x} = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - a^2 \right) x^2 - \left( \frac{1}{8}a^4 + \frac{1}{5!} \right) x^4 + \hat{R}_2(a^2x^2) + \frac{R_5(x)}{x} \end{aligned}$$

Deve quindi essere  $a^2 = \frac{1}{3}$ . In tal caso il limite risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - (ax)^2} - \frac{\sin x}{x}}{x^4} = - \left( \frac{1}{72} + \frac{1}{120} \right)$$

4. Trovare lo sviluppo in serie di Taylor della funzione  $f(x) = \arcsin x$   $x \in (-1, 1)$ . Osserviamo che risulta

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

e quindi dalla serie binomiale, ottengo

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n x^{2n}$$

Integrando per serie si ottiene infine

$$f(x) = \arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$



Da notare che se  $n \geq 1$  risulta:

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n = \frac{(-1)(-3)(-5)\dots(-2n+1)}{2^n n!} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n n!}$$

Vale pertanto la seguente formula di Taylor per la funzione arcoseno

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{20} x^5 + R_5(x)$$

## 1.9 Alcuni esercizi di ripasso

1. Studiare la convergenza uniforme della seguente successione di funzioni:

$$f_n(x) = n^2 x^n (1 - x^4) \quad x \in [0, 1]$$

Risulta :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

Per vedere se la convergenza a zero é uniforme, dobbiamo trovare il massimo valore di  $f_n$  in  $[0, 1]$ .

Risulta:

$$f'_n(x) = n^2 [n x^{n-1} (1 - x^4) - 4 x^n x^3] = n^2 x^{n-1} (n - (n+4)x^4)$$

Il punto di massimo é quindi  $x_n = \sqrt[4]{\frac{n}{n+4}}$  e il valore massimo di  $f_n$  é dato da

$$\alpha_n = f_n(x_n) = n^2 \left(\frac{n}{n+4}\right)^{n/4} \left(1 - \frac{n}{n+4}\right) = \left(1 + \frac{4}{n}\right)^{-n/4} \frac{4n^2}{n+4}$$

Ne deriva quindi che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = +\infty$$

Allora la convergenza di  $f_n$  a zero non é uniforme.

2. Studiare la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^2}{n^3 + x^3} \quad x \in [0, +\infty)$$

Usando il criterio del confronto, si ottiene se  $x > 0$

$$\frac{n x^2}{n^3 + x^3} = \frac{1}{n^2} \left( \frac{x^2}{1 + \frac{x^3}{n^3}} \right)$$

La serie si comporta quindi come la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

pertanto risulta convergente  $\forall x \in [0, +\infty)$ . Per verificare se la convergenza é totale, indichiamo con

$$f_n(x) = \frac{n x^2}{n^3 + x^3}$$

e osserviamo che:

$$f'_n(x) = \frac{2 n x (n^3 + x^3) - n x^2 \cdot 3 x^2}{(n^3 + x^3)^2} = \frac{2 n^4 x - n x^4}{(n^3 + x^3)^2} = \frac{n x (2 n^3 - x^3)}{(n^3 + x^3)^2}$$

Ne possiamo concludere che la funzione  $f_n$  assume il suo massimo valore nell'intervallo  $[0, +\infty)$  nel punto  $x = n \sqrt[3]{2}$  e tale valore massimo vale

$$f_n(n \sqrt[3]{2}) = \frac{n n^2 \sqrt[3]{4}}{n^3 + 2 n^3} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

Ne deriva quindi che la convergenza non é totale su  $[0, +\infty)$ . Notiamo però che se  $x \in [0, b]$  dove  $b$  é un qualunque numero positivo, allora se  $n$  é sufficientemente grande il modo che la funzione  $f_n$  sia crescente nell'intervallo  $[0, b]$  allora il valore massimo di  $f_n$  viene assunto in  $x = b$  e risulta

$$f_n(b) = \frac{n b^2}{n^3 + b^3}$$

e quindi la convergenza risulta totale ( e quindi uniforme ) su  $[0, b]$ .

3. Trovare l'insieme di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n \log(n+1)}$$

Essendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \frac{n}{n+1} \frac{\log(n+1)}{\log(n+2)} = 2$$

il raggio di convergenza della serie di potenze considerata é  $r = \frac{1}{2}$ . Inoltre se  $x = \frac{1}{2}$ , la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log(n+1)}$$

che risulta essere divergente. Infine se  $x = -\frac{1}{2}$  la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log(n+1)}$$

che risulta convergente per il criterio di convergenza per le serie a termini di segno alterno.

4. Trovare l'insieme di convergenza delle serie di potenze

$$\begin{aligned} i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \log(n+1)} \quad ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{n!} \\ iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + 5^n} \quad iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+1} \log(n+1)} \end{aligned}$$

In ogni caso, indichiamo con  $a_n$  i coefficienti delle serie di potenze che considereremo. Per la prima serie, risulta quindi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \log(n+1)}{2^{n+1} \log(n+2)} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+1)}{\log(n+2)} = \frac{1}{2}$$

il raggio di convergenza della serie i) é quindi  $r = 2$ . Inoltre se  $x = 2$ , la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)}$$

che diverge essendo

$$\frac{1}{\log(n+1)} > \frac{1}{n+1}$$

Infine se  $x = -2$  la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+1)}$$

che risulta convergente per il criterio di convergenza per le serie a termini di segno alterno. L'insieme di convergenza della serie i) é quindi  $[-2, 2)$ .

Per la seconda serie, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{(n+1)!} \frac{n!}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{(n+1)^2} = 0$$

Pertanto  $r = +\infty$  e la serie ii) converge  $\forall x \in \mathcal{R}$ .

Per la terza serie, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 5^n}{2^{n+1} + 5^{n+1}} = \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1}{\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} + 1} = \frac{1}{5}$$

Pertanto  $r = 5$ . Inoltre se  $x = 5$  e  $x = -5$  si ottengono rispettivamente le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^n + 5^n} \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n}{2^n + 5^n}$$

e nessuna di queste due serie converge perché il termine generale non tende a zero. L'insieme di convergenza della serie iii) é quindi  $(-5, 5)$ .

Infine per la quarta serie, risulta quindi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} \log(n+1)}{\sqrt{n+2} \log(n+2)} = 1$$

e il raggio di convergenza della serie iv) é quindi  $r = 1$ . Inoltre se  $x = 1$ , la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} \log(n+1)}$$

che diverge. Infine se  $x = -1$  la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1} \log(n+1)}$$

che risulta convergente per il criterio di convergenza per le serie a termini di segno alterno. L'insieme di convergenza della serie vi) é quindi  $[-1, 1)$ .

5. Calcolare i seguenti limiti:

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x(1 - \cos x)} \quad ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2) - \log^2(1+x)}{x^3}$$

Per calcolare il primo limite, usiamo i polinomi di Taylor:

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + R_3(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + R_2(x)$$

Si ottiene allora:

$$\frac{x - \tan x}{x(1 - \cos x)} = \frac{-\frac{1}{3}x^3 - R_3(x)}{x\left(\frac{x^2}{2} - R_2(x)\right)}$$

Pertanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x(1 - \cos x)} = -\frac{2}{3}$$

Per calcolare il secondo limite, usiamo il polinomio di Taylor:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + R_2(x)$$

Si ottiene allora:

$$\begin{aligned} \log(1+x^2) - \log^2(1+x) &= x^2 - \frac{x^4}{2} + R_2(x^2) - \left(x - \frac{x^2}{2} + R_2(x)\right)^2 = \\ &= x^2 - \frac{x^4}{2} + R_2(x^2) - \left(x^2 + \frac{x^4}{4} + R_2^2(x) - x^3 + 2xR_2(x) - x^2R_2(x)\right) = \\ &= x^3 - \frac{3}{4}x^4 + R_2(x^2) - R_2^2(x) - 2xR_2(x) + x^2R_2(x) \end{aligned}$$

Pertanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2) - \log^2(1+x)}{x^3} = 1$$

6. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine quattro della funzione

$$f(x) = e^{\sin x}$$

Risulta

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\sin x} \cos x, \quad f''(x) = e^{\sin x} (\cos^2 x - \sin x) \\ f'''(x) &= e^{\sin x} (\cos^3 x - \sin x \cos x - 2 \sin x \cos x - \cos x) = \\ &= e^{\sin x} (\cos^3 x - 3 \sin x \cos x - \cos x) \\ f^{(4)}(x) &= e^{\sin x} (\cos^4 x - 3 \sin x \cos^2 x - \cos^2 x - 3 \sin x \cos^2 x - 3 \cos^2 x + \\ &3 \sin^2 x + \sin x) = e^{\sin x} (\cos^4 x - 6 \sin x \cos^2 x - 4 \cos^2 x + 3 \sin^2 x + \sin x) \end{aligned}$$

Possiamo quindi scrivere

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + R_4(x)$$

7. Studiare il comportamento della successione di funzioni:

$$f_n(x) = \frac{nx^3}{x^4 + n^2}, \quad x \geq 0$$

Ovviamente la successione ha limite puntuale zero  $\forall x \geq 0$ . Per vedere se la convergenza a zero é uniforme, dobbiamo trovare il valore massimo di  $f_n$ . Si ottiene:

$$f'_n(x) = n \frac{3x^2(x^4 + n^2) - x^3 \cdot 4x^3}{(x^4 + n^2)^2} = n \frac{x^2(3n^2 - x^4)}{(x^4 + n^2)^2}$$

Pertanto il punto di massimo é  $x_n = \sqrt[4]{3} \sqrt{n}$ . Come valore massimo otteniamo allora

$$\alpha_n = \frac{n(3n^2)^{3/4}}{3n^2 + n^2} = \frac{(3)^{3/4}}{4} \sqrt{n}$$

Pertanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = +\infty$$

e la convergenza di  $f_n$  a zero non é uniforme.

## 1.10 Serie di Fourier

**Definizione 1.6** *Serie di Fourier* Viene chiamata serie di Fourier ( o serie trigonometrica ) una serie di funzioni del tipo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n x + b_n \sin n x)$$

Considereremo anche in questo caso, in analogia con quanto fatto per le serie di potenze, il problema della sviluppabilità in serie ( di Fourier ) di una data funzione, ossia il seguente problema: " Data una funzione  $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ , esiste una serie di Fourier tale che

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n x + b_n \sin n x) \quad \forall x \in \mathcal{R} \quad ? "$$

Osserviamo in primo luogo che, siccome le funzioni che intervengono nella definizione di serie di Fourier sono funzioni periodiche ( di periodo  $2\pi$ ), la funzione  $f$  deve essere anch'essa periodica di periodo  $2\pi$ , ossia

$$f(x) = f(x + 2\pi) \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

Notiamo che, anche per le serie di Fourier, esiste una relazione tra la funzione  $f$ , somma della serie, e i coefficienti  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  della serie di Fourier. Infatti supponiamo che valga l'uguaglianza

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n x + b_n \sin n x) \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

e che la serie di Fourier a secondo membro converga uniformemente in modo che sia possibile integrare per serie. Risulta allora integrando nell'intervallo  $(-\pi, \pi)$ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \pi a_0$$

(Abbiamo usato il fatto che

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos n x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin n x dx = 0 \quad \forall n \in \mathcal{N} )$$

Ossia

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

D'altra parte, se moltiplichiamo entrambi i membri della uguaglianza

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n x + b_n \sin n x)$$

per  $\cos h x$  (  $h \in \mathcal{N}$  numero fissato ) e integriamo per serie sull'intervallo  $(-\pi, \pi)$ , otteniamo :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos h x dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos h x dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos n x \cos h x dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin n x \cos h x dx \right) \end{aligned}$$

Usando ora la formula

$$\cos n x \cos h x = \frac{1}{2} [\cos (n + h) x + \cos (n - h) x]$$

si ottiene subito che:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos n x \cos h x dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq h \\ \pi & \text{se } n = h \end{cases} \quad (43)$$

Usando invece la formula:

$$\sin n x \cos h x = \frac{1}{2} [\sin (n+h) x + \sin (n-h) x]$$

si ottiene invece che

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin n x \cos h x dx = 0 \quad \forall n, h \in \mathcal{N} \quad (44)$$

Ne deriva quindi che:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos h x dx = \pi a_h$$

ossia

$$a_h = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos h x dx$$

Con un ragionamento simile, moltiplicando l'uguaglianza

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n x + b_n \sin n x)$$

per  $\sin h x$  e integrando per serie e ricordando che:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin n x \sin h x dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq h \\ \pi & \text{se } n = h \end{cases} \quad (45)$$

si ottiene

$$b_h = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin h x dx$$

Le due successioni  $\{a_h\}$  e  $\{b_h\}$  così ottenute, ossia:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (46)$$

$$a_h = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos h x dx \quad (47)$$

$$b_h = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin h x dx \quad (48)$$

vengono chiamati i **coefficienti di Fourier** della funzione  $f$ .

Ne deriva quindi che l'unica serie di Fourier che eventualmente ha la funzione  $f$  come somma è la serie di Fourier i cui coefficienti sono i coefficienti di Fourier di  $f$ . Tale serie viene chiamata la **serie di Fourier** della funzione  $f$ .

Per studiare il problema della sviluppabilità in serie di Fourier di una funzione periodica (di periodo  $2\pi$ ), avremo bisogno di alcuni risultati preliminari, che ora esporremo.

Cominciamo col seguente:

**Teorema 1.12 (Disuguaglianza di Bessel)** *Sia  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathcal{R}$  una funzione Riemann-integrabile nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$  e siano  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  i coefficienti di Fourier di  $f$ , allora vale la disuguaglianza, nota col nome di disuguaglianza di Bessel:*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \quad (49)$$

Una conseguenza importante della disuguaglianza di Bessel è che, essendo il secondo membro della (49) finito, ne deriva che la serie dei quadrati dei coefficienti di Fourier di  $f$  è convergente e quindi risulta che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \quad (50)$$

ossia, in modo esplicito,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos n x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin n x dx = 0 \quad (51)$$

**Dimostrazione.** Indichiamo con

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{h=1}^n a_h \cos h x + b_h \sin h x$$

e osserviamo che risulta

$$f^2(x) - 2f(x)s_n(x) + s_n^2(x) = (f(x) - s_n(x))^2 \geq 0$$

Integrando sull'intervallo  $[-\pi, \pi]$ , ottengo allora:

$$2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) s_n(x) dx - \int_{-\pi}^{\pi} s_n^2(x) dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

Osserviamo ora che:

$$f(x) s_n(x) = \frac{a_0}{2} f(x) + \sum_{h=1}^n [a_h f(x) \cos h x + b_h f(x) \sin h x]$$

e quindi

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) s_n(x) dx = \pi \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{h=1}^n (a_h^2 + b_h^2) \right)$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} s_n^2(x) &= \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{h=1}^n a_h \cos h x + b_h \sin h x \right) \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos k x + b_k \sin k x \right) = \\ &= \frac{a_0^2}{4} + a_0 \sum_{h=1}^n (a_h \cos h x + b_h \sin h x) + \\ &+ \sum_{h,k=1}^n (a_h \cos h x + b_h \sin h x) (a_k \cos k x + b_k \sin k x) \end{aligned}$$

e quindi integrando e ricordando le relazioni (43), (44) e (45), si ottiene:

$$\int_{-\pi}^{\pi} s_n^2(x) dx = \pi \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{h=1}^n (a_h^2 + b_h^2) \right)$$

Risulta quindi

$$\pi \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{h=1}^n (a_h^2 + b_h^2) \right) \leq \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

e la disuguaglianza di Bessel si ottiene per  $n$  tendente all'infinito.

q.e.d.

Avremo bisogno anche della seguente:

**Teorema 1.13 ( Identit  trigonometrica)**  $\forall x \in \mathcal{R}$  e  $\forall n \in \mathcal{N}$ , vale l'eguaglianza:

$$2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx\right) = \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right] \quad (52)$$

**Dimostrazione.** Ragioniamo per induzione su  $n \in \mathcal{N}$ , ricordando che  $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}$  vale:

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin(\alpha) \cos(\beta)$$

Se  $n = 1$  si ha:

$$\begin{aligned} 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \left(\frac{1}{2} + \cos x\right) &= \sin\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos x = \\ &= \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{3x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{3x}{2}\right) \end{aligned}$$

e quindi la (52) vale.

Supponiamo ora che l'identit  valga per un certo numero naturale  $n$ . Ottengo:

$$\begin{aligned} &2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n+1} \cos kx\right) = \\ &= 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx\right) + 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos(n+1)x = \\ &= \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right] + 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos(n+1)x = \\ &= \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right] + \sin\left[\left(n + 1 + \frac{1}{2}\right)x\right] - \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right] = \sin\left[\left(n + 1 + \frac{1}{2}\right)x\right] \end{aligned}$$

q.e.d.

Siamo ora in grado di enunciare il teorema di sviluppabilit  in serie di Fourier di una funzione periodica. Cominciamo col dare la definizione di funzione regolare a tratti nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ .

**Definizione 1.7 (Funzione regolare a tratti)** Diremo che una funzione  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathcal{R}$    **regolare a tratti** se esiste un numero finito di punti

$$a_0 = -\pi < a_1 < a_2 < \dots < a_n = \pi$$

tali che in ogni intervallo aperto  $(a_{i-1}, a_i)$   $i = 1, 2, \dots, n$  la funzione  $f$  ha derivata prima continua ed inoltre si suppone che esistano finiti i limiti

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a_i^+} f(x) = f(a_i+) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow a_i^+} f'(x) = f'(a_i+), \quad \forall i = 0, 1, \dots, n-1 \\ \lim_{x \rightarrow a_i^-} f(x) = f(a_i-) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow a_i^-} f(x) = f(a_i-), \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Vale il seguente:

**Teorema 1.14 Teorema di sviluppabilit  in serie di Fourier** Sia  $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  una funzione periodica di periodo  $2\pi$ . Supponiamo inoltre che  $f$  sia regolare a tratti nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$  ed indichiamo con

$$s(x) = \frac{1}{2} \left( \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x+h) + \lim_{h \rightarrow 0^-} f(x+h) \right) = \frac{1}{2} (f(x+) + f(x-)) \quad (53)$$

Allora



i) la serie di Fourier di  $f$  converge puntualmente  $\forall x \in \mathcal{R}$  e risulta

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (54)$$

ii) se  $f$  è continua, allora  $s(x) = f(x)$  e la convergenza della serie di Fourier a secondo membro di (54) è uniforme su tutto  $\mathcal{R}$ .

**Dimostrazione. Parte i)** Ricordando l'espressione analitica dei coefficienti di Fourier di una funzione (vedi (46), (47) e (48)), si ottiene:

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) \right] dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right] dt \end{aligned}$$

E, usando la sostituzione  $t - x = s$ , si ottiene:

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi+x} f(x+s) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ks \right] ds$$

Usiamo ora il seguente semplice risultato la cui verifica viene lasciata per esercizio: se  $g : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  è una funzione periodica e regolare a tratti in  $[-\pi, \pi]$ , allora  $\forall a \in \mathcal{R}$ :

$$\int_{-\pi+a}^{\pi+a} g(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt$$

ossia l'integrale di  $g$  è lo stesso su ogni intervallo di lunghezza  $2\pi$ . Posso scrivere pertanto:

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+s) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ks \right] ds$$

Osservando infine che:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ks \right] ds = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ks \right] ds = \frac{1}{2}$$

Ed usando l'identità trigonometrica, ottengo:

$$\begin{aligned} s_n(x) - s(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 [f(x+s) - f(x-)] \frac{\sin(n+1/2)s}{2 \sin(s/2)} ds + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+s) - f(x+)] \frac{\sin(n+1/2)s}{2 \sin(s/2)} ds \end{aligned}$$

Infine, se poniamo:

$$\begin{aligned} G(x, s) &= \frac{f(x+s) - f(x-)}{2 \sin(s/2)} \quad \text{se } s \in (-\pi, 0) \\ G(x, s) &= \frac{f(x+s) - f(x+)}{2 \sin(s/2)} \quad \text{se } s \in (0, \pi) \end{aligned}$$

possiamo esprimere la differenza  $s_n - s$  come:

$$\begin{aligned} s_n(x) - s(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(x, s) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) s ds = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(x, s) \cos\left(\frac{s}{2}\right) \sin ns ds + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(x, s) \sin\left(\frac{s}{2}\right) \cos ns ds = A_n + B_n \end{aligned}$$

Essendo  $f$  una funzione regolare a tratti, si ha che la funzione  $G(x, \cdot)$  é continua a tratti in  $(-\pi, \pi)$  e limitata. Infatti risulta, per esempio:

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} G(x, s) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(x+s) - f(x)}{2 \sin\left(\frac{s}{2}\right)} = \lim_{s \rightarrow 0^+} f'(x+s) = f'(x) \in \mathcal{R}$$

Possiamo in conclusione applicare la relazione (51) e ottenere:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) - s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n + B_n) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

**Parte ii)** Se  $f$  é continua, risulta  $s(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathcal{R}$ . Inoltre, indicando con  $\alpha_n, \beta_n$  rispettivamente i coefficienti di Fourier di  $f'$  e osservando che, essendo  $f$  continua, si può integrare per parti, si ottiene  $\forall n \in \mathcal{N} \quad n \geq 1$ :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin nx}{n} f(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx \right] = \\ &= -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx = -\frac{1}{n} \beta_n \end{aligned}$$

Analogamente si ottiene pure:

$$b_n = \frac{1}{n} \alpha_n \quad \forall n \in \mathcal{N} \quad n \geq 1$$

Possiamo quindi concludere, usando la disuguaglianza:

$$|ab| \leq \frac{1}{2} (a^2 + b^2)$$

valida  $\forall a, b \in \mathcal{R}$ , che

$$|a_n| + |b_n| = \frac{1}{n} (|\alpha_n| + |\beta_n|) \leq \frac{1}{2} \left( \alpha_n^2 + \beta_n^2 + \frac{2}{n^2} \right)$$

Per la disuguaglianza di Bessel, applicata alla funzione  $f'$ , possiamo pertanto concludere che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$$

é convergente e questo implica che la serie di Fourier di  $f$  é totalmente convergente e quindi anche uniformemente convergente. q.e.d.

## 1.11 Esempi di serie di Fourier

Negli esempi che consideremo in seguito, nella maggior parte dei casi, definiremo esplicitamente la funzione  $f$  solo nell'intervallo  $[-\pi, \pi)$  ed useremo la notazione  $f^\#$  per indicare l'estensione di  $f$  ottenuta per periodicit : ossia  $f^\# : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  é l'unica funzione definita su tutto  $\mathcal{R}$ , periodica di periodo  $2\pi$  tale che  $f^\#(x) = f(x) \quad \forall x \in [-\pi, \pi)$ .

Un'osservazione utile prima di considerare i casi numerici, é la seguente:

**Osservazione 1.3 Osservazione importante** Se  $f : [\pi, \pi] \rightarrow \mathcal{R}$  è una funzione dispari, cioè se  $f(-x) = -f(x)$ , allora  $a_0 = a_n = 0 \quad \forall n \geq 1$  e

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx$$

Verifichiamo per esempio la proprietà per  $a_n$  quando  $n \geq 1$ . Per la proprietà additiva dell'integrale, risulta:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 f(x) \cos nx \, dx + \int_0^\pi f(x) \cos nx \, dx \right)$$

Ora, usando la sostituzione  $x = -t$  nel primo integrale, si ottiene:

$$\int_{-\pi}^0 f(x) \cos nx \, dx = - \int_\pi^0 f(-t) \cos(-nt) \, dt = - \int_0^\pi f(t) \cos nt \, dt$$

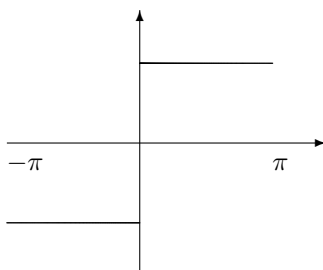
Analogamente si può verificare che se  $f$  è pari, ossia se  $f(x) = f(-x)$ , allora  $b_n = 0 \quad \forall n \geq 1$  e

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \, dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx \, dx$$

1. Sia

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (0, \pi) \\ 0 & \text{se } x = 0, -\pi, \pi \\ -1 & \text{se } x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$



La funzione considerata è dispari e quindi basta calcolare i coefficienti  $\{b_n\}$ . Risulta

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin nx \, dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \left( -\frac{\cos nx}{n} \Big|_0^\pi \right) = \frac{2}{\pi n} (1 - \cos n\pi) \end{aligned}$$

Essendo  $\cos n\pi = (-1)^n$ , si ottiene

$$b_n = \begin{cases} \frac{4}{\pi n} & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

Otteniamo quindi il seguente sviluppo in serie di Fourier

$$s(x) = \frac{f^\#(x+) + f^\#(x-)}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$$

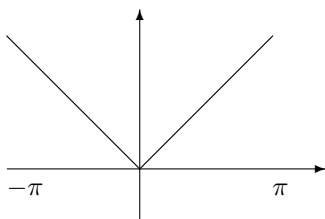
Da notare che dalla relazione precedente, per  $x = \frac{\pi}{2}$ , osservando che  $f(\frac{\pi}{2}) = 1$  e che

$$\sin \left[ (2n+1) \frac{\pi}{2} \right] = \sin n\pi \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \cos n\pi = (-1)^n$$

si ottiene

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

2. Sia  $f(x) = |x|$   $x \in [-\pi, \pi]$  In questo caso la funzione é pari, pertanto basta calcolare i coefficienti  $\{a_n\}$ .



Si ottiene :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \frac{\pi^2}{2} = \pi \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\sin nx}{n} x \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx dx \right] = -\frac{2}{n\pi} \left[ -\frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} \right] = -\frac{2}{n^2\pi} (1 - \cos n\pi) \end{aligned}$$

Ne segue quindi che

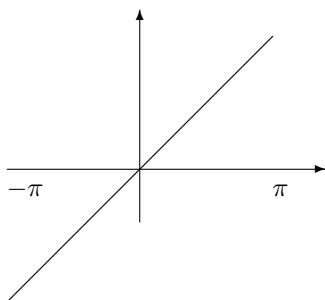
$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é pari} \\ -\frac{4}{n^2\pi} & \text{se } n \text{ é dispari} \end{cases}$$

Si ottiene quindi il seguente sviluppo

$$f^{\#}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

Da notare che la serie a secondo membro é totalmente convergente su tutto  $\mathcal{R}$  e quindi anche uniformemente convergente.

3. Sia  $f(x) = x$   $x \in [-\pi, \pi)$ .



La funzione é dispari e quindi

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx \, dx =$$

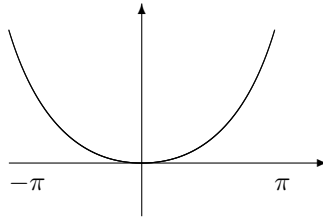
$$= \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{\cos nx}{n} x \Big|_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos nx \, dx \right] = \frac{2}{\pi} \left[ -\pi \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n} \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^\pi \right] = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}$$

Si ottiene quindi il seguente sviluppo in serie

$$s(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$$

Da notare che se  $x = \pi$ ,  $s(\pi) = 0$  mentre  $f(\pi) = \pi$ .

4. Sia  $f(x) = x^2$   $x \in [-\pi, \pi]$ .



Si ha

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \, dx = \frac{2}{\pi} \frac{\pi^3}{3} = \frac{2}{3} \pi^2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\sin nx}{n} x^2 \Big|_0^\pi - \frac{2}{n} \int_0^\pi x \sin nx \, dx \right] =$$

$$= -\frac{4}{n\pi} \left[ -\frac{\cos nx}{n} x \Big|_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos nx \, dx \right] = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

Lo sviluppo in serie é

$$f^\sharp(x) = \frac{1}{3} \pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

Osserviamo infine che per  $x = 0$ , otteniamo la formula

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

Concludiamo il paragrafo sulle serie di Fourier con le seguenti **osservazioni**:

i) Se  $f$  é una funzione periodica di periodo  $2\pi$  e regolare a tratti allora  $\forall a \in \mathcal{R}$ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \int_a^{a+2\pi} f(x) \, dx$$

Infatti dalla proprietà additiva dell'integrale, si ottiene:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^a f(x) dx + \int_a^{a+2\pi} f(x) dx + \int_{a+2\pi}^{\pi} f(x) dx$$

Ora facendo la sostituzione  $y = x - 2\pi$  nell'ultimo integrale, si ottiene:

$$\int_{a+2\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_a^{-\pi} f(y + 2\pi) dy = - \int_{-\pi}^a f(x) dx$$

- ii) Se  $f$  è una funzione periodica regolare a tratti, allora la serie di Fourier di  $f$  converge uniformemente in ogni intervallo  $[a, b]$  in cui  $f$  è continua.

Riportiamo qui la dimostrazione per completezza ( Non verrà esposta a lezione né chiesta all'esame)

Consideriamo in primo luogo la funzione considerata nell'esempio 3): cioè la funzione  $g^\sharp$  che prolunga con periodicità  $2\pi$  la funzione  $g(x) = x$ ,  $x \in [-\pi, \pi)$ . Abbiamo visto che risulta

$$g^\sharp(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \quad (55)$$

Verifichiamo ora che la convergenza della serie di Fourier (55) è uniforme in ogni intervallo del tipo  $[-a, a]$ , con  $a \in (0, \pi)$ . Infatti se  $m > n$ :

$$s_m(x) - s_n(x) = \sum_{k=n+1}^m \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx)$$

e, moltiplicando per  $\cos(x/2)$  ed usando la formula  $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$ , si ottiene:

$$[s_m(x) - s_n(x)] \cos(x/2) = \sum_{k=n+1}^m \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin[(k+1/2)x] + \sum_{k=n+1}^m \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin[(k-1/2)x]$$

Sostituendo infine  $h = k$  nella prima somma e  $h = k - 1$  nella seconda somma, si ottiene :

$$\begin{aligned} [s_m(x) - s_n(x)] \cos(x/2) &= \sum_{h=n+1}^m \frac{(-1)^{h+1}}{h} \sin[(h+1/2)x] + \sum_{h=n}^{m-1} \frac{(-1)^{h+2}}{h+1} \sin[(h+1/2)x] = \\ &= \frac{(-1)^{m+1}}{m} \sin[(m+1/2)x] + \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} \sin[(n+1/2)x] + \sum_{h=n+1}^{m-1} \frac{(-1)^{h+1}}{h(h+1)} \sin[(h+1/2)x] \end{aligned}$$

Ne deriva quindi che, se  $x \in [-a, a]$ , vale la stima:

$$\cos(a/2) |s_m(x) - s_n(x)| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n+1} + \sum_{h=n+1}^{m-1} \frac{1}{h(h+1)}$$

Ne deriva quindi che la serie (55) converge uniformemente in  $[-a, a]$ .

Osserviamo infine che se  $x_0 \in (-\pi, \pi)$ , la funzione  $g^\sharp(x + \pi - x_0)$  nel punto  $x_0$  ha un salto che è dato da:

$$\delta = \lim_{x \rightarrow x_0^+} g^\sharp(x + \pi - x_0) - \lim_{x \rightarrow x_0^-} g^\sharp(x + \pi - x_0) = -2\pi$$

Supponiamo infine, per semplicità che la funzione regolare a tratti che consideriamo sia discontinua solo nei punti del tipo  $x_0 + 2k\pi$ ,  $k \in \mathcal{Z}$ , con  $x_0 \in (-\pi, \pi)$  e che in  $x_0$  il suo salto sia  $\delta$ . Allora la funzione

$$F(x) = f(x) + \frac{\delta}{2\pi} g^\sharp(x + \pi - x_0)$$

é continua nel punto  $x_0$  (verificarlo per esercizio). Pertanto la serie di Fourier di  $F$  converge uniformemente su tutto  $\mathcal{R}$  e quindi la serie di Fourier di  $f$  converge uniformemente in ogni intervallo in cui converge uniformemente la serie di Fourier di  $g^\sharp(x + \pi - x_0)$ .

ii) Supponiamo che  $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  sia una funzione regolare a tratti ma periodica di periodo  $T$ , ossia che  $f(x) = f(x + T) \forall x \in \mathcal{R}$ . Allora la funzione:

$$g(x) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$$

é regolare a tratti e periodica di periodo  $2\pi$ , infatti:

$$g(x + 2\pi) = f\left(\frac{T}{2\pi}(x + 2\pi)\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}x + T\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right) = g(x)$$

Pertanto  $g$  si sviluppa in serie di Fourier. Da notare che, usando la sostituzione:

$$s = \frac{T}{2\pi}x$$

si ottiene:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right) dx = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(s) ds$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos nx dx = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(s) \cos\left(n \frac{2\pi}{T}s\right) ds$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin nx dx = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(s) \sin\left(n \frac{2\pi}{T}s\right) ds$$

Otteniamo pertanto per la  $f$  il seguente sviluppo in serie di Fourier:

$$\frac{f(s+) + f(s-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n s}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n s}{T}\right)$$

## 1.12 Alcuni esercizi di ripasso

1. Trovare la somma della serie di potenze:

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$$

Come si può verificare facilmente, la serie considerata ha raggio di convergenza  $r = 1$  e quindi la funzione  $s$  é definita nell'intervallo  $(-1, 1)$ . Moltiplicando per  $x$  e derivando, si ottiene:

$$\begin{aligned} (x s(x))' &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^{n+1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \\ &= x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = x \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

Ne deriva quindi che:

$$x s(x) = \int_0^x \frac{t}{(1-t)^2} dt$$

Infine scomponendo

$$\frac{t}{(1-t)^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{(1-t)^2}$$

si ricava  $A = -1$ ,  $B = 1$ , possiamo concludere quindi che

$$x s(x) = \log(1-x) + \frac{1}{1-x} - 1$$

e quindi se  $x \in (-1, 1) - \{0\}$ :

$$s(x) = \frac{\log(1-x)}{x} + \frac{1}{1-x}.$$

2. Studiare il comportamento della serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{2n} e^{-n|x|}, \quad x \in \mathcal{R}$$

Usando il criterio del rapporto, supponendo  $x \neq 0$ , otteniamo:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)x^{2n+2}e^{-(n+1)|x|}}{n x^{2n} e^{-(n)|x|}} = \frac{n+1}{n} x^2 e^{-|x|}$$

Pertanto la serie converge solo se  $x^2 e^{-|x|} < 1$ . Posto  $f(x) = x^2 e^{-|x|}$ , per  $x > 0$ , risulta:

$$f'(x) = x e^{-|x|}(2-x)$$

pertanto la funzione  $f$  ha un massimo per  $x = 2$  e risulta:

$$f(2) = \frac{4}{e^2} < 1$$

La serie di partenza quindi converge  $\forall x \in \mathcal{R}$  e siccome converge pure la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{4}{e^2}\right)^n$$

la serie considerata converge totalmente e quindi anche uniformemente su tutto  $\mathcal{R}$ .

3. Sia  $f(x) = \sin(x^2) - (\sin x)^2 - \alpha x^4$ ,  $\alpha \in \mathcal{R}$ . Trovare, al variare di  $\alpha \in \mathcal{R}$  l'ordine di infinitesimo di  $f$  per  $x \rightarrow 0$ . Usando il polinomio di Taylor del seno, posso scrivere:

$$\sin y = y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{5!} + R_5(y)$$

e quindi:

$$f(x) = x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{5!} + R_5(x^2) - \left(x^2 + \frac{x^6}{36} + \frac{x^{10}}{(5!)^2} + R_5^2(x) - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{5!} + 2x R_5(x) - \frac{x^8}{35!} - \frac{x^3 R_5(x)}{3} + 2 \frac{x^5 R_5(x)}{5!}\right) - \alpha x^4$$

Pertanto se  $\alpha \neq 1/3$  si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^4} = -\alpha + \frac{1}{3}$$

e la funzione  $f$  é un infinitesimo di ordine 4 per  $x \rightarrow 0$ , mentre se  $\alpha = 1/3$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^6} = -\frac{1}{6} - \frac{1}{36} - \frac{1}{60}$$

e la funzione  $f$  é un infinitesimo di ordine 6 per  $x \rightarrow 0$ .



4. Trovare l'insieme di convergenza della serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ e - \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] x^n$$

Osserviamo che

$$a_n = e - \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e - e^{n \log(1 + \frac{1}{n})} = e \left[ 1 - e^{n \log(1 + \frac{1}{n}) - 1} \right]$$

Usando il polinomio di Taylor del logaritmo

$$\log y = y - \frac{y^2}{2} + r_2(y)$$

ottengo

$$\begin{aligned} n \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - 1 &= n \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + R_2(1/n) \right) - 1 = \\ &= -\frac{1}{2n} + n R_2(1/n) = -\frac{1}{2n} + o(n) \end{aligned}$$

Ne deriva quindi, ricordando il limite fondamentale:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{2n+2} + o(n+1)}{-\frac{1}{2n} + o(n)} = 1$$

Pertanto il raggio di convergenza della serie di potenze é  $r = 1$ . D'altra parte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{1/n} = e \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{1}{2n} - o(n) \right) = \frac{e}{2}$$

e quindi la serie considerata non converge per  $x = 1$ . Infine, posto:

$$f(x) = e - e^{x \log(1 + \frac{1}{x})}, \quad x > 0$$

risulta

$$f'(x) = -e^{x \log(1 + \frac{1}{x})} \left( \log \left( 1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x+1} \right)$$

Indicando ora con  $g$  la funzione in parentesi tonde, osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0, \quad g(1) = \log 2 - \frac{1}{2} > 0$$

e

$$g'(x) = -\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)^2} < 0$$

e quindi  $g(x) > 0 \forall x > 0$ . Per il criterio di Leibniz, possiamo quindi concludere che la serie considerata converge per  $x = -1$ .

## 2 FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI REALI

In questo capitolo studieremo alcune proprietà delle funzioni di più variabili reali, cominciando con le funzioni a valori reali e passando poi ad alcune estensioni al caso di funzioni a valori vettoriali.

### 2.1 Lo spazio $\mathcal{R}^n$

Indicheremo con

$$\mathcal{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \mathcal{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$$

È ben noto che  $\mathcal{R}^n$  è uno spazio vettoriale di dimensione  $n$ , rispetto alle operazioni:

- i)  $x + y = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ ,
- ii)  $\lambda x = \lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$ .

In  $\mathcal{R}^n$  è definito anche un prodotto scalare ossia una funzione  $\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$  che rende  $\mathcal{R}^n$  uno spazio normato.

Se  $x, y \in \mathcal{R}^n$ , chiameremo **prodotto scalare** tra  $x$  e  $y$  e lo indicheremo col simbolo  $x \cdot y$ , il seguente numero reale:

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i \tag{56}$$

Lasciamo come esercizio la verifica delle seguenti proprietà elementari:

- a) (**Simmetria**)  $x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x, y \in \mathcal{R}^n$ ,
- b) (**Proprietà distributiva**)  $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \quad \forall x, y, z \in \mathcal{R}^n$ ,
- c)  $\lambda(x \cdot y) = (\lambda x) \cdot y \quad \forall \lambda \in \mathcal{R}, x, y \in \mathcal{R}^n$ ,
- d)  $x \cdot x \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{R}^n$ ,
- e)  $x \cdot x = 0$  se e solo se  $x = 0$ .

Chiameremo infine **modulo o norma euclidea** di  $x \in \mathcal{R}^n$  il seguente numero non negativo:

$$|x| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \tag{57}$$

Interessante è la seguente:

**Teorema 2.1** *Diseguaglianza di Schwarz*  $\forall x, y \in \mathcal{R}^n$ :

$$|x \cdot y| \leq |x| |y| \tag{58}$$

**Dimostrazione.**  $\forall t \in \mathcal{R}$ , dalle proprietà del prodotto scalare, si ottiene:

$$0 \leq (x + ty) \cdot (x + ty) = |x|^2 + 2tx \cdot y + t^2 |y|^2$$

Essendo il polinomio di secondo grado in  $t$  a secondo membro della relazione precedente sempre  $\geq 0$ , il suo  $\Delta$  deve essere  $\leq 0$ , ossia deve essere:

$$(x \cdot y)^2 - |x| |y| \leq 0$$

e quindi vale la (58). q.e.d.

È interessante notare che nella diseguaglianza di Schwarz vale il segno di uguale se e solo se i due vettori  $x$  e  $y$  sono linearmente dipendenti (verificarlo per esercizio).

Usando infine la diseguaglianza di Schwarz, possiamo ora verificare che il modulo di un vettore  $x \in \mathcal{R}^n$  gode di proprietà molto simili a quelle del modulo di un numero reale ( $n = 1$ ). In particolare vogliamo mettere in risalto le seguenti tre proprietà:

i)  $\forall x \in \mathcal{R}^n, |x| \geq 0$  e  $|x| = 0 \iff x = 0$ ;

ii)  $\forall \lambda \in \mathcal{R}, x \in \mathcal{R}^n \quad |\lambda x| = |\lambda| |x|$ ,

iii) **Diseguaglianza triangolare**  $\forall x, y \in \mathcal{R}^n$

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad (59)$$

Verifichiamo la (59), essendo le altre due proprietà immediate. Si ottiene, usando la diseguaglianza di Schwarz:

$$|x + y|^2 = (x + y) \cdot (x + y) = |x|^2 + 2x \cdot y + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

Da notare infine che, nella diseguaglianza triangolare, oltre che nei casi banali che sia  $x = 0$  o  $y = 0$ , vale il segno di uguale se e solo se i vettori sono paralleli e concordi, ossia se e solo se  $\exists \lambda > 0$  tale che  $x = \lambda y$ .

Usando il modulo di  $x \in \mathcal{R}^n$ , possiamo definire, come nel caso di  $\mathcal{R}$ , una topologia che ci permetterà di introdurre la nozione di limite.

In particolare porremo se  $r > 0$  e  $x \in \mathcal{R}^n$ :

$$B_r(x) = \{y \in \mathcal{R}^n, |y - x| < r\}$$

e chiameremo  $B_r(x)$  la sfera (aperta) di centro  $x$  e raggio  $r$ .

Se  $A \subset \mathcal{R}^n$  e  $x_0 \in A$ , diremo che  $x_0$  è un punto interno ad  $A$  se  $\exists r > 0$  tale che  $B_r(x_0) \subset A$  e diremo che  $A$  è un insieme aperto se  $\forall x \in A$   $x$  è un punto interno ad  $A$ . Chiameremo poi un insieme  $C \subset \mathcal{R}^n$  un insieme chiuso se il suo complementare  $\mathcal{R}^n - C$  è aperto.

È chiaro quindi ora che concetti come punto di accumulazione, punto isolato, chiusura e frontiera di un insieme si possono estendere in maniera ovvia ad  $\mathcal{R}^n$ .

In particolare vogliamo mettere in risalto le seguenti definizioni:

i) diremo che  $A \subset \mathcal{R}^n$  è un insieme limitato se  $\exists k > 0$  tale che

$$|x| \leq k \quad \forall x \in A$$

ii) Se  $A \subset \mathcal{R}^n$  è un insieme aperto, diremo che  $A$  è sconnesso se  $\exists A_1, A_2 \subset A$ , entrambi diversi dall'insieme vuoto, con le seguenti proprietà:

a)  $A_1, A_2$  sono entrambi insiemi aperti,

b) risulta

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset \quad e \quad A_1 \cup A_2 = A$$

Ossia un aperto  $A$  è sconnesso se può essere suddiviso in due sottoinsiemi non vuoti, disgiunti ed entrambi aperti.

c) Diremo che un aperto  $A \subset \mathcal{R}^n$  è connesso se non è sconnesso. In particolare se  $A_1, A_2$  sono due aperti con  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  e  $A_1 \cup A_2 = A$ , allora uno dei due insiemi  $A_1$  o  $A_2$  deve essere vuoto.

## 2.2 Limiti e continuità

Le definizioni di limite già note per  $\mathcal{R}$  si possono estendere facilmente ad  $\mathcal{R}^n$ . In particolare:

i) se  $\{x_n\}_{n \in \mathcal{N}}$  è una successione di elementi di  $\mathcal{R}^n$  ed  $x \in \mathcal{R}^n$ , diremo che  $x_n$  converge ad  $x$  per  $n \rightarrow \infty$  e scriveremo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

se  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathcal{R}$  tale che  $|x_n - x| < \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon$ ,

ii) se  $f : A \rightarrow \mathcal{R}$  ( $A \subset \mathcal{R}^n$ ) è una data funzione e  $x_0$  è un punto di accumulazione di  $A$  diremo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \mathcal{R}$$

se  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$  tale che  $|f(x) - L| < \varepsilon \quad \forall x \in A$  con  $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$ .

In particolare se  $x_0 \in A$  e  $L = f(x_0)$  diremo che  $f$  è continua in  $x_0$ .

Valgono anche per le funzioni di più variabili i teoremi fondamentali validi per le funzioni di una variabile. In particolare vogliamo ricordare:

**Teorema di Weierstrass** Se  $f : K \rightarrow \mathcal{R}$  è una funzione continua e  $K \subset \mathcal{R}^n$  è un insieme limitato e chiuso, allora  $f$  assume minimo e massimo in  $K$ .

**Teorema di Cantor** Se  $f : K \rightarrow \mathcal{R}$  è una funzione continua e  $K \subset \mathcal{R}^n$  è un insieme limitato e chiuso, allora  $f$  è uniformemente continua.

**Teorema degli zeri** Se  $f : A \rightarrow \mathcal{R}$  è una funzione continua,  $A \subset \mathcal{R}^n$  è un insieme aperto e connesso e se esistono due punti  $x_1, x_2 \in A$  con  $f(x_1) > 0$  e  $f(x_2) < 0$ . Allora esiste un punto  $x \in A$  con  $f(x) = 0$ .

## 2.3 Derivate parziali e differenziale

**Definizione 2.1** Sia  $f : A \rightarrow \mathcal{R}$  dove  $A \subset \mathcal{R}^n$  è un insieme aperto, una data funzione e sia  $x_0 \in A$ . Definiamo le derivate parziali di  $f$  rispetto ad  $x_i$   $i = 1, 2, \dots, n$  in  $x_0$  e le indicheremo rispettivamente con uno dei simboli

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0), f_{x_i}(x_0), D_{x_i} f(x_0), D_i f(x_0)$$

nel modo seguente :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h e_i) - f(x_0)}{h}$$

qualora tale limite esista finito, dove abbiamo indicato con  $e_i$  il vettore  $(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  con 1 che compare al posto  $i$ -esimo.

Come si vede dalla definizione, le derivate parziali sono i limiti dei rapporti incrementali che si ottengono incrementando la funzione  $f$  rispetto ad una sola delle variabili e lasciando inalterate le altre.

Per le derivate parziali quindi, valgono le stesse regole di derivazione per funzioni di una sola variabile che già conosciamo, considerando, quando si deriva rispetto ad  $x_i$ , le altre variabili come costanti.

Consideriamo alcuni esempi, notando che nel caso  $n = 2$  le variabili vengono indicate con  $(x, y)$  invece che con  $(x_1, x_2)$  e analogamente se  $n = 3$  con  $(x, y, z)$  invece che con  $(x_1, x_2, x_3)$ .

Se  $f(x, y) = x \sin(xy)$  risulta :

$$f_x(x, y) = \sin(xy) + xy \cos(xy)$$

$$f_y(x, y) = x^2 \cos(xy)$$

Un caso interessante è quando la funzione  $f$  è un polinomio di primo grado, ossia :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i \quad ; \quad a_i \in \mathcal{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

In tal caso  $f_{x_i}(x) = a_i, \forall x \in \mathcal{R}^n$  e il grafico di  $f$ , ossia l'insieme:

$$\{(x, z) \in \mathcal{R}^{n+1} \ ; \ z = f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i\}$$

è un piano nello spazio  $\mathcal{R}^{n+1}$ .

Nel caso di una funzione di più variabili si può definire anche la derivata in una direzione diversa da quella degli assi coordinati.

**Definizione 2.2 (Derivata in una direzione)**

Se  $v \in \mathcal{R}^n$  è una direzione, ossia un vettore con  $|v| = 1$ , indicheremo con

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} \quad (60)$$

qualora tale limite esista finito. Tale limite viene chiamato **la derivata di  $f$  nella direzione  $v$  nel punto  $x_0$** .

Ovviamente la definizione (60) è una estensione del concetto di derivata parziale e, se  $v = e_i$ , risulta:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

Considereremo ora alcuni esempi che mostrano come possano esistere le derivate parziali in certe direzioni e non in altre e come l'esistenza delle derivate parziali, anche in ogni direzione, non assicura, nel caso di più variabili, la continuità della funzione.

1. Sia  $f : \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}$  la funzione che in  $(0, 0)$  vale zero e tale che.

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$$

Essendo la restrizione di  $f$  agli assi coordinati identicamente nulla, si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

D'altra parte, se  $v \in \mathcal{R}^2$  è una direzione e  $v = (\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ , risulta:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \cos \theta \sin \theta}{h^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos \theta \sin \theta}{h}$$

Pertanto la funzione  $f$  non ha derivate parziali nelle direzioni diverse da quelle degli assi coordinati (se  $\cos \theta \sin \theta \neq 0$ ). Notiamo anche che, se restringiamo la funzione alla retta  $y = mx$ ,  $m \in \mathcal{R}$ , risulta.

$$f(x, mx) = \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1 + m^2} \quad \forall x \neq 0$$

Pertanto la funzione  $f$  non è continua in zero.

2. Sia  $f : \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}$  la funzione che in  $(0, 0)$  vale zero e tale che.

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$$

Essendo, come nel primo caso, la restrizione di  $f$  agli assi coordinati identicamente nulla, si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

D'altra parte, se  $v \in \mathcal{R}^2$  è una direzione e  $v = (\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ , risulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{h^3(h^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{h^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \quad \text{se } \sin \theta \neq 0 \end{aligned}$$

Pertanto la funzione  $f$  ha derivate parziali in ogni direzione. Notiamo infine che, se restringiamo la funzione alla parabola  $y = x^2$ , risulta:

$$f(x, x^2) = \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2} \quad \forall x \neq 0$$

Pertanto la funzione  $f$  non è continua in zero.

3. Sia  $f : \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}$  la funzione che in  $(0, 0)$  vale zero e tale che.

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$$

Essendo, come nei casi precedenti, la restrizione di  $f$  agli assi coordinati identicamente nulla, si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

D'altra parte, se  $v \in \mathcal{R}^2$  è una direzione e  $v = (\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ , risulta:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \cos \theta \sin \theta}{h|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cos \theta \sin \theta}{|h|}$$

Pertanto la funzione  $f$  non ha derivate direzionali se  $\cos \theta \sin \theta \neq 0$ . Notiamo infine che risulta:

$$|f(x, y)| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} |y| \leq |y|$$

Pertanto la funzione  $f$  è continua in zero.

Come abbiamo già osservato una funzione di più variabili può avere derivate parziali senza essere continua, in contrasto con quello che succede per funzioni di una variabile. In effetti, per funzioni di più variabili, il concetto che estende quello di derivabilità per funzioni di una variabile è il concetto di differenziabilità, che ora andremo a definire.

Per comprendere meglio questa definizione è utile osservare che, il fatto che una funzione di una variabile sia derivabile in un punto  $x_0$ , può essere espresso nel seguente modo

$$0 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0}$$

ossia che esista una funzione lineare  $L : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  (quella data dalla legge  $L(x) = f'(x_0)x$ ) tale che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

**Definizione 2.3 (Funzione differenziabile)** Diremo dunque che la funzione  $f : A \subset \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$  è **differenziabile** nel punto  $x_0 \in A$  se esiste una funzione lineare:  $L : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$  tale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0 \quad (61)$$

La funzione lineare  $L$  che compare nella definizione di differenziabilità viene chiamata il **differenziale** di  $f$  in  $x_0$  e sarà indicata nel seguito col simbolo  $df(x_0)$ .

Vale il seguente importante:

**Teorema 2.2** Se una funzione  $f : A \subset \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$  è differenziabile in  $x_0 \in A$ , allora:

i)  $f$  ha derivate parziali in  $x_0$  rispetto ad ogni direzione  $v \in \mathcal{R}^n$  e risulta

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = L(v) \quad (62)$$

ii)  $f$  è continua in  $x_0$ .

**Dimostrazione. Parte i)** Dalla definizione di differenziabilità, risulta che:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$  tale che:

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)}{|x - x_0|} \right| < \varepsilon \quad \forall x \in A, \quad 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$$

In particolare se  $x = x_0 + h v$  con  $h \in \mathcal{R}$ ,  $|h| < \delta_\varepsilon$ :

$$\left| \frac{f(x_0 + h v) - f(x_0) - L(h v)}{h} - L(v) \right| = \left| \frac{f(x_0 + h v) - f(x_0) - L(h v)}{|h|} \right| < \varepsilon$$

e quindi vale la (62).

**Parte ii)** Risulta:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{|f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)|}{|x - x_0|} |x - x_0| + |L(x - x_0)|$$

e quindi la tesi si ottiene dalla (61) e dal fatto che l'applicazione lineare  $L$  è continua. q.e.d.

È interessante osservare che dalla (62), si ottiene in particolare che, se  $f$  è differenziabile in  $x_0$  allora

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = L(e_i) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

e quindi  $\forall x \in \mathcal{R}^n$ :

$$L(x) = L\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i L(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

Se indichiamo infine con  $Df(x_0)$  il gradiente di  $f$  in  $x_0$ , ossia il vettore:

$$Df(x_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

vale la seguente formula di rappresentazione per il differenziale:

$$L(x) = df(x_0)(x) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = x \cdot Df(x_0) \quad (63)$$

Il piano in  $\mathcal{R}^{n+1}$ , parallelo al grafico di  $L$  e passante per il punto  $(x_0, f(x_0))$ , cioè il piano di equazione

$$z = f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) (x_i - x_{0,i}) \quad (64)$$

viene chiamato **il piano tangente alla superficie grafico della funzione  $f$  nel punto  $x_0$** .

Nel caso particolare di una funzione di due variabili, l'equazione del piano tangente nel punto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  diventa:

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Molto utile, per lo studio della differenziabilità di una funzione, è il seguente teorema, noto in letteratura col nome di teorema del differenziale totale:

**Teorema 2.3 Teorema del differenziale totale**

Sia  $f : A \rightarrow \mathcal{R}$ , dove  $A \subset \mathcal{R}^n$  è un aperto, una data funzione. Supponiamo che:

- i)  $f$  abbia derivate parziali in ogni punto  $x \in A$ ,
- ii) tutte le derivate parziali di  $f$  sono continue in un punto  $x_0 \in A$ .

Allora  $f$  è differenziabile in  $x_0$ .

In particolare se  $f \in C^1(A)$ , ossia se  $f$  ha derivate parziali continue in ogni punto di  $A$ , allora  $f$  è differenziabile in ogni punto di  $A$ .

**Dimostrazione.** Dalla formula di rappresentazione (63), risulta che, se il differenziale di una funzione esiste deve essere la seguente funzione lineare

$$L(x) = df(x_0)(x) = Df(x_0) \cdot x \quad \forall x \in \mathcal{R}^n$$

Si tratta quindi di dimostrare che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - Df(x_0) \cdot (x - x_0)}{|x - x_0|} = 0 \quad (65)$$

Dall'ipotesi *ii*),  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0$  tale che  $B_\delta(x_0) \subset A$  e

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(z) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \right| < \varepsilon \quad \forall z \in B_\delta(x_0), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (66)$$

Fissato ora  $x \in B_\delta(x_0)$ , poniamo  $z_0 = x_0$ ,  $z_n = x$  e se  $j = 1, 2, \dots, n-1$ :

$$z_j = \sum_{h=1}^j x_h e_h + \sum_{h=j+1}^n x_0 e_h = (x_1, x_2, \dots, x_j, x_0, x_0, \dots, x_0)$$

(ossia  $z_j$  è il vettore le cui prime  $j$  componenti sono uguali alle prime  $j$  componenti di  $x$ , mentre le ultime  $n-j$  componenti sono uguali a quelle di  $x_0$ .) Si ottiene

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{j=1}^n (f(z_j) - f(z_{j-1}))$$

Notiamo che  $z_j - z_{j-1} = (x_j - x_0) e_j$  ossia, passando da  $z_{j-1}$  a  $z_j$  viene incrementata solo la variabile  $j$ -esima dal valore  $x_0$  al valore  $x_j$ . Possiamo applicare il teorema di Lagrange per funzioni di una variabile, per ottenere che esistono punti  $z'_j$  appartenenti al segmento di  $\mathcal{R}^n$  di estremi  $z_{j-1}$  e  $z_j$ , tali che :

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(z'_j)(x_j - x_0)$$

Osservando infine che se  $x \in B_\delta(x_0)$  anche  $z'_j \in B_\delta(x_0) \quad j = 1, 2, \dots, n$ , ricordando la (66), si ha:

$$|f(x) - f(x_0) - Df(x_0) \cdot (x - x_0)| < \varepsilon \sum_{j=1}^n |x_j - x_0|$$

Possiamo quindi concludere che:

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0) - Df(x_0) \cdot (x - x_0)}{|x - x_0|} \right| < \varepsilon \sum_{j=1}^n \frac{|x_j - x_0|}{|x - x_0|} \leq n\varepsilon$$

e quindi vale la (65). q.e.d.

Va notato che il teorema del differenziale totale dà solo una condizione sufficiente a che una funzione  $f$  sia differenziabile, ma non necessaria; ossia una funzione può essere differenziabile in un punto senza che le sue derivate parziali siano continue in quel punto. Consideriamo infatti la funzione che in  $(0, 0)$  vale 0 e se  $(x, y) \neq (0, 0)$  è definita da:

$$f(x, y) = xy \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$



Siccome la funzione  $f$  si annulla sugli assi coordinati, risulta  $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ . D'altra parte

$$\left| \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right| \leq |y|$$

Pertanto la funzione  $f$  è differenziabile in  $(0, 0)$ . Osserviamo ora che se  $(x, y) \neq (0, 0)$ , risulta:

$$f_x(x, y) = y \sin \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) - \frac{x^2 y}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} \cos \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

Se poniamo quindi  $y = x$  con  $x > 0$ , si ha:

$$f_x(x, x) = x \sin \left( \frac{1}{\sqrt{2}x} \right) - \frac{1}{(\sqrt{2})^3} \cos \left( \frac{1}{\sqrt{2}x} \right)$$

Pertanto non esiste il

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f_x(x, y)$$

e la derivata parziale  $f_x$  non è continua in  $(0, 0)$ .

Consideriamo per concludere alcuni esempi.

1. Sia  $f : \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}$  la funzione che in  $(0, 0)$  vale zero e tale che

$$f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$$

Essendo ovviamente  $f \in C^1(\mathcal{R}^2 - \{(0, 0)\})$ , la funzione  $f$  è differenziabile in ogni punto  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$  e le sue derivate parziali si ottengono dalle usuali regole di derivazione. Per studiare la differenziabilità nell'origine, osserviamo che la restrizione di  $f$  agli assi coordinati è identicamente nulla e quindi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Ne deriva quindi che  $f$  è differenziabile in  $(0, 0)$  se e solo se

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} = 0$$

Osservando infine che se  $y = x$  il quoziente precedente diventa:

$$\frac{\sin(x^2)}{x^2 + x^2} = \frac{\sin(x^2)}{2x^2} \rightarrow \frac{1}{2} \text{ se } x \rightarrow 0$$

Pertanto la funzione  $f$  non è differenziabile in  $(0, 0)$ . Notiamo infine che dalla diseguglianza:

$$\left| \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq |y|$$

si ricava che la funzione è continua in  $(0, 0)$ .

2. Sia  $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ ,  $(x, y) \in A = B_2(0, 0)$ . La funzione  $f \in C^1(A)$  e quindi è differenziabile in ogni punto di  $A$ . In particolare  $f$  è differenziabile nel punto  $(1, \frac{1}{2}) \in A$ . Vogliamo ora scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie  $\mathcal{S} = \text{graf } f$  nel punto  $(1, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{11}}{2})$  (da notare che  $\frac{\sqrt{11}}{2} = f(1, \frac{1}{2})$  e che  $\mathcal{S}$  in  $R^3$  è la semisfera superiore di centro  $(0, 0, 0)$  e raggio 2). Risulta :

$$f_x(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, \quad f_y(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

e quindi :

$$f_x(1, \frac{1}{2}) = \frac{-2}{\sqrt{11}} \quad , \quad f_y(1, \frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{11}}$$

Pertanto l'equazione del piano tangente ad  $\mathcal{S}$  in  $(1, \sqrt{12}, \frac{\sqrt{11}}{2})$  ( vedi la (64)), è data da :

$$z = \frac{\sqrt{11}}{2} - \frac{2}{\sqrt{11}}(x-1) + \frac{1}{\sqrt{11}}(y - \frac{1}{2})$$

3. Sia  $f(x, y) = xy - x^2y^2$  e  $v$  la direzione  $v = (\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Calcolare la derivata di  $f$  nella direzione  $v$  nel punto  $(1, 1)$

a) Usiamo in primo luogo le (62),(63). Risulta  $f_x = y - 2xy^2$ ,  $f_y = x - 2x^2y$  e quindi  $f_x(1, 1) = -1$ ,  $f_y(1, 1) = -1$  ne deriva quindi che

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1, 1) = Df(1, 1) \cdot v = (-1, -1) \cdot (\cos \theta, \sin \theta) = -\cos \theta - \sin \theta$$

b) Usiamo la definizione:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(1, 1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h \cos \theta, 1+h \sin \theta) - f(1, 1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h \cos \theta)(1+h \sin \theta) - (1+h \cos \theta)^2(1+h \sin \theta)^2}{h} = -\sin \theta - \cos \theta \end{aligned}$$

4. Sia  $f : \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}$  la funzione definita dalla legge:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{y} & \text{se } y \neq 0 \\ x & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

Dire se  $f$  è differenziabile nei punti del tipo  $(a, 0)$ ,  $a \in \mathcal{R}$ .

Risulta

$$\begin{aligned} f_x(a, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, 0) - f(a, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a+h-a}{h} = 1 \\ f_y(a, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, h) - f(a, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(ah)}{h} - a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(ah) - ah}{h^2} = 0 \end{aligned}$$

Pertanto, posto per semplicità:  $\sigma(x, y) = f(x, y) - f(a, 0) - f_x(a, 0)(x-a) - f_y(a, 0)y$ , si ha:

$$\sigma(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{y} - a - (x-a) & \text{se } y \neq 0 \\ x - a - (x-a) & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

Ricordando infine che, se  $y \neq 0$

$$\sin(xy) = xy - \frac{x^3y^3}{6} + R_3(xy)$$

si ottiene:

$$\sigma(x, y) = x - \frac{x^3y^2}{6} + \frac{R_3(xy)}{y} - x = -\frac{x^3y^2}{6} + \frac{R_3(xy)}{y}$$

Possiamo quindi concludere che

$$\left| \frac{\sigma(x, y)}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} \right| \leq \left| \frac{x^3y}{6} \right| + \left| \frac{R_3(xy)}{x^3y^3} \right| |x^3y|$$

e quindi

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,0)} \frac{\sigma(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} = 0$$

Possiamo quindi concludere che la funzione  $f$  è differenziabile in  $(a, 0)$ . In effetti, notando che vale lo sviluppo in serie di potenze:

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1} y^{2n}}{(2n+1)!} \quad \forall (x, y) \in \mathcal{R}^2$$

possiamo concludere che  $f \in C^\infty(\mathcal{R}^2)$ .

## 2.4 Derivate seconde e teorema di Schwarz

Sia  $f : A \rightarrow \mathcal{R}$  una funzione definita in un aperto  $A \subset \mathcal{R}^n$  e sia  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Supponiamo che la funzione  $f$  sia derivabile rispetto alla variabile  $x_i$  in ogni punto di  $A$ . Possiamo allora definire la funzione derivata parziale

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : A \rightarrow \mathcal{R}$$

come la funzione

$$x \in A \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

Se la funzione  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  è a sua volta derivabile rispetto alla variabile  $x_j$   $j = 1, 2, \dots, n$  in un punto  $x_0 \in A$ , diremo che la funzione  $f$  è derivabile due volte in  $x_0$  rispetto alle variabili  $x_i$  e  $x_j$  ed indicheremo tale derivata seconda con uno dei seguenti simboli:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0), f_{x_i x_j}(x_0), D_{x_i x_j}(x_0), D_{i j}(x_0)$$

Per esempio, se la funzione  $f$  è una funzione di due variabili, abbiamo le seguenti derivate parziali seconde :

$$f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$$

Per esempio se:

$$f(x, y) = x^2 y + 2 x y^2 - x^3$$

Risulta :

$$f_x(x, y) = 2 x y + 2 y^2 - 3 x^2$$

$$f_y(x, y) = x^2 + 4 x y$$

$$f_{xx}(x, y) = 2 y - 6 x$$

$$f_{xy}(x, y) = 2 x + 4 y$$

$$f_{yx}(x, y) = 2 x + 4 y$$

$$f_{yy}(x, y) = 4 x$$

Da notare che  $f_{xy} = f_{yx}$ . Questo fatto non é casuale, ma é conseguenza del seguente:

**Teorema 2.4 Teorema di Schwarz** *Se una funzione  $f : A \rightarrow \mathcal{R}$  ha derivate parziali miste rispetto alle variabili  $x_i$  ed  $x_j$   $f_{x_i x_j}$  e  $f_{x_j x_i}$  in tutti i punti di  $A$  e se tali derivate parziali miste sono continue in un punto  $x_0 \in A$  allora sono uguali in tale punto, ossia  $f_{x_i x_j}(x_0) = f_{x_j x_i}(x_0)$ .*

**Dimostrazione.** È sufficiente considerare il caso di due variabili e  $x = x_i, y = x_j$ . Dall'ipotesi di continuità delle derivate miste, si ha che  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0$  tale che  $B_\delta(x_0, y_0) \subset A$  e

$$|f_{xy}(\xi, \eta) - f_{xy}(x_0, y_0)| < \varepsilon \quad |f_{yx}(\xi, \eta) - f_{yx}(x_0, y_0)| < \varepsilon \quad \forall (\xi, \eta) \in B_\delta(x_0, y_0)$$

Sia ora  $(x, y) \in B_\delta(x_0, y_0)$  e consideriamo la funzione:

$$g(x, y) = [f(x, y) - f(x, y_0)] - [f(x_0, y) - f(x_0, y_0)] =$$

$$= [f(x, y) - f(x_0, y)] - [f(x, y_0) - f(x_0, y_0)]$$

Applicando il teorema di Lagrange, prima rispetto alla variabile  $x$  e poi rispetto alla variabile  $y$ , risulta che esistono due punti  $x'$ ,  $y'$  rispettivamente tra  $x$  e  $x_0$  e  $y$  ed  $y_0$  taliche:

$$g(x, y) = [f_x(x', y) - f_x(x', y_0)](x - x_0) = f_{xy}(x', y')(y - y_0)(x - x_0)$$

Analogamente, applicando sempre il teorema di Lagrange, ma questa volta prima rispetto a  $y$  e poi rispetto ad  $x$ , si ottengono due punti  $x''$ ,  $y''$  rispettivamente tra  $x$  e  $x_0$  e  $y$  ed  $y_0$  per cui:

$$g(x, y) = [f_y(x, y'') - f_y(x_0, y'')](y - y_0) = f_{yx}(x'', y'')(y - y_0)(x - x_0)$$

ossia  $f_{xy}(x', y') = f_{yx}(x'', y'')$ . Tenendo infine conto che  $(x', y')$ ,  $(x'', y'') \in B_\delta(x_0, y_0)$ , si ricava che

$$|f_{xy}(x_0, y_0) - f_{yx}(x_0, y_0)| \leq |f_{xy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x', y')| + |f_{yx}(x'', y'') - f_{yx}(x_0, y_0)| < 2\varepsilon$$

Il teorema segue allora dall'arbitrarietà di  $\varepsilon$ .

q.e.d.

La funzione che ora considereremo fornisce un controesempio al teorema di Schwarz. Sia  $f : \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}$  la funzione che vale zero nell'origine e tale che

$$f(x, y) = \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} \quad \text{se } (x, y) \neq (0, 0)$$

Risulta  $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$  e se  $(x, y) \neq (0, 0)$ :

$$f_x(x, y) = \frac{(3x^2 y - y^3)(x^2 + y^2) - 2x(x^3 y - x y^3)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f_y(x, y) = \frac{(x^3 - 3x y^2)(x^2 + y^2) - 2y(x^3 y - x y^3)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^5 - 4x^3 y^2 - x y^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

Ne deriva quindi che

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f_x(0, y) - f_x(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^5}{y^5} = -1$$

$$f_{yx}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_y(x, 0) - f_y(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5}{x^5} = 1$$

## 2.5 Funzioni a valori vettoriali e differenziabilità della funzione composta

Se  $n, m \in \mathcal{N}$  ed  $f : A \subset \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^m$ , diremo che  $f$  è una funzione a valori vettoriali se  $m \geq 2$ . In questo caso  $f(x) \in \mathcal{R}^m$  e quindi potremmo scriverlo come

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$$

dove  $\forall i = 1, 2, \dots, m$  la funzione componente  $i$ -esima è una funzione a valori reali.

Per funzioni a valori vettoriali si possono estendere in maniera ovvia la maggior parte delle definizioni e delle proprietà che abbiamo enunciato per funzioni a valori reali ( $m = 1$ ).

In particolare vogliamo ricordare la definizione di differenziabilità:

Se  $f : A \rightarrow \mathcal{R}^m$  è una funzione a valori vettoriali definita in un aperto  $A \subset \mathcal{R}^n$  ed  $x_0 \in A$ , diremo che  $f$  è differenziabile in  $x_0$  se esiste una funzione lineare  $L : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^m$  tale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0 \quad (67)$$

Se indichiamo con  $L(x) = (L_1(x), L_2(x), \dots, L_m(x))$ , si ottiene subito che la funzione  $f$  è differenziabile in  $x_0$  se e solo se  $\forall i = 1, 2, \dots, m$  la componente  $f_i$  è differenziabile in  $x_0$  con differenziale  $L_i$ . Usando dunque la formula di rappresentazione (63), risulta:

$$L_i(x) = d f_i(x_0)(x) = D f_i(x_0) \cdot x \quad \forall x \in \mathcal{R}^n$$

Se indichiamo quindi con  $J_f(x_0)$  la matrice  $m \times n$  che contiene nella riga  $i$ -esima il vettore  $D f_i(x_0)$   $i = 1, 2, \dots, m$  ossia la matrice:

$$J_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} \quad (68)$$

possiamo scrivere la seguente formula di rappresentazione per il differenziale  $L$ :

$$L(x) = d f(x_0)(x) = J_f(x_0) \cdot x \quad \forall x \in \mathcal{R}^n \quad (69)$$

dove il prodotto a secondo membro della (69) va inteso come il prodotto riga per colonna della matrice  $m \times n$ :  $J_f(x_0)$  e della matrice  $n \times 1$  (o vettore colonna):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ossia in modo esplicito:

$$J_f(x_0) \cdot x = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D f_1(x_0) \cdot x \\ D f_2(x_0) \cdot x \\ \vdots \\ D f_m(x_0) \cdot x \end{pmatrix}$$

La matrice  $J_f(x_0)$  viene chiamata la **matrice jacobiana** della funzione  $f$  nel punto  $x_0$ . Osserviamo infine che da questo modo esplicito per esprimere la (69) e dalla disuguaglianza di Schwarz, si ottiene la seguente disuguaglianza ( la cui verifica viene lasciata per esercizio):

$$|J_f(x_0) \cdot x| \leq |J_f(x_0)| |x| \quad (70)$$

dove abbiamo indicato con

$$|J_f(x_0)| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)^2}$$

Usando la matrice jacobiana si può enunciare il teorema sulla differenziabilità della funzione composta in maniera formalmente simile al caso di funzioni di una variabile. Infatti vale il seguente:

**Teorema 2.5 Teorema sulla differenziabilità della composta** Siano  $f : A \subset \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^m$  e  $g : B \subset \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}^k$  due date funzioni. Supponiamo che  $f(A) \subset B$ , che  $f$  sia differenziabile nel punto  $x_0 \in A$  e che  $g$  sia differenziabile nel punto  $y_0 = f(x_0) \in B$ . Allora la funzione composta  $h : A \subset \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^k$ ,  $h(x) = g(f(x))$  è differenziabile nel punto  $x_0 \in A$  e vale la formula:

$$J_h(x_0) = J_g(f(x_0)) \cdot J_f(x_0) \quad (71)$$

dove il prodotto va inteso prodotto riga per colonna delle due matrici.

Ne consegue che la funzione composta ha derivate parziali in  $x_0$  ed in forma esplicita risulta  $\forall i = 1, 2, \dots, k; \forall s = 1, 2, \dots, n$ :

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_s}(x_0) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(f(x_0)) \frac{\partial f_j}{\partial x_s}(x_0) \quad (72)$$

**Dimostrazione.** Indichiamo con  $\sigma : \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}^k$  la funzione cosí definita:  $\sigma(y_0) = 0$  e

$$\sigma(y) = \frac{g(y) - g(y_0) - J_g(y_0) \cdot (y - y_0)}{|y - y_0|} \quad \text{se } y \neq y_0$$

Risulta pertanto:

$$g(y) - g(y_0) = J_g(y_0) \cdot (y - y_0) + \sigma(y) |y - y_0| \quad \forall y \in \mathcal{R}^m \quad (73)$$

Inoltre, per la differenziabilitá della funzione  $g$  in  $y_0$ , risulta:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \sigma(y) = 0 = \sigma(y_0)$$

ossia la funzione  $\sigma$  é continua in  $y_0$ . Abbiamo pertanto dalla (73)

$$\begin{aligned} g(f(x)) - g(f(x_0)) &= J_g(y_0) \cdot (f(x) - f(x_0)) + \sigma(f(x)) |f(x) - f(x_0)| = \\ &= J_g(y_0) \cdot (f(x) - f(x_0) - J_f(x_0) \cdot (x - x_0)) + J_g(y_0) \cdot (J_f(x_0) \cdot (x - x_0)) + \\ &\quad + \sigma(f(x)) |f(x) - f(x_0)| \end{aligned}$$

Ne deriva che:

$$\begin{aligned} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0)) - [J_g(y_0) \cdot J_f(x_0)] \cdot (x - x_0)}{|x - x_0|} &= \\ &= J_g(y_0) \cdot \left( \frac{f(x) - f(x_0) - J_f(x_0) \cdot (x - x_0)}{|x - x_0|} \right) + \\ &\quad + \sigma(f(x)) \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \end{aligned} \quad (74)$$

Notiamo infine che che

$$\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leq \left| \frac{f(x) - f(x_0) - J_f(x_0) \cdot (x - x_0)}{|x - x_0|} \right| + \frac{|J_f(x_0) \cdot (x - x_0)|}{|x - x_0|}$$

Essendo  $f$  differenziabile in  $x_0$  possiamo trovare  $\delta > 0$  tale che

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0) - J_f(x_0) \cdot (x - x_0)}{|x - x_0|} \right| \leq 1 \quad \forall x \in B_\delta(x_0), x \neq x_0$$

Ne possiamo concludere, usando anche la disuguaglianza (70), che:

$$\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leq 1 + |J_f(x_0)| \quad \forall x \in B_\delta(x_0)$$

Possiamo infine concludere la dimostrazione passando infine al limite per  $x \rightarrow x_0$  nella (74). q.e.d.

## 2.6 Formula di Taylor e massimi e minimi relativi per funzioni di più variabili

La formula di Taylor per funzioni di più variabili si ottiene dalla formula di Taylor per funzioni di una variabile applicata alla restrizione della funzione di più variabili al segmento congiungente  $x_0$  con  $x$ . Noi scriveremo con precisione solo la formula di Taylor col resto di ordine due, che sarà quella che useremo nello studio dei punti di massimo e minimo relativi. La formula di Taylor più generale si può ottenere ragionando nello stesso modo, ma con notazioni più complicate e per questo non sarà considerata in questi appunti.

La formula di Taylor che dimostreremo è la seguente:

**Teorema 2.6 Formula di Taylor col resto di ordine due** Sia  $f \in C^2(A)$  dove  $A \subset \mathcal{R}^n$  è un insieme aperto e siano  $x, x_0 \in A$ , allora posto:

$$R_2(x, x_0) = f(x) - f(x_0) - Df(x_0) \cdot (x - x_0) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}) \quad (75)$$

risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_2(x, x_0)}{|x - x_0|^2} = 0 \quad (76)$$

**Dimostrazione.** Fissato  $x_0 \in A$ , sia  $r > 0$  un raggio tale  $B_r(x_0) \subset A$ . Fissato  $x \in B_r(x_0)$  e  $t \in [0, 1]$ , poniamo:

$$F(t) = f(x_0 + t(x - x_0))$$

la restrizione della funzione  $f$  al segmento che congiunge  $x_0$  con  $x$ . Per il teorema sulle differenziabilità della funzione composta  $F \in C^2([0, 1])$  ed usando la formula (72) risulta:

$$F'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + t(x - x_0))(x_i - x_{0i})$$

$$F''(t) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + t(x - x_0))(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j})$$

Essendo  $F \in C^2([0, 1])$ , possiamo usare la formula (32) con  $n = 1$ , per scrivere:

$$F(1) = F(0) + F'(0) - \int_0^1 (t-1)F''(t) dt$$

e aggiungendo e togliendo  $F''(0)$ , risulta:

$$F(1) = F(0) + F'(0) - \int_0^1 (t-1)[F''(t) - F''(0)] dt + \frac{1}{2} F''(0) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2} F''(0) - E$$

dove abbiamo posto

$$E = \int_0^1 (t-1)[F''(t) - F''(0)] dt$$

Osserviamo infine che essendo le derivate seconde di  $f$  continue in  $x_0$ ,  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta_\varepsilon \in (0, r)$  tale che:

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + t(x - x_0)) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right| < \varepsilon \quad \forall x \in B_\delta(x_0), t \in [0, 1]$$

Ne segue quindi che, per l'errore  $E$  vale la stima:

$$|E| \leq \sum_{i,j=1}^n \varepsilon |x_i - x_{0i}| |x_j - x_{0j}| \int_0^1 (1-t) dt \leq \frac{\varepsilon n^2}{2} |x - x_0|^2$$

e quindi ricordando (75):

$$\frac{|R_2(x, x_0)|}{|x - x_0|^2} \leq \frac{\varepsilon n^2}{2}$$

Vale quindi la proprietà (76) del resto. q.e.d.

Usando la formula di Taylor, possiamo dare delle condizioni che ci permettano di individuare eventuali punti di massimo o di minimo relativi per funzioni di più variabili.

Cominciamo per completezza col ricordare la definizione di massimo e minimo relativi.

Se  $f : A \rightarrow R$  è una funzione e  $x_0 \in A$ , diremo che  $x_0$  è un punto di massimo (minimo) relativo per  $f$  se esiste  $r > 0$  tale che  $f(x) \leq f(x_0)$  ( $\geq$ )  $\forall x \in A \cap B_r(x_0)$ .

Un primo semplice risultato che si può enunciare è un teorema simile al teorema di Fermat per le funzioni di una variabile. In particolare vale il seguente :

**Teorema 2.7** *Se  $f : A \rightarrow R$  è una funzione e  $x_0 \in A$  è un punto di massimo o di minimo relativo per  $f$ , e se:*

*$x_0$  è un punto interno ad  $A$ , ossia se esiste  $\rho > 0$  tale che  $B_\rho(x_0) \subset A$ ,*

*$f$  ha derivate parziali in  $x_0$*

*allora  $f_{x_i}(x_0) = 0 \forall i = 1, 2, \dots, n$ .*

Come nel caso di funzioni di una variabile, questo teorema dà solo una condizione necessaria a che il punto  $x_0$  sia un massimo o minimo relativo, ma non sufficiente. Ossia un punto  $x_0$  può verificare le condizioni  $f_{x_i}(x_0) = 0 \forall i = 1, 2, \dots, n$  e non essere nè un punto di massimo nè di minimo relativi. Da notare che un punto  $x_0 \in A$  che verifica le condizioni  $f_{x_i}(x_0) = 0 \forall i = 1, 2, \dots, n$  viene chiamato **un punto critico**.

Allo scopo di comprendere che tipo di condizioni analitiche possono essere aggiunte al fatto che  $x_0$  sia un punto critico al fine di ottenere che tale punto sia un punto di massimo o di minimo relativo, ricordiamo in primo luogo cosa si può dire per funzioni di una variabile.

In particolare ricordiamo che se  $f[a, b] \rightarrow R$  è una funzione con derivate seconde continue in  $(a, b)$ ,  $x_0 \in (a, b)$  e

i)  $f'(x_0) = 0$ ,

ii)  $f''(x_0) < 0$

Allora  $x_0$  è un punto di massimo relativo per  $f$ . Infatti dalla formula di Taylor troncata ai termini del secondo ordine, si ha che

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + R_2(x, x_0)$$

dove  $R_2(x, x_0)$ , il resto della formula di Taylor, ha questa proprietà :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_2(x, x_0)}{(x - x_0)^2} = 0$$

Ricordando l'ipotesi i), si ottiene allora

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + R_2(x, x_0) = (x - x_0)^2 \left[ \frac{f''(x_0)}{2} + \frac{R_2(x, x_0)}{(x - x_0)^2} \right]$$

Ricordando infine l'ipotesi ii) e la proprietà del resto, si ottiene che  $\exists r > 0$  tale che se  $|x - x_0| < r$

$$\frac{R_2(x, x_0)}{(x - x_0)^2} < -\frac{f''(x_0)}{4}$$

Pertanto se  $|x - x_0| < r$

$$f(x) - f(x_0) \leq (x - x_0)^2 \frac{f''(x_0)}{4} \leq 0$$



Ossia  $x_0$  è un punto di massimo relativo.

Abbiamo ricordato questi conti relativi a funzioni di una variabile per far notare l'importanza del segno del termine di ordine due della formula di Taylor nello studio dei punti di massimo e minimo relativi.

Nel caso di funzioni di più variabili il termine di secondo ordine della formula di Taylor è dato, come si vede dalla formula (75), dall'espressione:

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) (x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j})$$

espressione che è un polinomio di grado due nella variabile  $x - x_0$  o come viene spesso chiamata in letteratura una **forma quadratica**.

Per poter enunciare quindi condizioni sufficienti a che un punto critico per una funzione di più variabili sia un punto di massimo o minimo relativi servono alcune definizioni e proprietà relative alle forme quadratiche che ora introdurremo.

Chiameremo dunque **una forma quadratica** una funzione  $Q : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$  del tipo:

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (77)$$

dove  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$  sono numeri reali fissati.

Se indichiamo con  $A$  la matrice simmetrica  $n \times n$  i cui elementi sono i numeri  $a_{ij}$ , con notazioni già usate nei paragrafi precedenti, possiamo scrivere:

$$Q(x) = (A \cdot x) \cdot x \quad \forall x \in \mathcal{R}^n$$

Ovviamente ogni forma quadratica è una funzione regolare ( di classe  $C^\infty$ ) ed omogenea di grado due, ossia

$$Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x) \quad \forall \lambda \in \mathcal{R}, x \in \mathcal{R}^n$$

Molto importanti nella teoria delle forme quadratiche sono le seguenti definizioni.

Data una forma quadratica  $Q : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ , diremo che :

i)  $Q$  è **definita positiva** se

$$Q(x) > 0 \quad \forall x \in \mathcal{R}^n, x \neq 0,$$

ii)  $Q$  è **definita negativa** se

$$Q(x) < 0 \quad \forall x \in \mathcal{R}^n, x \neq 0,$$

iii)  $Q$  è **semi-definita positiva** se

$$Q(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{R}^n,$$

iv)  $Q$  è **semi-definita negativa** se

$$Q(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathcal{R}^n$$

v)  $Q$  è **non definita** se esistono due punti diversi  $x_1$  e  $x_2$  tali che

$$Q(x_1) > 0 \quad e \quad Q(x_2) < 0$$

ossia se  $Q$  assume valori di segno contrario

Da notare che una forma quadratica può essere semi-definita positiva (o negativa) senza essere definita positiva (o negativa). Infatti la forma quadratica in  $\mathcal{R}^2$ :

$$Q(x, y) = x^2$$

è semi-definita positiva in quanto  $Q(x, y) \geq 0$ , ma  $Q$  si annulla anche in punti diversi da  $(0, 0)$  e quindi non è definita positiva.

Useremo in seguito il seguente risultato relativo alle forme quadratiche definite:

**Teorema 2.8** Sia  $Q : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$  una forma quadratica, allora:

i)  $Q$  è definita positiva se e solo se  $\exists m > 0$  tale che

$$Q(x) \geq m|x|^2 \quad \forall x \in \mathcal{R}^n, \quad (78)$$

ii)  $Q$  è definita negativa se e solo se  $\exists M < 0$  tale che

$$Q(x) \leq M|x|^2 \quad \forall x \in \mathcal{R}^n, \quad (79)$$

**Dimostrazione.** Proviamo la i). In modo simile si ragionerà, nel secondo caso. Indichiamo con

$$S = \{x \in \mathcal{R}^n, |x| = 1\}$$

la frontiera della sfera unità di  $\mathcal{R}^n$ . Se  $Q$  è una forma quadratica definita positiva, essendo una funzione continua ed essendo  $S$  un insieme limitato e chiuso,  $Q$  assume il suo valore minimo su  $S$ , ossia  $\exists v \in S$  con

$$Q(x) \geq Q(v) = m > 0 \quad \forall x \in S$$

Osserviamo infine che se  $x \in \mathcal{R}^n$ ,  $x \neq 0$  allora  $\frac{x}{|x|} \in S$  e quindi ottengo:

$$m \leq Q\left(\frac{x}{|x|}\right) = \frac{Q(x)}{|x|^2}$$

q.e.d. Siamo ora in grado di dimostrare il seguente:

**Teorema 2.9** Sia  $f : A \rightarrow \mathcal{R}$  una funzione con derivate parziali seconde continue in  $A$ , dove  $A \subset \mathcal{R}^n$  è un insieme aperto. Supponiamo che  $x_0 \in A$  sia un punto critico per la  $f$ , ossia che

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ed indichiamo con  $Q$  la forma quadratica delle derivate seconde di  $f$  in  $x_0$ , ossia la forma quadratica:

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) x_i x_j$$

Allora:

i) se la forma quadratica  $Q$  è definita positiva, il punto  $x_0$  è un punto di minimo relativo,

ii) se la forma quadratica  $Q$  è definita negativa, il punto  $x_0$  è un punto di massimo relativo,

iii) se la forma quadratica  $Q$  non è definita, il punto  $x_0$  non è né un punto di minimo relativo né un punto di massimo relativo.

In questo caso il punto  $x_0$  ( punto critico che non è né di massimo né di minimo relativo) viene chiamato **un punto sella**.

**Dimostrazione.** Proviamo la i). Applicando la formula di Taylor (75), ricordando che  $Df(x_0) = 0$  e la stima (78) per le forme quadratiche definite positive, si ottiene che

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \frac{1}{2} Q(x - x_0) + R_2(x, x_0) \geq \frac{1}{2} m |x - x_0|^2 + R_2(x, x_0) = \\ &= |x - x_0|^2 \left( \frac{m}{2} + \frac{R_2(x, x_0)}{|x - x_0|^2} \right) \end{aligned}$$

Ricordando infine la proprietà (76) del resto, possiamo trovare un raggio positivo  $r$ , tale che

$$\left| \frac{R_2(x, x_0)}{|x - x_0|^2} \right| < \frac{m}{4} \quad \forall x \in B_r(x_0)$$

Si ricava pertanto che

$$f(x) - f(x_0) \geq |x - x_0|^2 \left( \frac{m}{2} - \frac{m}{4} \right) = |x - x_0|^2 \frac{m}{4} \geq 0 \quad \forall x \in B_r(x_0)$$

e quindi  $x_0$  è un punto di minimo relativo.

La *ii*) si verifica in modo simile e quindi viene lasciata per esercizio. Per ottenere la *iii*), osserviamo che se  $Q$  non è definita, allora esistono due vettori  $v_1, v_2 \in \mathcal{R}^n$  che possiamo supporre di modulo uno, tali che  $Q(v_1) > 0$ ,  $Q(v_2) < 0$ , risulta allora, sempre per la (75),

$$f(x_0 + t v_1) - f(x_0) = \frac{1}{2} Q(t v_1) + R_2(x_0 + t v_1, x_0) = t^2 \left( \frac{1}{2} Q(v_1) + \frac{R_2(x_0 + t v_1, x_0)}{t^2} \right)$$

Siccome  $Q(v_1) > 0$  e per la (76),

$$\frac{R_2(x_0 + t v_1, x_0)}{t^2} \rightarrow 0 \quad \text{se } t \rightarrow 0$$

si ottiene che  $\exists r > 0$  tale che

$$f(x_0 + t v_1) - f(x_0) \geq 0 \quad \forall t, |t| < r$$

In maniera simile si può provare che  $\exists \rho > 0$  tale che

$$f(x_0 + t v_2) - f(x_0) \leq 0 \quad \forall t, |t| < \rho$$

Pertanto il punto  $x_0$  non è nè di massimo nè di minimo relativo.

q.e.d.

**Osservazione** La conclusione del teorema ora dimostrato non è più vera se la forma quadratica  $Q$  invece che definita positiva o negativa è solo semi-definita positiva o negativa. In tal caso, come vedremo poi considerando alcuni esempi, il punto  $x_0$  può ancora essere un punto di minimo o massimo relativo ma può anche essere un punto sella.

Concludiamo questa parte, dando alcune condizioni analitiche che ci permettono di stabilire se una forma quadratica è definita (positiva o negativa) oppure no.

**Caso di  $\mathcal{R}^2$**  Se la forma quadratica è definita in  $\mathcal{R}^2$  risulta una funzione del tipo:

$$Q(x, y) = a x^2 + 2 b x y + c y^2$$

dove  $a, b, c \in \mathcal{R}$  sono numeri fissati. Nel caso specifico che stiamo considerando, cioè quando la forma quadratica è quella delle derivate seconde di  $f$  in  $(x_0, y_0)$ , risulta

$$\begin{aligned} a &= f_{xx}(x_0, y_0) \\ b &= f_{xy}(x_0, y_0) \\ c &= f_{yy}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Se  $y \neq 0$ , possiamo scrivere

$$Q(x, y) = a x^2 + 2 b x y + c y^2 = y^2 \left( a \left( \frac{x}{y} \right)^2 + 2 b \left( \frac{x}{y} \right) + c \right) = y^2 (a t^2 + 2 b t + c)$$

dove abbiamo posto  $t = \frac{x}{y}$ . Ne deriva quindi che la forma quadratica  $Q$

- i) è definita positiva se e solo se  $\Delta = b^2 - a c < 0$  e  $a > 0$ ;
- ii) è definita negativa se e solo se  $\Delta = b^2 - a c < 0$  e  $a < 0$ ;
- iii) è semi-definita positiva se e solo se  $\Delta = b^2 - a c = 0$  e  $a \geq 0$ ;
- iv) è semi-definita negativa se e solo se  $\Delta = b^2 - a c = 0$  e  $a \leq 0$ ;

v) é non definita se e solo se  $\Delta = b^2 - ac > 0$ .

Osserviamo infine che nel caso della forma quadratica delle derivate seconde di una funzione  $f$  in  $(x_0, y_0)$ , risulta

$$\Delta = f_{xy}^2(x_0, y_0) - f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) = -\det H(x_0, y_0)$$

dove abbiamo indicato con  $H$  la matrice  $2 \times 2$  delle derivate seconde di  $f$ , ossia

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$$

La matrice  $H$  viene chiamata la **matrice hessiana** di  $f$  in  $(x, y)$ .

Nel caso generale, il problema di determinare se una forma quadratica  $Q$  sia definita è legato al problema di determinare il segno degli autovalori della matrice simmetrica  $A$ , associata alla forma quadratica.

Per completezza ricordiamo che un numero  $\lambda \in \mathcal{R}$  si dice un autovalore della matrice  $A$ , se esiste un vettore non nullo  $v \in \mathcal{R}^n$  tale che

$$A \cdot v = \lambda v$$

ossia, detto in maniera equivalente se

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{80}$$

Essendo  $A$  una matrice simmetrica, le soluzioni dell'equazione (80) sono reali e, contate con la dovuta molteplicità sono  $n$ . Risulta, dalle definizioni, immediato il seguente risultato:

Se  $A$  è una matrice simmetrica, indichiamo con

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$$

gli autovalori della matrice  $A$ , allora:

- i)  $Q$  é definita positiva se e solo se il minimo autovalore  $\lambda_1 > 0$ ;
- ii)  $Q$  é definita negativa se e solo se il massimo autovalore  $\lambda_n < 0$ ;
- iii)  $Q$  é semi-definita positiva se e solo se  $\lambda_1 \geq 0$ ;
- iv)  $Q$  é semi-definita negativa se e solo se  $\lambda_n \leq 0$ ;
- v)  $Q$  é non definita se e solo se  $\lambda_1 < 0$  e  $\lambda_n > 0$ .

Questa proprietà ora ricordata è una conseguenza del seguente:

**Teorema 2.10** *Siano*

$$m = \min\{Q(v), v \in S\}$$

$$M = \max\{Q(v), v \in S\}$$

dove ricordiamo che  $S = \{v \in \mathcal{R}^n, |v| = 1\}$  allora  $m$  ed  $M$  sono rispettivamente il più piccolo e il più grande autovalore della matrice  $A$  associata alla forma quadratica  $Q$ .

**Dimostrazione.** Dimostriamo il risultato per  $m$ , analogamente si procederà per  $M$ . Indichiamo con  $w \in S$  un punto di minimo, ossia un punto tale che  $Q(w) = m$ . Allora  $x = w$  è un punto di minimo assoluto per la funzione

$$F(x) = \frac{Q(x)}{|x|^2} = \frac{\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j}{|x|^2} \quad x \in \mathcal{R}^n - \{0\}$$

Infatti, se  $x \neq 0$ :

$$F(x) = \frac{Q(x)}{|x|^2} = Q\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \geq Q(w) = F(w)$$

essendo  $w$  un vettore unitario. Ne deriva quindi che

$$\frac{\partial F}{\partial x_h}(w) = 0 \quad \forall h = 1, 2, \dots, n$$

D'altra parte

$$\frac{\partial F}{\partial x_h}(x) = \frac{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\delta_{hi} x_j + x_i \delta_{hj}) |x|^2 - 2x_h \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \right)}{|x|^4}$$

Pertanto se  $x = w$ , ricordando che la matrice  $A$  è simmetrica, si ottiene:

$$\sum_{j=1}^n a_{hj} w_j - m w_h = 0 \quad \forall h = 1, 2, \dots, n$$

Ne deriva quindi che  $m$  è un autovalore della matrice  $A$ . Risulta anche il più piccolo degli autovalori. Infatti se  $\lambda \in \mathcal{R}$  è un altro autovalore e  $v \in \mathcal{R}^n$  un suo autovettore, si ottiene:

$$Q(v) = (A \cdot v) \cdot v = \lambda |v|^2$$

e quindi

$$\lambda = \frac{Q(v)}{|v|^2} = F(v) \geq F(w) = m$$

q.e.d.

Nel caso di tre variabili, l'equazione  $\det(A - \lambda I) = 0$  è un'equazione di terzo grado che può essere scritta nella forma seguente:

$$\lambda^3 + a \lambda^2 + b \lambda + c = 0$$

Allora valgono le seguenti affermazioni che lasciamo per esercizio:

- i) le soluzioni dell'equazione considerata sono tutte negative e quindi la forma quadratica associata è definita negativa se e solo se

$$a > 0, \quad b > 0 \quad c > 0 \tag{81}$$

- ii) le soluzioni dell'equazione considerata sono tutte positive e quindi la forma quadratica associata è definita positiva se e solo se

$$a < 0, \quad b > 0 \quad c < 0 \tag{82}$$

Ricordiamo infine che nel caso generale, se indichiamo con  $A_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) i minori principali che si possono estrarre dalla matrice  $A$  (ossia la matrice formata dagli elementi  $a_{ij}$   $i = 1, 2, \dots, k$ ;  $j = 1, 2, \dots, k$ ), allora:

- i) la forma quadratica  $Q$  associata ad  $A$  è definita positiva se e solo se  $\det A_k > 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, n$ ,  
 ii) la forma quadratica  $Q$  associata ad  $A$  è definita negativa se e solo se  $(-1)^k \det A_k > 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, n$

Consideriamo per concludere alcuni esempi.

1. Trovare gli eventuali punti di massimo o di minimo relativi della funzione :

$$f(x, y) = y e^{-x^2 - y^2}$$

Abbiamo:

$$\begin{cases} f_x = -2xy e^{-x^2 - y^2} = 0 \\ f_y = (1 - 2y^2) e^{-x^2 - y^2} = 0 \end{cases}$$

Pertanto i punti critici sono due  $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$  e  $(0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ . D'altra parte :

$$\begin{aligned} f_{xx} &= (-2y + 4x^2y) e^{-x^2-y^2} = 2y(2x^2 - 1) e^{-x^2-y^2} \\ f_{xy} &= (-2x + 4xy^2) e^{-x^2-y^2} = 2x(2y^2 - 1) e^{-x^2-y^2} \\ f_{yy} &= (-4y - 2y + 4y^3) e^{-x^2-y^2} = 2y(2y^2 - 3) e^{-x^2-y^2} \end{aligned}$$

e quindi :

$$\begin{aligned} H(0, \frac{1}{\sqrt{2}}) &= \begin{pmatrix} -\sqrt{2}e^{-1/2} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2}e^{-1/2} \end{pmatrix} \\ H(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}) &= \begin{pmatrix} \sqrt{2}e^{-1/2} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2}e^{-1/2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Allora  $\det H(0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \det H(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = 4e^{-1}$ . Ne deriva quindi che il punto  $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$  è un punto di massimo relativo , mentre il punto  $(0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$  è un punto di minimo relativo.

2. Trovare gli eventuali punti di massimo o di minimo relativi della funzione:

$$f(x, y) = x^2 + y^3 - xy$$

Abbiamo :

$$\begin{cases} f_x = 2x - y = 0 \\ f_y = -3y^2 - x = 0 \end{cases}$$

Pertanto :

$$\begin{cases} y = 2x \\ -3(4x^2) - x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x \\ x(12x + 1) = 0 \end{cases}$$

Otengo quindi i due punti critici :  $(0, 0)$  e  $(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{6})$ . D'altra parte si ha :

$$f_{xx} = 2, \quad f_{xy} = -1, \quad f_{yy} = -6y$$

Pertanto

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad H(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{6}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Possiamo concludere quindi che  $(0, 0)$  è un punto sella , mentre  $(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{6})$  è un punto di minimo relativo.

3. Trovare gli eventuali punti di massimo o di minimo relativi della funzione :

$$f(x, y) = xy e^{-x^2-y^2}$$

Abbiamo :

$$\begin{cases} f_x = (y - 2x^2y) e^{-x^2-y^2} = y(1 - 2x^2) e^{-x^2-y^2} = 0 \\ f_y = (x - 2xy^2) e^{-x^2-y^2} = x(1 - 2y^2) e^{-x^2-y^2} = 0 \end{cases}$$

Pertanto i punti critici sono cinque:  $(0, 0)$ ,  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ,  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ,  $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  e  $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ . D'altra parte :

$$\begin{aligned} f_{xx} &= (-4xy - 2xy + 4x^3y) e^{-x^2-y^2} = 2xy(2x^2 - 3) e^{-x^2-y^2} \\ f_{xy} &= (1 - 2x^2 - 2y^2 + 4x^2y^2) e^{-x^2-y^2} \\ f_{yy} &= (-4xy - 2xy + 4xy^3) e^{-x^2-y^2} = 2xy(2y^2 - 3) e^{-x^2-y^2} \end{aligned}$$

e quindi :

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = H\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{pmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & 2 - 2e^{-1} \end{pmatrix}$$

$$H\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = H\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{pmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & 2 - 2e^{-1} \end{pmatrix}$$

Ne deriva quindi che il punto  $(0, 0)$  è un punto sella, i punti  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  e  $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$  sono punti di massimo relativo, mentre i punti  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$  e  $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  sono punti di minimo relativo.

4. Trovare gli eventuali punti di massimo o di minimo relativi della funzione :

$$f(x, y) = x^2 y + y^3 - 4xy$$

Abbiamo:

$$\begin{cases} f_x = 2xy - 4y = 0 \\ f_y = x^2 + 3y^2 - 4x = 0 \end{cases}$$

Ne deriva quindi

$$\begin{cases} y = 0 \\ x(x - 4) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 2 \\ 3y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Pertanto i punti critici sono quattro

$$P_1 = (0, 0), P_2 = (4, 0), P_3 = \left(2, \frac{2}{\sqrt{3}}\right), P_4 = \left(2, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

D'altra parte :

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2y \\ f_{xy} &= 2x - 4 \\ f_{yy} &= 6y \end{aligned}$$

e quindi :

$$H(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad H(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H(P_3) = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{12}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad H(P_4) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -\frac{12}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Ne deriva quindi che i punti  $P_1$  e  $P_2$  sono punti sella,  $P_3$  è un punto di minimo relativo, mentre  $P_4$  è un punto di massimo relativo.

5. Trovare gli eventuali punti di massimo o di minimo relativi della funzione :

$$f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 - xz - xy$$

Abbiamo:

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 - z - x = 0 \\ f_y = 2y - x = 0 \\ f_z = 2z - x = 0 \end{cases}$$

Dalle due ultime equazioni si ottiene:  $y = x/2$ ,  $z = x/2$  e quindi dalla prima  $3x^2 - x = 0$ , pertanto i punti critici sono due  $(0, 0, 0)$  e  $(1/3, 1/6, 1/6)$ . D'altra parte :

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = -1, \quad f_{xz} = -1, \quad f_{yy} = 2, \quad f_{yz} = 0, \quad f_{zz} = 2$$

e quindi :

$$H(0, 0, 0) = H_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H(1/6, 1/6, 1/6) = H_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Allora

$$\begin{aligned} \det(H_1 - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \\ &= -(2-\lambda) + (2-\lambda)[-2\lambda + \lambda^2 - 1] = -(\lambda^3 - 4\lambda^2 + 2\lambda + 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(H_2 - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \\ &= -(2-\lambda) + (2-\lambda)[3 + \lambda^2 - 4\lambda] = -(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 10\lambda - 4) \end{aligned}$$

Possiamo quindi concludere, usando le proprietà (81) e (82), che la matrice  $H_1$  non è definita, mentre la matrice  $H_2$  è definita positiva e quindi  $(0, 0, 0)$  è un punto sella, mentre  $(1/3, 1/6, 1/6)$  è un punto di minimo relativo.



### 3 MISURA ED INTEGRALE DI LEBESGUE

Questo capitolo è dedicato allo studio delle prime proprietà della misura e dell'integrale di Lebesgue in  $\mathcal{R}^n$ .

Inizieremo tuttavia col dare alcune definizioni e concetti di base riguardanti la teoria della misura in generale.

#### 3.1 Misure ed insiemi misurabili

Indichiamo con  $X$  un insieme e con  $\mathcal{P}(X)$  l'insieme delle parti di  $X$  ossia la famiglia di tutti i sottoinsiemi di  $X$ . Indichiamo inoltre con  $[0, +\infty] = [0, \infty) \cup \{+\infty\}$  la semiretta reale completata.

**Definizione 3.1 (Misura non negativa)** Diremo che una funzione  $\alpha : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  è una **misura non negativa** (o una misura esterna non negativa) se

i)  $\alpha(\emptyset) = 0$ ,

ii)

$$\alpha(A) \leq \sum_{h=1}^{\infty} \alpha(B_h) \quad \forall A, B_h \in \mathcal{P}(X) \text{ con } A \subset \bigcup_{h=1}^{\infty} B_h \quad (83)$$

La proprietà (83) che definisce una misura viene chiamata **proprietà  $\sigma$ -subadditiva**.

Da notare il fatto che la (83) implica la monotonia della misura, ossia il fatto che se  $A \subset B$  allora  $\alpha(A) \leq \alpha(B)$ .

Alcuni esempi interessanti di misure sono i seguenti:

a) **Counting measure**

È la misura definita da

$$\alpha(A) = \text{cardinalità di } A = \text{numero degli elementi di } A$$

b) **Misura di Dirach**

Fissato  $x_0 \in X$ , si chiama misura di Dirach concentrata in  $x_0$ , la misura definita da:

$$\alpha(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in A \\ 0 & \text{se } x_0 \notin A \end{cases}$$

c) **Misure  $\delta$ -approssimanti di Haudorff**

Supponimo che  $X = \mathcal{R}^n$  e  $\delta, k$  siano due numeri positivi, definiamo

$$H_{\delta}^k(A) = \inf \left\{ \sum_{h=1}^{\infty} (\text{diam}(B_h))^k, A \subset \bigcup_{h=1}^{\infty} B_h, \text{diam}(B_h) < \delta \right\}$$

dove  $\text{diam}(B) = \sup\{|x - y|, x, y \in B\}$ .

Se  $0 < \delta < \delta'$ , risulta  $H_{\delta'}^k(A) \leq H_{\delta}^k(A)$ ,  $\forall A \subset \mathcal{R}^n$ . La misura

$$H^k(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_{\delta}^k(A) = \sup_{\delta > 0} H_{\delta}^k(A) \quad A \subset \mathcal{R}^n \quad (84)$$

viene chiamata **la misura di Hausdorff k-dimensionale** di  $A$ .

d) **Misura esterna di Lebesgue**

Indichiamo con  $Q \subset \mathcal{R}^n$  un rettangolo  $n$ -dimensionale limitato e chiuso, ossia un insieme del tipo:

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

dove  $a_i, b_i \in \mathcal{R}$ ,  $a_i \leq b_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Chiameremo misura di  $Q$  e la indicheremo con  $|Q|$  il numero non negativo:

$$|Q| = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

Allora la funzione:

$$\mathcal{L}(A) = \inf \left\{ \sum_{h=1}^{\infty} |Q_h|, A \subset \bigcup_{h=1}^{\infty} Q_h \right\} \quad (85)$$

viene chiamata **la misura di Lebesgue** o la misura esterna di Lebesgue di  $A$ .

La verifica che le funzioni di insieme sopra definite siano in effetti delle misure non negative viene lasciata per esercizio. Per dare un'idea però del tipo di ragionamento da seguire riportiamo la verifica nel caso della misura di Lebesgue. Sia dunque

$$A \subset \bigcup_{h=1}^{\infty} B_h$$

Possiamo supporre che  $\mathcal{L}(B_h) < +\infty \quad \forall h \in \mathcal{N}$  perchè altrimenti la  $\sigma$ -subadditività è immediata. Usando la seconda proprietà caratteristica dell'estremo inferiore, possiamo allora  $\forall h \in \mathcal{N}$ ,  $\varepsilon > 0$  trovare una successione di rettangoli  $\{Q_k^{(h)}\}_{k \in \mathcal{N}}$  tale che

$$B_h \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k^{(h)} \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k^{(h)}| < \mathcal{L}(B_h) + \varepsilon 2^{-h}$$

Siccome

$$A \subset \bigcup_{h=1}^{\infty} B_h \subset \bigcup_{h=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k^{(h)}$$

risulta della definizione (85):

$$\mathcal{L}(A) \leq \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k^{(h)}| \leq \sum_{h=1}^{\infty} \mathcal{L}(B_h) + \varepsilon$$

Pertanto la  $\sigma$ -subadditività della misura di Lebesgue si ottiene per  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Una proprietà elementare che uno si aspetta da una misura "ragionevole" è che sia additiva su insiemi disgiunti, ossia che, se  $A \cap B = \emptyset$ , allora  $\alpha(A \cup B) = \alpha(A) + \alpha(B)$ .

Come vedremo anche nel seguito più in particolare per la misura di Lebesgue, questa proprietà non vale in generale per una coppia generica di insiemi disgiunti, ma solo se  $A, B$  stanno in una opportuna sottofamiglia di  $\mathcal{P}(X)$ : la sottofamiglia degli insiemi misurabili.

Seguendo la teoria della misura sviluppata dal matematico Caratheodory, noi daremo la seguente definizione:

**Definizione 3.2 Definizione di misurabilità secondo Caratheodory** Se  $\alpha$  è una misura non negativa su di un insieme  $X$ , diremo che  $M \subset X$  è un insieme  $\alpha$ -misurabile se

$$\alpha(A) = \alpha(A \cap M) + \alpha(A - M) \quad \forall A \subset X \quad (86)$$

Va notato che, essendo ogni misura  $\sigma$ -subadditiva, per verificare che un insieme è  $\alpha$ -misurabile, basta verificare che

$$\alpha(A) \geq \alpha(A \cap M) + \alpha(A - M) \quad \forall A \subset X \text{ con } \alpha(A) < +\infty \quad (87)$$

Dalla (87) si ricava subito che ogni insieme  $M$  con  $\alpha(M) = 0$  è misurabile.

Va notato inoltre che la definizione di misurabilità (86) equivale alla seguente richiesta:

$$\alpha(B \cup C) = \alpha(B) + \alpha(C) \quad \forall B \subset M, \forall C \subset X - M$$

Noi indicheremo con  $\mathcal{M}_\alpha \subset \mathcal{P}(X)$  la famiglia degli insiemi  $\alpha$ -misurabili.

Fondamentale nella teoria della misura è il seguente:

**Teorema 3.1** *Sia  $\alpha$  una misura non negativa su di un insieme  $X$ . Allora  $\mathcal{M}_\alpha$  è una  $\sigma$ -algebra di insiemi e la misura  $\alpha$  ristretta ad  $\mathcal{M}_\alpha$  è  $\sigma$ -additiva, ossia:*

i) Se  $M \in \mathcal{M}_\alpha$  allora  $X - M \in \mathcal{M}_\alpha$ ;

ii) se  $\{M_h\}_{h \in \mathcal{N}}$  è una successione con  $M_h \in \mathcal{M}_\alpha \quad \forall h \in \mathcal{N}$ , allora:

$$\bigcup_{h=1}^{\infty} M_h \in \mathcal{M}_\alpha ; \quad \bigcap_{h=1}^{\infty} M_h \in \mathcal{M}_\alpha$$

iii) se  $\{M_h\}_{h \in \mathcal{N}}$  è una successione con  $M_h \in \mathcal{M}_\alpha \quad \forall h \in \mathcal{N}$  e  $M_h \cap M_k = \emptyset \quad \forall h \neq k$ , allora:

$$\alpha \left( \bigcup_{h=1}^{\infty} M_h \right) = \sum_{h=1}^{\infty} \alpha(M_h)$$

**Dimostrazione.**

i) Questa proprietà è immediata, perchè la definizione di misurabilità è simmetrica rispetto alla differenza, in quanto

$$A \cap (X - M) = A - M$$

$$A - (X - M) = A \cap M$$

ii) a) Verifichiamo in primo luogo che se  $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_\alpha$ , allora  $M_1 \cup M_2 \in \mathcal{M}_\alpha$ . Se  $A \in \mathcal{P}(X)$ , per la misurabilità di  $M_1$ , si ottiene:

$$\alpha(A) = \alpha(A \cap M_1) + \alpha(A - M_1)$$

e per la misurabilità di  $M_2$  applicata ad  $A - M_1$ :

$$\alpha(A) = \alpha(A \cap M_1) + \alpha((A - M_1) \cap M_2) + \alpha(A - M_1 - M_2)$$

ed usando ancora la misurabilità di  $M_1$  sui primi due addendi:

$$\begin{aligned} \alpha(A) &= \alpha((A \cap M_1) \cup ((A - M_1) \cap M_2)) + \alpha(A - M_1 - M_2) = \\ &= \alpha(A \cap (M_1 \cup M_2)) + \alpha(A - (M_1 \cup M_2)) \end{aligned}$$

Pertanto  $M_1 \cup M_2 \in \mathcal{M}_\alpha$ .

b) Ora con un breve ragionamento per induzione (farlo per esercizio), si può verificare subito che il risultato si può estendere ad un numero finito di insiemi, ossia

$$\text{se } M_h \in \mathcal{M}_\alpha, \quad h = 1, 2, \dots, k \implies \bigcup_{h=1}^k M_h \in \mathcal{M}_\alpha$$

c) D'altra parte, dalle relazioni:

$$X - (M_1 \cap M_2) = (X - M_1) \cup (X - M_2)$$

$$M_1 - M_2 = M_1 \cap (X - M_2)$$

si vede subito che l'intersezione e la differenza di insiemi misurabili è pure misurabile, come pure l'intersezione di un numero finito qualunque di misurabili.

iii) Sia ora  $M_h \in \mathcal{M}_\alpha$  una successione di insiemi. Supponiamo che sia in primo luogo  $M_h \cap M_k = \emptyset$  se  $h \neq k$ . Applicando la (86) con  $M = M_1$  ed  $A = A \cap (M_1 \cup M_2)$ , si ottiene:

$$\alpha(A \cap (M_1 \cup M_2)) = \alpha(A \cap M_1) + \alpha(A \cap M_2)$$

e quindi  $\forall k \in \mathcal{N}$ :

$$\alpha\left(A \cap \bigcup_{h=1}^k M_h\right) = \sum_{h=1}^k \alpha(A \cap M_h)$$

Usando infine la monotonia della misura, risulta:

$$\alpha\left(A \cap \bigcup_{h=1}^{\infty} M_h\right) \geq \sum_{h=1}^k \alpha(A \cap M_h)$$

e quindi, facendo tendere  $k \rightarrow \infty$ :

$$\alpha\left(A \cap \bigcup_{h=1}^{\infty} M_h\right) \geq \sum_{h=1}^{\infty} \alpha(A \cap M_h) \geq \alpha\left(A \cap \bigcup_{h=1}^{\infty} M_h\right)$$

Ne deriva quindi che:

$$\alpha\left(A \cap \bigcup_{h=1}^{\infty} M_h\right) = \sum_{h=1}^{\infty} \alpha(A \cap M_h) \quad (88)$$

Usando la misurabilità della riunione finita di misurabili si ottiene infine:

$$\alpha(A) = \alpha\left(A \cap \bigcup_{h=1}^k M_h\right) + \alpha\left(A - \bigcup_{h=1}^k M_h\right) \geq \sum_{h=1}^k \alpha(A \cap M_h) + \alpha\left(A - \bigcup_{h=1}^{\infty} M_h\right)$$

e per  $k \rightarrow \infty$ , dalla (88):

$$\begin{aligned} \alpha(A) &\geq \sum_{h=1}^{\infty} \alpha(A \cap M_h) + \alpha\left(A - \bigcup_{h=1}^{\infty} M_h\right) = \\ &= \alpha\left(A \cap \bigcup_{h=1}^{\infty} M_h\right) + \alpha\left(A - \bigcup_{h=1}^{\infty} M_h\right) \end{aligned}$$

Da cui segue la misurabilità della riunione infinita.

Se gli insiemi  $M_h$  non fossero a due a due disgiunti, basta considerare la nuova successione:  $M'_1 = M_1$  e se  $h \geq 1$ :

$$M'_{h+1} = M_{h+1} - \bigcup_{j=1}^h M_j$$

per ottenere una nuova successione di insiemi ancora misurabili con  $M'_h \cap M'_k = \emptyset$  se  $h \neq k$  e con

$$\bigcup_{h=1}^{\infty} M'_h = \bigcup_{h=1}^{\infty} M_h$$

q.e.d.

**Corollario** Una conseguenza importante del teorema precedente è la seguente proprietà che consente di passare al limite su successioni monotone. In particolare:

- i) Supponiamo che  $M_h \in \mathcal{M}_\alpha$  sia una successione crescente ossia supponiamo che  $M_h \subset M_{h+1} \quad \forall h \in \mathcal{N}$ , allora:

$$\alpha\left(\bigcup_{h=1}^{\infty} M_h\right) = \lim_{h \rightarrow \infty} \alpha(M_h) \quad (89)$$

- ii) Supponiamo che  $M_h \in \mathcal{M}_\alpha$  sia una successione decrescente, ossia supponiamo che  $M_{h+1} \subset M_h \quad \forall h \in \mathcal{N}$  e supponiamo inoltre che  $\alpha(M_1) < +\infty$ , allora:

$$\alpha\left(\bigcap_{h=1}^{\infty} M_h\right) = \lim_{h \rightarrow \infty} \alpha(M_h) \quad (90)$$

**Dimostrazione.**

- i) Possiamo supporre che sia  $\alpha(M_h) < +\infty, \forall h \in \mathcal{N}$ . Ponendo per semplicità  $M_0 = \emptyset$ , definiamo la nuova famiglia di insiemi:

$$M'_h = M_h - M_{h-1} \quad h \in \mathcal{N}$$

Otteniamo che  $M'_h \in \mathcal{M}_\alpha \quad \forall h \in \mathcal{N}$ ,  $M'_h \cap M'_k = \emptyset$  se  $h \neq k$  e :

$$\bigcup_{h=1}^{\infty} M'_h = \bigcup_{h=1}^{\infty} M_h$$

Possiamo quindi concludere che:

$$\begin{aligned} \alpha\left(\bigcup_{h=1}^{\infty} M_h\right) &= \alpha\left(\bigcup_{h=1}^{\infty} M'_h\right) = \sum_{h=1}^{\infty} \alpha(M'_h) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{h=1}^k \alpha(M'_h) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k [\alpha(M_j) - \alpha(M_{j-1})] = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(M_k). \end{aligned}$$

- ii) Per ottenere il secondo teorema di passaggio al limite, basta porre  $M'_h = M_1 - M_h$  ed applicare il primo teorema di passaggio al limite alla successione  $M'_h$ .

q.e.d.

## 3.2 Misure metriche

Supponiamo in questo paragrafo che  $X$  sia uno spazio metrico, ossia che sia definita in  $X$  una distanza  $d$ .

Ricordiamo, per comodità dello studente, che una distanza è una funzione  $d : X \times X \rightarrow \mathcal{R}$  con le seguenti proprietà:

- i)  $d(x, y) \geq 0$  e  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ ;
- ii)  $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$ ;
- iii)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X$ .

**Definizione 3.3 (Misura metrica)** Se  $X$  è uno spazio metrico ed  $\alpha$  è una misura su  $X$ , diremo che  $\alpha$  è una *misura metrica* se

$$\alpha(A \cup B) = \alpha(A) + \alpha(B) \quad \forall A, B \subset X, \text{ con } \text{dist}(A, B) > 0 \quad (91)$$

dove  $\text{dist}(A, B) = \inf\{d(x, y), x \in A, y \in B\}$ .

Per le misure metriche vale il seguente importante:

**Teorema 3.2** *Se  $\alpha$  è una misura metrica su  $X$ , allora ogni insieme chiuso è  $\alpha$ -misurabile.*

**Dimostrazione.** Sia  $C \subset X$  un insieme chiuso e sia  $A \subset X$  un insieme con  $\alpha(A) < +\infty$ . Indichiamo con

$$C_h = \left\{ x \in X, \text{dist}(x, C) > \frac{1}{h} \right\} \quad h \in \mathcal{N}$$

$C_h$  è una successione crescente di insiemi ed, essendo  $X - C$  un insieme aperto, risulta:

$$X - C = \bigcup_{h=1}^{\infty} C_h$$

Poniamo infine  $D_1 = C_1$  e se  $h \geq 1$ ,  $D_{h+1} = C_{h+1} - C_h$ .

Osserviamo che risulta:

$$\begin{aligned} \text{dist}(D_{2h+2}, D_{2h}) &> 0 \\ \text{dist}(D_{2h+1}, D_{2h-1}) &> 0 \end{aligned} \quad \forall h \in \mathcal{N} \quad (92)$$

Infatti se  $x \in D_{2h+2}$  e  $y \in D_{2h}$  risulta :

$$\text{dist}(x, C) \leq \frac{1}{2h+1}, \quad \text{dist}(y, C) > \frac{1}{2h}$$

Fissato allora  $\varepsilon > 0$  esiste  $z \in C$  con

$$\text{dist}(x, z) < \text{dist}(x, C) + \varepsilon \leq \frac{1}{2h+1} + \varepsilon$$

Ne segue che

$$d(x, y) \geq d(y, z) - d(z, x) > \frac{1}{2h} - \frac{1}{2h+1} - \varepsilon = \frac{1}{2h(2h+1)} - \varepsilon$$

e quindi:

$$\text{dist}(D_{2h+2}, D_{2h}) \geq \frac{1}{2h(2h+1)}$$

Analogamente si prova la seconda delle (92).

Dalla (92) ed un semplice ragionamento per induzione, si ricava,  $\forall k \in \mathcal{N}$ :

$$\sum_{h=1}^k \alpha(A \cap D_{2h}) = \alpha \left( A \cap \bigcup_{h=1}^k D_{2h} \right) \leq \alpha(A) < +\infty$$

$$\sum_{h=1}^k \alpha(A \cap D_{2h-1}) = \alpha \left( A \cap \bigcup_{h=1}^k D_{2h-1} \right) \leq \alpha(A) < +\infty$$

e quindi

$$\sum_{h=1}^{\infty} \alpha(A \cap D_h) \leq 2\alpha(A) < +\infty$$

Ricordando infine che:

$$\begin{aligned} \bigcup_{h=1}^k (A \cap D_h) &= A \cap C_k \\ \text{dist}(A \cap C, A \cap C_k) &> 0 \end{aligned}$$

possiamo concludere che:

$$\alpha(A \cap C) + \alpha(A - C) = \alpha(A \cap C) + \alpha \left( A \cap \bigcup_{h=1}^{\infty} D_h \right) \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \alpha(A \cap C) + \alpha\left(A \cap \bigcup_{h=1}^k D_h\right) + \sum_{h=k+1}^{\infty} \alpha(A \cap D_h) = \\ &= \alpha(A \cap (C \cup C_k)) + \sum_{h=k+1}^{\infty} \alpha(A \cap D_h) \leq \alpha(A) + \sum_{h=k+1}^{\infty} \alpha(A \cap D_h) \end{aligned}$$

Si ottiene infine la misurabilità di  $C$ , ricordando che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{h=k+1}^{\infty} \alpha(A \cap D_h) = 0$$

q.e.d.

**Osservazione 1** In uno spazio metrico  $(X, d)$ , indicheremo con  $\mathcal{B}$  la minima  $\sigma$ -algebra che contiene gli insiemi chiusi. Tale minima  $\sigma$ -algebra viene chiamata **la  $\sigma$ -algebra degli insiemi di Borel** e gli elementi di  $\mathcal{B}$  vengono chiamati insiemi boreliani (o di Borel).

Ne deriva quindi che, se  $\alpha$  è una misura metrica in  $(X, d)$ , allora  $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}_\alpha$ .

**Osservazione 2** La misura di Lebesgue definita dalla (85), è una misura metrica in  $\mathcal{R}^n$ . Siano infatti  $A, B \subset \mathcal{R}^n$  due insiemi con  $dist(A, B) = \delta > 0$  e sia  $Q_h$  una successione di rettangoli con

$$A \cup B \subset \bigcup_{h=1}^{\infty} Q_h$$

Noi possiamo supporre, a meno di suddividere ognuno dei rettangoli  $Q_h$  in un numero finito di rettangoli più piccoli che sia  $diam(Q_h) < \delta$  in modo che, se un rettangolo interseca  $A$  non può intersecare anche  $B$ .

Se indichiamo quindi con

$$I_A = \{h \in \mathcal{N}, Q_h \cap A \neq \emptyset\}$$

$$I_B = \{h \in \mathcal{N}, Q_h \cap B \neq \emptyset\}$$

risulta  $I_A \cap I_B = \emptyset$  e

$$A \subset \bigcup_{h \in I_A} Q_h \quad B \subset \bigcup_{h \in I_B} Q_h$$

Si ottiene quindi

$$\sum_{h=1}^{\infty} |Q_h| \geq \sum_{h \in I_A} |Q_h| + \sum_{h \in I_B} |Q_h| \geq \mathcal{L}(A) + \mathcal{L}(B)$$

Ne segue che

$$\mathcal{L}(A \cup B) \geq \mathcal{L}(A) + \mathcal{L}(B)$$

Ragionando nello stesso modo si può verificare che anche la misura di Hausdorff  $k$ -dimensionale definita dalla (84) è una misura metrica.

### 3.3 Misura di Lebesgue

Come abbiamo appena notato la misura di Lebesgue è una misura metrica su  $\mathcal{R}^n$  e quindi ogni insieme boreliano è Lebesgue-misurabile.

Per brevità in seguito la famiglia degli insiemi misurabili secondo Lebesgue verrà indicata con  $\mathcal{M}$ .

Oltre alle proprietà generali che derivano dalla teoria astratta della misura, la misura di Lebesgue ha le seguenti proprietà:

1.  $\forall x \in \mathcal{R}^n, \mathcal{L}(\{x\}) = 0$ . Ne segue, per la proprietà  $\sigma$ -subadditiva della misura, che ogni insieme  $A \subset \mathcal{R}^n$  numerabile ha misura nulla;
2. **Invarianza per traslazioni** la misura di Lebesgue è invariante per traslazioni, ossia se  $x_0 \in \mathcal{R}^n$ , allora  $\mathcal{L}(x_0 + A) = \mathcal{L}(A) \quad \forall A \subset \mathcal{R}^n$ ;

3. se  $\lambda > 0$ , allora  $\mathcal{L}(\lambda A) = \lambda^n \mathcal{L}(A)$ ;

4. se  $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$  é una funzione non negativa ed integrabile secondo Riemann, allora il sottografico di  $f$ :

$$M_f = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2, x \in [a, b], 0 < y < f(x)\}$$

é un insieme misurabile secondo Lebesgue e si ha

$$\mathcal{L}(M_f) = \int_a^b f(x) dx$$

Da notare che se  $g : [0, 1] \rightarrow \mathcal{R}$  é la funzione che usualmente viene presa come esempio di funzione non integrabile secondo Riemann, ossia la funzione:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 1] \cap \mathcal{Q} \\ 0 & \text{se } x \in [0, 1] - \mathcal{Q} \end{cases}$$

risulta  $\mathcal{L}(M_g) = 0$ .

5. La misura di Lebesgue é una misura di Radon, ossia ha le seguenti proprietà:

a) Se  $K \subset \mathcal{R}^n$  é un insieme compatto, allora  $\mathcal{L}(K) < +\infty$ ;

b)  $\forall E \subset \mathcal{R}^n$  risulta:

$$\mathcal{L}(E) = \inf\{\mathcal{L}(A), A \text{ aperto } E \subset A\}$$

c)  $\forall M \in \mathcal{M}$ , risulta:

$$\mathcal{L}(M) = \sup\{\mathcal{L}(K), K \text{ compatto } K \subset M\}$$

6. La misura di Lebesgue é una misura regolare, ossia:  $\forall E \subset \mathcal{R}^n$ , esiste  $M \in \mathcal{M}$  con  $E \subset M$  e  $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(M)$ .

7. Esistono degli insiemi che non sono Lebesgue-misurabili.

Lascieremo la dimostrazione di queste proprietà per esercizio. Ne riporteremo solo alcune per mettere in evidenza il modo di ragionare.

5. b) Basta osservare che nella definizione di misura di Lebesgue i rettangoli  $Q_h$  si possono scegliere aperti. Infatti, fissato  $\varepsilon > 0$ , se il rettangolo  $Q_h$  non fosse aperto, lo posso sostituire con un rettangolo aperto  $Q'_h$  con  $Q_h \subset Q'_h$  e  $|Q'_h| < |Q_h| + \varepsilon 2^{-h}$ , cosí che risulta:

$$E \subset \bigcup_{h=1}^{\infty} Q'_h = A \text{ (insieme aperto) e } \mathcal{L}(A) \leq \sum_{h=1}^{\infty} |Q'_h| \leq \sum_{h=1}^{\infty} |Q_h| + \varepsilon$$

5. c) Supponiamo in primo luogo che  $M$  sia limitato e che sia  $M \subset \overline{B}_R$ . Siccome  $\overline{B}_R - M \in \mathcal{M}$ ,  $\forall \varepsilon > 0$  esiste un aperto  $\Omega = \Omega_\varepsilon$  con  $\overline{B}_R - M \subset \Omega$  e

$$\mathcal{L}(\Omega - (\overline{B}_R - M)) = \mathcal{L}(\Omega) - \mathcal{L}(\overline{B}_R - M) < \varepsilon$$

Poniamo  $K = \overline{B}_R - \Omega$ .  $K$  essendo limitato e chiuso, é un insieme compatto. Verifichiamo ora che:

i)  $K \subset M$ ,

ii)  $M - K \subset \Omega - (\overline{B}_R - M)$ .

Infatti se  $x \in K$ , allora  $x \in \overline{B}_R$ ,  $x \notin \Omega$  e quindi  $x \notin \overline{B}_R - M$  e pertanto  $x \in M$ . D'altra parte se  $x \in M - K$ , allora  $x \in M$ ,  $x \notin K$ . Allora  $x \in \Omega$  e  $x \in \Omega - (\overline{B}_R - M)$ . Per la ii), segue allora che

$$\mathcal{L}(M - K) = \mathcal{L}(M) - \mathcal{L}(K) < \varepsilon$$

Se  $M$  non é limitato, ricordiamo che per la (89):

$$\mathcal{L}(M) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(M \cap B_R)$$

Pertanto se  $\lambda < \mathcal{L}(M)$ , esiste  $R > 0$  tale che  $\mathcal{L}(M \cap B_R) > \lambda$  e, per la prima parte della dimostrazione, esiste un compatto  $K \subset M \cap B_R$  con  $\mathcal{L}(K) > \lambda$ .



6. Basta considerare il caso  $\mathcal{L}(E) < +\infty$ . Siccome

$$\mathcal{L}(E) = \inf\{\mathcal{L}(A), A \text{ aperto } E \subset A\}$$

$\forall h \in \mathcal{N}$ , posso scegliere un aperto  $A_h$  tale che:

$$E \subset A_h, \quad \mathcal{L}(A_h) < \mathcal{L}(E) + \frac{1}{h}$$

Possiamo inoltre supporre che la successione  $A_h$  sia decrescente ( se cosí non fosse basta sostituire  $A_h$  con  $A'_h = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_h$ ).

Posto allora

$$M = \bigcap_{h=1}^{\infty} A_h$$

si ottiene un insieme Lebesgue-misurabile, essendo intersezione di aperti, con  $E \subset M$  e (vedi (90)):

$$\mathcal{L}(M) = \lim_{h \rightarrow \infty} \mathcal{L}(A_h) \leq \mathcal{L}(E)$$

7. Riportiamo un esempio di insieme non misurabile secondo Lebesgue nel caso  $n = 1$ .

Consideriamo la relazione di equivalenza in  $\mathcal{R}$  definita da:

$$x \sim y \iff y - x = r \in \mathcal{Q}$$

( dove ricordiamo che  $\mathcal{Q}$  é l'insieme dei numeri razionali ). Indichiamo con  $[x]$  la classe di equivalenza di  $x$ , ossia:

$$[x] = \{y \in \mathcal{R}, y \sim x\}$$

e osserviamo che  $\forall x \in \mathcal{R}, [x] \cap (0, 1) \neq \emptyset$ . Infatti scelto  $r \in \mathcal{Q}$  con  $x-1 < r < x$  e posto  $y = x-r$ , risulta  $y \sim x$  e  $y \in (0, 1)$ . Possiamo allora costruire un insieme  $A$  prendendo da ogni classe di equivalenza un singolo elemento che sta nell'intervallo  $(0, 1)$ . In altre parole l'insieme  $A$  ha le seguenti proprietà:

- $A \subset (0, 1)$ ,
- $\forall y \in \mathcal{R} \exists x \in A$  con  $x \sim y$ ,
- se  $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$ , allora  $x_1$  e  $x_2$  non sono equivalenti tra loro.

Verifichiamo ora che :

- se  $r, s \in \mathcal{Q}, r \neq s$ , allora:

$$(r + A) \cap (s + A) = \emptyset,$$

- $\forall x \in (0, 1) \exists r \in \mathcal{Q} \cap [-1, 1]$  tale che  $x \in r + A$ ,

- se indichiamo con  $r_h, h = 1, 2, \dots$  la successione di tutti i numeri razionali contenuti nell'intervallo  $[-1, 1]$ , ossia:

$$\{r_h; h = 1, 2, \dots\} = \mathcal{Q} \cap [-1, 1]$$

e poniamo:

$$F = \bigcup_{h=1}^{\infty} (r_h + A)$$

si ha la doppia inclusione:

$$(0, 1) \subset F \subset [-1, 2]$$

Infatti se fosse  $(r + A) \cap (s + A) \neq \emptyset$ , esisterebbero  $x, y \in A$  con  $r + x = s + y$  e quindi  $y - x = s - r$ . Risulterebbe pertanto  $y \sim x$  in contrasto con la definizione di  $A$ . Se  $x \in (0, 1)$ , esiste  $y \in A$  con  $y \sim x$  e quindi  $x - y = r \in \mathcal{Q}$ ; ossia  $x = r + y \in r + A$  ed  $r = x - y \in (-1, 1)$  Infine se  $r \in [-1, 1]$  e  $x \in A$ , risulta  $-1 \leq r + x \leq 2$ .

Supponiamo infine, ragionando per assurdo, che  $A$  sia misurabile. Risulterebbe:

$$\mathcal{L}(F) = \sum_{h=1}^{\infty} \mathcal{L}(r_h + A) = \sum_{h=1}^{\infty} \mathcal{L}(A) \leq 3$$

e quindi deve essere  $\mathcal{L}(A) = 0$  e quindi  $\mathcal{L}(F) = 0$ . Questo contrasta col fatto che  $(0, 1) \subset F$ .

### 3.4 Integrale di Lebesgue

Una volta definita la misura di Lebesgue, possiamo definire l'integrale di Lebesgue. Il modo che seguiremo é molto simile a quello usato per definire l'integrale di Riemann.

Sia  $M \subset \mathcal{R}^n$  un insieme misurabile e limitato. Diremo che una funzione  $s : M \rightarrow \mathcal{R}$  é una funzione semplice misurabile se esiste una partizione misurabile di  $M$ :

$$\mathcal{P} = \{M_1, M_2, \dots, M_k\}$$

ossia una famiglia finita di insiemi misurabili  $M_h$ ,  $h = 1, 2, \dots, k$ , con

$$M_h \cap M_{h'} = \emptyset \text{ se } h \neq h' \text{ e } \bigcup_{h=1}^k M_h = M$$

tale che valga la rappresentazione:

$$s(x) = \sum_{h=1}^k c_h \varphi_{M_h}(x) \quad x \in M \quad (93)$$

dove  $c_h$ ,  $h = 1, 2, \dots, k$  sono numeri reali e  $\varphi_{M_h}$  é la funzione caratteristica dell'insieme  $M_h$ , ossia:

$$\varphi_{M_h}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in M_h \\ 0 & \text{se } x \notin M_h \end{cases}$$

Indichiamo con  $\mathcal{S}$  la famiglia delle funzioni semplici misurabili.

Risulta immediato verificare che  $\mathcal{S}$  é uno spazio vettoriale di funzioni e che se  $s, t \in \mathcal{S}$ , allora anche  $s \vee t$  e  $s \wedge t$  stanno in  $\mathcal{S}$ , dove

$$(s \vee t)(x) = \max\{s(x), t(x)\}$$

$$(s \wedge t)(x) = \min\{s(x), t(x)\}$$

É pure facile verificare che se  $s \in \mathcal{S}$  e

$$s(x) = \sum_{h=1}^k c_h \varphi_{M_h}(x) = \sum_{j=1}^{k'} d_j \varphi_{M'_j}(x)$$

dove  $M_h$  e  $M'_j$  sono due partizioni distinte di  $M$ , allora:

$$\sum_{h=1}^k c_h \mathcal{L}(M_h) = \sum_{j=1}^{k'} d_j \mathcal{L}(M'_j)$$

Possiamo quindi definire se  $s \in \mathcal{S}$  e

$$s(x) = \sum_{h=1}^k c_h \varphi_{M_h}(x)$$

$$\int_M s(x) dx = \sum_{h=1}^k c_h \mathcal{L}(M_h) \quad (94)$$

Sia ora  $f : M \rightarrow \mathcal{R}$  una funzione limitata. Definiamo rispettivamente l'integrale inferiore di  $f$  e l'integrale superiore di  $f$  le due quantità:

$$I_i(f) = \int_{\underline{M}} f(x) dx = \sup \left\{ \int_M s(x) dx ; s \in \mathcal{S}, s \leq f \right\} \quad (95)$$

$$I_s(f) = \int_{\overline{M}} f(x) dx = \inf \left\{ \int_M t(x) dx ; t \in \mathcal{S}, f \leq t \right\} \quad (96)$$

Diremo che  $f$  è **integrabile secondo Lebesgue** su  $M$  se  $I_i(f) = I_s(f)$  e in tal caso il valore comune verrà indicato col simbolo  $\int_M f(x) dx$ .

Pertanto una funzione  $f : M \rightarrow \mathcal{R}$  limitata è integrabile se e solo se :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists s, t \in \mathcal{S} \text{ con } s \leq f \leq t \text{ e } \int_M (t(x) - s(x)) dx < \varepsilon \quad (97)$$

In tal caso risulta dunque

$$\int_M f(x) dx = \sup \left\{ \int_M s(x) dx ; s \in \mathcal{S}, s \leq f \right\} \quad (98)$$

oppure

$$\int_M f(x) dx = \inf \left\{ \int_M t(x) dx ; t \in \mathcal{S}, f \leq t \right\} \quad (99)$$

Se la funzione  $f$  non è limitata o se l'insieme  $M$  non è limitato, allora l'integrale si definisce in genere come un limite. In particolare:

i) Supponiamo che  $f : M \rightarrow \mathcal{R}$ , con  $M$  insieme misurabile e limitato, sia una funzione non limitata e non negativa, diremo che  $f$  è integrabile in  $M$  se:

a) per ogni numero naturale  $h$  la funzione troncata:

$$f_h(x) = \min\{f(x), h\}$$

è integrabile in  $M$ ,

b) risulta finito il limite:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_M f_h(x) dx$$

Tale limite verrà indicato col simbolo  $\int_M f(x) dx$ .

ii) Supponiamo che  $f : M \rightarrow \mathcal{R}$ , con  $M$  insieme misurabile e limitato, sia una funzione non limitata che può assumere anche valori negativi, diremo che  $f$  è integrabile in  $M$  se e solo se lo sono le due funzioni:  $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$  e  $f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$  e porremo in tal caso:

$$\int_M f(x) dx = \int_M f^+(x) dx - \int_M f^-(x) dx$$

iii) Supponiamo infine che  $f : M \rightarrow \mathcal{R}$  sia una funzione definita in un insieme  $M$  misurabile e non limitato. In tal caso porremo:

$$\int_M f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{M \cap B_R} f^+(x) dx - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{M \cap B_R} f^-(x) dx$$

supponendo che i due limiti a secondo membro siano finiti.

Indichiamo infine con  $\mathcal{L}^1(M)$  lo spazio delle funzione che sono integrabili su  $M$ .

È facile da verificare che  $\mathcal{L}^1(M)$  è uno spazio vettoriale e che l'integrale è un funzionale lineare su  $\mathcal{L}^1(M)$ .

**Osservazione 1** Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$  è una funzione limitata ed indichiamo con  $IR_i(f)$  ed  $IR_s(f)$  rispettivamente gli integrali inferiore e superiore di  $f$  secondo Riemann, risulta:

$$IR_i(f) \leq I_i(f) \leq I_s(f) \leq IR_s(f)$$

Pertanto se una funzione limitata è integrabile secondo Riemann lo è anche secondo Lebesgue.

**Osservazione 2** Una funzione continua  $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathcal{R}$ , può essere integrabile in senso generalizzato secondo Riemann senza essere integrabile secondo Lebesgue. Un esempio è dato dalla funzione

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad x \in [2\pi, +\infty)$$

Infatti se  $b > 2\pi$ , integrando per parti, si ottiene:

$$\int_{2\pi}^b \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{\cos x}{x} \Big|_{2\pi}^b + \int_{2\pi}^b \frac{\cos x}{x^2} dx$$

Siccome

$$\left| \int_b^{b'} \frac{\cos x}{x^2} dx \right| \leq \int_b^{b'} \frac{1}{x^2} dx \leq \frac{1}{b}$$

si ottiene che il secondo integrale nella diseuguaglianza precedente ha limite finito per  $b \rightarrow +\infty$  e quindi la funzione  $f$  è integrabile in senso generalizzato in  $[2\pi, +\infty)$ . D'altra parte:

$$\begin{aligned} \int_{2\pi}^{(2k+1)\pi} f^+(x) dx &= \sum_{j=1}^k \int_{2j\pi}^{(2j+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx \geq \\ &\geq \sum_{j=1}^k \frac{1}{(2j+1)\pi} \int_{2j\pi}^{(2j+1)\pi} \sin x dx = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^k \frac{1}{2j+1} \end{aligned}$$

e quindi  $f \notin \mathcal{L}^1([2\pi, +\infty))$ .

### 3.5 Massimo e minimo limite per una successione

Prima di continuare nello studio dell'integrale di Lebesgue e introdurre il concetto di funzione misurabile, è necessario ricordare la definizione di minimo e massimo limite per una generica successione  $a_h$ .

Indichiamo con:

$$\alpha_k = \inf\{a_h, h \geq k\} \tag{100}$$

$$\beta_k = \sup\{a_h, h \geq k\} \tag{101}$$

otteniamo due successioni  $\{\alpha_k\}_{k \in \mathcal{N}}$  e  $\{\beta_k\}_{k \in \mathcal{N}}$  rispettivamente non decrescente e non crescente. Esistono quindi i limiti:

$$\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \sup\{\alpha_k, k \in \mathcal{N}\} \tag{102}$$

$$\beta = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = \inf\{\beta_k, k \in \mathcal{N}\} \tag{103}$$

Tali limiti vengono chiamati rispettivamente

$$\liminf_{h \rightarrow \infty} a_h \quad e \quad \limsup_{h \rightarrow \infty} a_h$$

In simboli:

$$\liminf_{h \rightarrow \infty} a_h = \sup_h \inf_{k \geq h} a_k \tag{104}$$

$$\limsup_{h \rightarrow \infty} a_h = \inf_h \sup_{k \geq h} a_k \tag{105}$$

Del minimo e massimo limite vogliamo mettere in evidenza le seguenti proprietà:

1. Risulta sempre

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n ;$$

2.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

se e solo se  $a_n$  non è inferiormente limitata;

3.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

se e solo se  $a_n$  non è limitata superiormente;

4. se  $\alpha \in \mathcal{R}$ , risulta che

$$\alpha = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$$

se e solo se:

- $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathcal{N}$  tale che  $a_n > \alpha - \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon$ ;
- $\forall \varepsilon > 0$ , l'insieme  $N_\varepsilon = \{n \in \mathcal{N}, a_n < \alpha + \varepsilon\}$  è infinito;

5. se  $\beta \in \mathcal{R}$ , risulta che

$$\beta = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

se e solo se:

- $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathcal{N}$  tale che  $a_n < \beta + \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon$ ;
- $\forall \varepsilon > 0$ , l'insieme  $N_\varepsilon = \{n \in \mathcal{N}, a_n > \beta - \varepsilon\}$  è infinito;

6. risulta

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

se e solo se la successione  $a_n$  ha limite e risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n ,$$

7.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = - \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = - \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

8. se  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  sono due successioni, allora:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n .$$

Da notare inoltre è il fatto che, se una delle due successioni  $\{a_n\}$  o  $\{b_n\}$  ha limite, allora nelle disuguaglianze precedenti vale il segno di uguale.

9. esistono due sottosuccessioni di  $a_n$ :  $\{b_n\}_{n \in \mathcal{N}}$  e  $\{c_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ , tali che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

### Dimostrazione

1. Segue subito dalle definizioni;
2. Verificarlo per esercizio;
3. Verificarlo per esercizio;

4. Dimostriamo solo la condizione necessaria, lasciando per esercizio la condizione sufficiente. Supponiamo quindi che  $\alpha$  sia il minimo limite della successione  $\{a_n\}_n$ . Usando la notazione introdotta in (102) risulta che  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon$  tale che  $\forall n > n_\varepsilon, b_n > \alpha - \varepsilon$  e quindi  $a_n \geq b_n > \alpha - \varepsilon$ . D'altra parte  $\forall n \in \mathcal{N}, b_n \leq \alpha < \alpha + \varepsilon$  e quindi  $\forall n \in \mathcal{N}, \exists m = m(n) \geq n$  tale che  $a_m > \alpha + \varepsilon$  e quindi vale anche la seconda di ii).

5. si ragiona come nel caso precedente e quindi viene lasciato per esercizio,

6. se

$$\alpha = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathcal{R}$$

dalle proprietà enunciate in precedenza, risulta che, se  $\varepsilon > 0$ , allora:

- $\exists \nu_\varepsilon$  tale che  $a_n \leq \alpha_n < \alpha + \varepsilon \quad \forall n > \nu_\varepsilon$ ;
- $\exists \nu'_\varepsilon$  tale che  $a_n \geq \beta_n > \alpha - \varepsilon \quad \forall n > \nu'_\varepsilon$ .

Se ne conclude quindi che se  $n > \max\{\nu_\varepsilon, \nu'_\varepsilon\}$

$$\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$$

e quindi che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

### 3.6 Funzioni misurabili

Una funzione  $f : M \rightarrow \mathcal{R}$  ( $M \in \mathcal{M}$ ) si dice **misurabile** se  $\forall t \in \mathcal{R}$ , l'insieme :

$$F(t) = \{x \in M ; f(x) > t\}$$

è misurabile.

Vale il seguente semplice teorema:

**Teorema 3.3** Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

- a)  $f : M \rightarrow \mathcal{R}$  è una funzione misurabile;
- b)  $\forall t \in \mathcal{R}$  l'insieme  $F_1(t) = \{x \in M ; f(x) \leq t\} \in \mathcal{M}$ ;
- c)  $\forall t \in \mathcal{R}$  l'insieme  $F_2(t) = \{x \in M ; f(x) < t\} \in \mathcal{M}$ ;
- d)  $\forall t \in \mathcal{R}$  l'insieme  $F_3(t) = \{x \in M ; f(x) \geq t\} \in \mathcal{M}$ .

**Dimostrazione.** a)  $\Rightarrow$  b) Risulta  $F_1(t) = M - F(t)$  e quindi  $F_1(t) \in \mathcal{M} \quad \forall t \in \mathcal{R}$ ;

b)  $\Rightarrow$  c) Risulta

$$F_2(t) = \bigcup_{h=1}^{\infty} F_1\left(t - \frac{1}{h}\right)$$

e quindi  $F_2(t) \in \mathcal{M} \quad \forall t \in \mathcal{R}$ ;

c)  $\Rightarrow$  d) Risulta  $F_3(t) = M - F_2(t)$  e quindi  $F_3(t) \in \mathcal{M} \quad \forall t \in \mathcal{R}$ ;

d)  $\Rightarrow$  a) Risulta

$$F(t) = \bigcup_{h=1}^{\infty} F_3\left(t + \frac{1}{h}\right)$$

e quindi  $F(t) \in \mathcal{M} \quad \forall t \in \mathcal{R}$ .

q.e.d.

Altre importanti proprietà delle funzioni misurabili sono date dal seguente:

**Teorema 3.4** Siano  $f, g : M \rightarrow \mathcal{R}$  due funzioni misurabili, allora:

1. L'insieme

$$N = \{x \in M, f(x) > g(x)\}$$

é misurabile;

2. le funzione  $f + c$  e  $cf$  sono misurabili  $\forall c \in \mathcal{R}$ ;

3. le funzioni  $f + g$ ,  $f^2$  e  $fg$  sono misurabili;

4. se  $f_h : M \rightarrow \mathcal{R}$  ( $h \in \mathcal{N}$ ) é una successione di funzioni misurabili, allora, posto

$$\Phi(x) = \sup\{f_h(x), h \in \mathcal{N}\}$$

$$\Psi(x) = \inf\{f_h(x), h \in \mathcal{N}\}$$

si ha che  $\Phi$  e  $\Psi$  sono funzioni misurabili;

5. se  $f_h : M \rightarrow \mathcal{R}$  ( $h \in \mathcal{N}$ ) é una successione di funzioni misurabili, allora sono pure misurabili le due funzioni

$$f(x) = \limsup_{h \rightarrow \infty} f_h(x) \quad e \quad g(x) = \liminf_{h \rightarrow \infty} f_h(x)$$

### Dimostrazione.

1. Se  $x \in N$ , allora  $f(x) > g(x)$  e quindi esiste  $r \in \mathcal{Q}$  con  $f(x) > r > g(x)$  e quindi  $x \in F(r) \cap G_2(r)$  (Usiamo le notazioni del teorema precedente) Ne deriva che

$$N = \bigcup_{r \in \mathcal{Q}} F(r) \cap G_2(r)$$

Pertanto  $N \in \mathcal{M}$ .

2. Esercizio.

3. Risulta  $\forall t \in \mathcal{R}$ :

$$\{x \in M, f(x) + g(x) > t\} = \{x \in M, f(x) > t - g(x)\}$$

e il risultato segue da 2) e da 3). Ora se  $t < 0$ , allora

$$\{x \in M, f(x)^2 > t\} = M$$

mentre se  $t \geq 0$

$$\{x \in M, f(x)^2 > t\} = \{x \in M, f(x) > \sqrt{t}\} \cup \{x \in M, f(x) < -\sqrt{t}\}$$

In ogni caso dunque, l'insieme  $\{x \in M, f(x)^2 > t\}$  é misurabile. Infine per provare la misurabilitá del prodotto, basta notare che:

$$f(x)g(x) = \frac{(f(x) + g(x))^2 - (f(x) - g(x))^2}{4}$$

ed usare la misurabilitá della somma, della differenza e del quadrato.

4. Risulta  $\forall t \in \mathcal{R}$ :

$$\{x \in M, \Phi(x) > t\} = \bigcup_{h=1}^{\infty} \{x \in M, f_h(x) > t\}$$

$$\{x \in M, \Psi(x) < t\} = \bigcup_{h=1}^{\infty} \{x \in M, f_h(x) < t\}$$

5. Basta applicare la 4) e ricordare che

$$f(x) = \inf\{\varphi_h(x), h \in \mathcal{N}\}$$

$$g(x) = \sup\{\psi_h(x), h \in \mathcal{N}\}$$

dove

$$\varphi_h(x) = \sup\{f_k(x), k \in \mathcal{N}, k \geq h\}$$

$$\psi_h(x) = \inf\{f_k(x), k \in \mathcal{N}, k \geq h\}$$

Notiamo in particolare che dalla proprietà 4) si ottiene che se  $f$  è una funzione misurabile, allora sono misurabili anche le funzioni:

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$$

$$f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$$

$$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$$

q.e.d.

Concludiamo infine il paragrafo sulle funzioni misurabili, dimostrando il seguente:

**Teorema 3.5** *Se  $f : M \rightarrow \mathcal{R}$  è una funzione misurabile e limitata e se  $M$  è un insieme misurabile limitato, allora  $f \in \mathcal{L}^1(M)$ .*

**Dimostrazione.** Possiamo supporre che sia  $f \geq 0$  ed indichiamo con  $k$  una costante positiva tale che  $0 \leq f(x) < k \quad \forall x \in M$ . Sia  $h \in \mathcal{N}$ , poniamo

$$t_j = \frac{jk}{2^h} \quad j = 0, 1, 2, \dots, 2^h$$

$$M_j = \{x \in M, t_{j-1} \leq f(x) < t_j\} \quad j = 1, 2, \dots, 2^h$$

Gli insiemi  $M_j$  sono tutti misurabili, sono a due a due disgiunti e

$$\bigcup_{j=1}^{2^h} M_j = M$$

Consideriamo infine le due funzioni semplici:

$$s_h(x) = \sum_{j=1}^{2^h} t_{j-1} \varphi_{M_j}(x)$$

$$t_h(x) = \sum_{j=1}^{2^h} t_j \varphi_{M_j}(x)$$

Risulta ovviamente

$$s_h(x) \leq f(x) \leq t_h(x) \quad \forall x \in M$$

inoltre

$$\int_M t_h(x) dx - \int_M s_h(x) dx = \sum_{j=1}^{2^h} (t_j - t_{j-1}) \mathcal{L}(M_j) = \sum_{j=1}^{2^h} \frac{k}{2^h} \mathcal{L}(M_j) = \frac{k \mathcal{L}(M)}{2^h}$$

Ne deriva quindi che  $\forall \varepsilon > 0$ , se scelgo  $h \in \mathcal{N}$  tale che

$$\frac{k \mathcal{L}(M)}{2^h} < \varepsilon$$



ottengo che

$$\int_M (t_h(x) - s_h(x)) dx < \varepsilon$$

e quindi  $f \in \mathcal{L}^1(M)$ .

q.e.d.

Da notare che le due successioni costruite nella dimostrazione precedente convergono uniformemente ad  $f$  su  $M$ .

Da notare inoltre che, se  $f : M \rightarrow \mathcal{R}$  è continua in  $M$ , allora  $f$  è misurabile, infatti in tal caso l'insieme  $\{x \in M, f(x) > t\}$  è un insieme aperto (relativamente ad  $M$ ).

### 3.7 Teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale

Dimostreremo in questo paragrafo i tre principali teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale presenti nella teoria di integrazione di Lebesgue. Il primo è il seguente:

**Teorema 3.6 Teorema di Beppo Levi** Sia  $f_j : M \rightarrow \mathcal{R}$  una successione di funzioni misurabili e non negative tali che  $f_j(x) \leq f_{j+1}(x) \quad \forall x \in M, \forall j \in \mathcal{N}$ . Indichiamo con:

$$f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) \quad , \quad x \in M$$

allora:

$$\int_M f(x) dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_M f_j(x) dx \tag{106}$$

**Dimostrazione.** Essendo  $f_j \leq f$ , risulta:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_M f_j(x) dx \leq \int_M f(x) dx$$

e quindi basta provare che vale anche la disuguaglianza contraria, ossia:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_M f_j(x) dx \geq \int_M f(x) dx \tag{107}$$

Consideriamo, in primo luogo, il caso in cui l'insieme  $M$  sia limitato e la funzione  $f$  sia pure limitata. In questo caso, dalla definizione di integrale, risulta:

$$\int_M f(x) dx = \sup \left\{ \int_M s(x) dx ; s \in \mathcal{S}, s \leq f \right\}$$

Sia dunque  $s \in \mathcal{S}$  una funzione semplice misurabile con  $0 \leq s \leq f$ . Supponiamo che sia:

$$s(x) = \sum_{h=1}^k c_h \varphi_{M_h}(x) \quad , \quad x \in M$$

dove  $\{M_h\}$  è una partizione di  $M$ . Scelto un numero  $\alpha \in (0, 1)$  indichiamo con:

$$F_j = \{x \in M ; f_j(x) \geq \alpha s(x)\}$$

Dalla monotonia della successione  $\{f_j\}$  risulta che  $F_j \subset F_{j+1} \quad \forall j = 1, 2, \dots$  ed inoltre:

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j = M$$

Infatti se  $x \in M$  e  $s(x) = 0$ , allora  $x \in F_j, \forall j \in \mathcal{N}$ , mentre se  $s(x) > 0$ , si ha:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) = f(x) \geq s(x) > \alpha s(x)$$

e quindi, per il teorema della permanenza del segno,  $\exists j_0 \in \mathcal{N}$  tale che  $f_j(x) > \alpha s(x) \quad \forall j > j_0$  e quindi  $x \in F_j \quad \forall j > j_0$ . Ricordando infine che, se  $x \in F_j \quad f_j(x) \geq \alpha s(x)$ , integrando su  $F_j$ , ottengo:

$$\int_M f_j(x) dx \geq \int_{F_j} f_j(x) dx \geq \alpha \int_{F_j} s(x) dx = \alpha \sum_{h=1}^k c_h \mathcal{L}(M_h \cap F_j)$$

Passando infine al limite per  $j \rightarrow \infty$ , ottengo :

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_M f_j(x) dx &\geq \alpha \sum_{h=1}^k c_h \lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{L}(M_h \cap F_j) = \alpha \sum_{h=1}^k c_h \mathcal{L}(M_h \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j)) = \\ &= \alpha \sum_{h=1}^k c_h \mathcal{L}(M_h) = \alpha \int_M s(x) dx \end{aligned}$$

Facendo tendere  $\alpha$  a uno, ottengo:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_M f_j(x) dx \geq \int_M s(x) dx$$

Prendendo infine l'estremo superiore al variare di  $s \in \mathcal{S}$ ,  $s \leq f$  ottengo :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_M f_j(x) dx \geq \int_M f(x) dx$$

Se  $M$  non fosse limitato, tenendo conto che  $f_j \geq 0$ , risulta  $\forall R > 0$ :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_M f_j(x) dx \geq \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{M \cap B_R} f_j(x) dx = \int_{M \cap B_R} f(x) dx$$

e quindi si ottiene il risultato facendo tendere  $R$  all'infinito. Infine se  $f$  non fosse limitata, so avrebbe:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_M f_j(x) dx \geq \lim_{j \rightarrow \infty} \int_M (f_j \wedge k)(x) dx = \int_M (f \wedge k)(x) dx$$

e si ottiene la (107) facendo tendere  $k$  all'infinito.

q.e.d.

**Teorema 3.7 Lemma di Fatou** Sia  $f_j : M \rightarrow \mathcal{R}$  una successione di funzioni misurabili non negative, allora:

$$\int_M (\liminf_{j \rightarrow \infty} f_j(x)) dx \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_M f_j(x) dx$$

**Dimostrazione.** Indichiamo con :

$$f(x) = \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j(x) \quad x \in M$$

$$g_h(x) = \inf\{f_j(x) ; j \geq h\}$$

La successione  $\{g_h\}$  verifica le ipotesi del teorema di Beppo Levi essendo una successione crescente di funzioni non negative. Applicando tale teorema e ricordando che  $\lim_{h \rightarrow \infty} g_h(x) = f(x)$ , ottengo:

$$\int_M f(x) dx = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_M g_h(x) dx$$

D'altra parte se  $j \geq h \quad g_h(x) \leq f_j(x) \quad \forall x \in M$  e quindi:

$$\int_M g_h(x) dx \leq \int_M f_j(x) dx \quad \forall j \geq h$$

Ne deriva quindi che:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_M g_h(x) dx \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_M f_j(x) dx$$

q.e.d.

Da notare che nel Lemma di Fatou può valere il minore stretto, come dimostra il seguente esempio:

$$f_j(x) = j \varphi_{(0,1/j)}(x) \quad x \in (0,1)$$

**Teorema 3.8 Teorema di Lebesgue della convergenza dominata** Sia  $f_j : M \rightarrow \mathcal{R}$  una successione di funzioni misurabili. Supponiamo che esista una funzione non negativa  $g$  integrabile con:

$$|f_j(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in M \text{ e } j \in \mathcal{N} \quad (108)$$

Supponiamo inoltre che  $\forall x \in M$  esista il limite :

$$f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x)$$

Allora:

$$\int_M f(x) dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_M f_j(x) dx$$

**Dimostrazione.** Dalla doppia disuguaglianza:

$$-g(x) \leq f_j(x) \leq g(x)$$

ottengo che le due successioni:

$$u_j(x) = g(x) - f_j(x)$$

$$v_j(x) = f_j(x) + g(x)$$

sono entrambe non negative. Applicando il Lemma di Fatou, si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_M g(x) dx - \int_M f(x) dx &= \int_M (g(x) - f(x)) dx \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_M (g(x) - f_j(x)) dx = \\ &= \int_M g(x) dx - \limsup_{j \rightarrow \infty} \int_M f_j(x) dx \end{aligned}$$

e quindi semplificando:

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \int_M f_j(x) dx \leq \int_M f(x) dx$$

D'altra parte, sempre per il Lemma di Fatou, applicato alla seconda successione ottengo:

$$\begin{aligned} \int_M f(x) dx + \int_M g(x) dx &= \int_M (f(x) + g(x)) dx \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_M (f_j(x) + g(x)) dx = \\ &= \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_M f_j(x) dx + \int_M g(x) dx \end{aligned}$$

e quindi :

$$\int_M f(x) dx \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_M f_j(x) dx$$

Questa disuguaglianza, insieme a quella già ottenuta, ci permette di concludere la dimostrazione. q.e.d.

Consideriamo ad esempio la seguente successione di funzioni

$$f_n(x) = n^p x^n (1-x) \quad x \in [0, 1]$$

dove  $p \in \mathcal{R}$  é un parametro fissato.

Risulta

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

D'altra parte:

$$f'_n(x) = n^p [n x^{n-1} (1-x) - x^n] = n^p x^{n-1} [n - (n+1)x]$$

e quindi il punto  $x = \frac{n}{n+1}$  é il punto di massimo assoluto per  $f_n$  in  $[0, 1]$  e il suo valore massimo é:

$$\alpha_n = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = n^p \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^p}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

Risulta quindi che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0 \Leftrightarrow p < 1$$

Pertanto la convergenza di  $f_n$  a zero é uniforme se e solo se  $p < 1$ . D'altra parte, da un calcolo diretto si ha:

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 n^p (x^n - x^{n+1}) dx = n^p \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{n^p}{(n+1)(n+2)}$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0 \Leftrightarrow p < 2$$

Pertanto vale il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale se e solo se  $p < 2$ .

Osserviamo infine che

$$\frac{\partial f_n(x)}{\partial n} = p n^{p-1} x^n (1-x) + n^p x^n \log x (1-x) = n^{p-1} x^n [p - n \log x] (1-x)$$

Pertanto il valore massimo di  $f_n(x)$  al variare di  $n$  (pensando ad  $x$  fissato) si ottiene per  $n = \frac{-p}{\log x}$  e il valore massimo é dato da

$$g(x) = \left(\frac{-p}{\log x}\right)^p x^{-p/\log x} (1-x) = p^p e^{-p} \frac{1-x}{(-\log x)^p} \quad x \in [0, 1]$$

Risulta quindi

$$f_n(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [0, 1]$$

Siccome

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\log x}{1-x} = 1$$

la funzione  $g$  risulta integrabile in  $[0, 1]$  se e solo se  $p-1 < 1$  ossia  $p < 2$ .

Ossia  $f_n$  ha una funzione dominante integrabile se e solo se  $p < 2$ .

### 3.8 Alcune conseguenze dei teoremi di passaggio al limite

Alcune conseguenze dei teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale sono le seguenti.

i) Se  $f_j : M \rightarrow \mathcal{R}$  é una successione di funzioni misurabili non negative allora:

$$\int_M \left( \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) \right) dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_M f_j(x) dx$$

ii) Se  $f : M \rightarrow \mathcal{R}$  è una funzione misurabile non negativa ed  $\{M_h\}$  è una partizione misurabile di  $M$ , allora:

$$\int_M f(x) dx = \sum_{h=1}^{\infty} \int_{M_h} f(x) dx$$

iii) Se  $f : M \rightarrow \mathcal{R}$  è una funzione misurabile non negativa ed  $\{M_h\}$  è una successione crescente di insiemi misurabili con

$$M = \bigcup_{h=1}^{\infty} M_h$$

allora:

$$\int_M f(x) dx = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{M_h} f(x) dx$$

iv) Se  $f : M \rightarrow \mathcal{R}$  è una funzione misurabile non negativa ed  $\{M_h\}$  è una successione decrescente di sottoinsiemi misurabili di  $M$ . Se indichiamo con

$$F = \bigcap_{h=1}^{\infty} M_h$$

e supponiamo che  $f$  sia integrabile su  $M_1$ , allora:

$$\int_F f(x) dx = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{M_h} f(x) dx$$

v) Se  $f_j : M \rightarrow \mathcal{R}$  è una successione di funzioni misurabili non negative con  $f_{j+1} \leq f_j \forall j$  e se  $f_1$  è integrabile su  $M$ , allora:

$$\int_M \left( \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) \right) dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_M f_j(x) dx$$

vi) **Assoluta continuità dell'integrale** Se  $f \in \mathcal{L}^1(M)$ , allora:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ tale che se } F \subset M \text{ e } \mathcal{L}(F) < \delta_\varepsilon \text{ allora } \int_F |f(x)| dx < \varepsilon$$

**Dimostrazione** Possiamo supporre che sia  $f \geq 0$ . Se  $f$  è limitata (ossia se  $0 \leq f(x) \leq k$ ), allora si ha:

$$\int_F f(x) dx \leq k \mathcal{L}(F)$$

e quindi basta scegliere  $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{k}$ . D'altra parte se  $f$  non è limitata, posto  $f_h(x) = \min\{f(x), h\}$  si ha

$$\int_M f(x) dx = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_M f_h(x) dx$$

e quindi, fissato  $\varepsilon > 0 \exists h = h(\varepsilon)$  tale che:

$$\int_M (f(x) - f_h(x)) dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_F f(x) dx &= \int_F (f(x) - f_h(x)) dx + \int_F f_h(x) dx \leq \\ &\leq \int_M (f(x) - f_h(x)) dx + \int_F f_h(x) dx < \frac{\varepsilon}{2} + h \mathcal{L}(F) \end{aligned}$$

e quindi basta scegliere in questo caso  $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2h}$ .

vii) **Funzione non negativa con integrale nullo** Sia  $f : M \rightarrow \mathcal{R}$  una funzione misurabile non negativa e tale che  $\int_M f(x) dx = 0$  Allora posto:

$$P = \{x \in M ; f(x) > 0\}$$

risulta che  $\mathcal{L}(P) = 0$ .

Infatti indicato con:

$$P_h = \left\{ x \in M ; f(x) > \frac{1}{h} \right\}$$

ottengo una successione crescente di insiemi con

$$P = \bigcup_{h=1}^{\infty} P_h$$

Inoltre:

$$\frac{1}{h} \mathcal{L}(P_h) \leq \int_{P_h} f(x) dx \leq \int_M f(x) dx = 0$$

Allora  $\mathcal{L}(P_h) = 0 \forall h$  e quindi anche  $\mathcal{L}(P) = 0$ .

Enunceremo brevemente il fatto che  $\mathcal{L}(\{x \in M ; f(x) > 0\}) = 0$  dicendo che  $f(x) = 0$  per quasi ogni  $x \in M$  ( o quasi ovunque in  $M$ ).

Piú in generale se  $P(x)$  é una affermazione relativa ad una variabile  $x \in M$ , diremo che  $P(x)$  vale **quasi ovunque** o **per quasi ogni**  $x \in M$ , se l'insieme

$$X = \{x \in M , P(x) \text{ é falsa}\}$$

ha misura nulla ( $\mathcal{L}(X) = 0$ ).

Concludiamo il paragrafo col seguente esercizio:

**Esercizio** Se  $f \in \mathcal{L}^1(M)$  allora  $f$  é misurabile.

**Dimostrazione** Supponiamo  $f$  limitata ed  $M$  limitato. Dalla definizione di funzione integrabile, posso trovare due successioni di funzioni semplici  $s_h, t_h$  con  $s_h$  crescente e  $t_h$  decrescente tali che  $s_h(x) \leq f(x) \leq t_h(x) \forall x \in M$  e

$$\int_M (t_h(x) - s_h(x)) dx < \frac{1}{h}$$

Indichiamo ora con

$$s(x) = \lim_{h \rightarrow \infty} s_h(x)$$

$$t(x) = \lim_{h \rightarrow \infty} t_h(x)$$

Risulta allora  $s(x) \leq f(x) \leq t(x)$  e

$$\int_M (t(x) - s(x)) dx = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_M (t_h(x) - s_h(x)) dx = 0$$

Pertanto possiamo trovare un insieme misurabile  $X$  con  $\mathcal{L}(X) = 0$  tale che

$$s(x) = f(x) = t(x) \forall x \in M - X$$

Allora

$$\{x \in M , f(x) > t\} = (\{x \in M , s(x) > t\} \cap (M - X)) \cup (X \cap \{x \in M , f(x) > t\}) = M_1 \cup M_2$$

ed  $M_1$  é misurabile perché  $s$  é misurabile ed  $M_2$  é pure misurabile come sottoinsieme di un insieme di misura zero.

### 3.9 Formula di riduzione per un integrale multiplo

Indicheremo in questo paragrafo la variabile  $x \in \mathcal{R}^n$  con  $x = (y, z)$  con  $y \in \mathcal{R}^m$  ( $m \in \mathcal{N}$ ,  $0 < m < n$ ) e  $z \in \mathcal{R}^{n-m}$ . Se  $A \subset \mathcal{R}^n$  e  $y \in \mathcal{R}^m$ , indicheremo con

$$A^y = \{z \in \mathcal{R}^{n-m}, (y, z) \in A\}$$

Siccome useremo la misura di Lebesgue in spazi di dimensione diversa, per maggior chiarezza indicheremo con  $\mathcal{L}_s$  la misura di Lebesgue nello spazio  $\mathcal{R}^s$ . Cominciamo col provare il seguente:

**Teorema 3.9** *Sia  $M \subset \mathcal{R}^n$  un insieme misurabile e limitato. Allora la funzione:*

$$f(y) = \mathcal{L}_{n-m}(M^y) \quad y \in \mathcal{R}^m$$

è una funzione integrabile su  $\mathcal{R}^m$  e risulta:

$$\int_{\mathcal{R}^m} f(y) dy = \mathcal{L}_n(M) \quad (109)$$

**Dimostrazione.** Faremo la dimostrazione per passi successivi.

- a) **Passo 1** Se  $M = Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$  è un rettangolo, allora il teorema è vero. Infatti in questo caso

$$M^y = Q^y = \begin{cases} [a_{m+1}, b_{m+1}] \times \dots \times [a_n, b_n] & \text{se } y \in [a_1, b_1] \times \dots \times [a_m, b_m] \\ \emptyset & \text{se } y \notin [a_1, b_1] \times \dots \times [a_m, b_m] \end{cases}$$

La formula (109) si mantiene pure vera se

$$M = \bigcup_{j=1}^k Q_j = P$$

è un purirettangolo, ossia la riunione di un numero finito di rettangoli chiusi con  $\text{int } Q_i \cap \text{int } Q_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$  (dove con  $\text{int } Q$  indichiamo l'insieme dei punti interni a  $Q$ ).

- b) **Passo 2** La formula (109) è vera se  $M = A$  è un aperto limitato. Infatti in questo caso si può trovare una successione crescente di plurirettangoli  $P_h$  con

$$A = \bigcup_{h=1}^{\infty} P_h$$

Siccome

$$A^y = \bigcup_{h=1}^{\infty} P_h^y \quad \forall y \in \mathcal{R}^m$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{R}^m} \mathcal{L}_{n-m}(A^y) dy &= \int_{\mathcal{R}^m} \mathcal{L}_{n-m} \left( \bigcup_{h=1}^{\infty} P_h^y \right) dy = \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{R}^m} \mathcal{L}_{n-m}(P_h^y) dy = \lim_{h \rightarrow \infty} \mathcal{L}_n(P_h) = \mathcal{L}(A) \end{aligned}$$

In maniera del tutto simile, si prova che la formula (109), vale se l'insieme  $M = K$  è un insieme compatto. Basta osservare che in questo caso si può trovare una successione decrescente di aperti limitati  $A_h$  con

$$K = \bigcap_{h=1}^{\infty} A_h$$

c) **Passo 3** Supponiamo che  $M$  sia un insieme misurabile limitato qualunque. Possiamo trovare allora una successione crescente di compatti  $K_h$  ed una successione decrescente di aperti limitati  $A_h$  con

$$K_h \subset M \subset A_h \quad \forall h \in \mathcal{N}$$

e

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \mathcal{L}_n(K_h) = \lim_{h \rightarrow \infty} \mathcal{L}_n(A_h) = \mathcal{L}(M)$$

Se indichiamo, per semplicità, con:

$$f_h(y) = \mathcal{L}_{n-m}(K_h^y)$$

$$g_h(y) = \mathcal{L}_{n-m}(A_h^y)$$

risulta:

$$f_h(y) \leq f(y) \leq g_h(y) \quad \forall y \in \mathcal{R}^m$$

e

$$\int_{\mathcal{R}^m} (g_h(y) - f_h(y)) dy = \mathcal{L}_n(A_h) - \mathcal{L}_n(K_h) \rightarrow 0 \quad \text{se } h \rightarrow \infty$$

Ne consegue quindi che  $f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{R}^m)$  e

$$\int_{\mathcal{R}^m} f(y) dy = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{R}^m} f_h(y) dy = \mathcal{L}_n(M)$$

q.e.d.

Possiamo ora enunciare il teorema che sarà lo strumento principale che ci permetterà di calcolare integrali multipli.

**Teorema 3.10 Teorema di Fubini o Formula di riduzione** Sia  $f : M \rightarrow \mathcal{R}$  una funzione integrabile su  $M$  insieme misurabile. Allora:

i) per quasi ogni  $y \in \mathcal{R}^m$ , la funzione  $f(y, \cdot) \in \mathcal{L}^1(M^y)$ ,

ii) la funzione

$$g(y) = \int_{M^y} f(y, z) dz$$

è integrabile in  $\mathcal{R}^m$  e risulta:

$$\int_{\mathcal{R}^m} g(y) dy = \int_M f(x) dx \quad (110)$$

**Dimostrazione.** Basta considerare il caso che  $f$  sia limitata ed  $M$  sia pure limitato.

Osserviamo in primo luogo che se  $f = s$  è una funzione semplice misurabile, allora la (110) è vera. Infatti se supponiamo

$$f(x) = s(x) = \sum_{j=1}^k c_j \varphi_{M_j}(x)$$

si ottiene ricordando la (109):

$$\begin{aligned} \int_M s(x) dx &= \sum_{j=1}^k c_j \mathcal{L}_n(M_j) = \sum_{j=1}^k c_j \int_{\mathcal{R}^m} \mathcal{L}_{n-m}(M_j^y) dy = \\ &= \int_{\mathcal{R}^m} \left( \sum_{j=1}^k c_j \mathcal{L}_{n-m}(M_j^y) \right) dy = \int_{\mathcal{R}^m} \left( \int_{M^y} s(y, z) dz \right) dy \end{aligned}$$



D'altra parte, se  $f \in \mathcal{L}^1(M)$ , esiste una successione crescente di funzioni semplici misurabili  $s_h$  ed una successione decrescente di funzione semplici misurabili  $t_h$  tali che

$$s_h(y, z) \leq f(y, z) \leq t_h(y, z)$$

e

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_M (t_h(x) - s_h(x)) dx = 0$$

Indichiamo per semplicità con

$$\begin{aligned} \varphi_h(y) &= \int_{M^y} s_h(y, z) dz \\ \psi_h(y) &= \int_{M^y} t_h(y, z) dz \end{aligned}$$

e con

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= \lim_{h \rightarrow \infty} \varphi_h(y) \\ \psi(y) &= \lim_{h \rightarrow \infty} \psi_h(y) \end{aligned}$$

Le funzione  $\varphi$  e  $\psi$  sono funzioni misurabili su  $\mathcal{R}^m$  con  $\varphi \leq \psi$  e

$$\int_{\mathcal{R}^m} (\psi(y) - \varphi(y)) dy = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{R}^m} (\psi_h(y) - \varphi_h(y)) dy = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_M (t_h(x) - s_h(x)) dx = 0$$

Esiste dunque un insieme misurabile  $X \subset \mathcal{R}^m$  con  $\mathcal{L}_m(X) = 0$  tale che  $\psi(y) = \varphi(y) \quad \forall y \in \mathcal{R}^m - X$ . Pertanto se  $y \in \mathcal{R}^m - X$  la funzione  $f(y, \cdot)$  sta tra le due funzioni semplici  $s_h(y, \cdot)$  e  $t_h(y, \cdot)$  con

$$\int_{M^y} (t_h(y, z) - s_h(y, z)) dz = \psi_h(y) - \varphi_h(y) \rightarrow 0 \text{ se } h \rightarrow \infty$$

Pertanto  $f(y, \cdot) \in \mathcal{L}^1(M^y)$  e

$$\int_{M^y} f(y, z) dz = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{M^y} s_h(y, z) dz = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{M^y} t_h(y, z) dz$$

Ne consegue che la funzione

$$g(y) = \int_{M^y} f(y, z) dz$$

è misurabile su  $\mathcal{R}^m$  e

$$\int_{\mathcal{R}^m} g(y) dy = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{R}^m} \left( \int_{M^y} s_h(y, z) dz \right) dy = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_M s_h(x) dx = \int_M f(x) dx$$

q.e.d.

Scriviamo infine la formula di riduzione generale (110) in alcuni casi particolari che useremo nelle applicazioni.

**Teorema 3.11** (*Formula di riduzione per un integrale doppio su un dominio normale rispetto all'asse  $y$* )

Se

$$M = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2, x \in [a, b], \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

dove  $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$  sono due funzioni continue con  $\alpha(x) \leq \beta(x) \quad \forall x \in [a, b]$  e sia  $f : M \rightarrow \mathcal{R}$  una funzione continua, allora dalla (110) si ottiene la seguente formula:

$$\iint_M f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx \quad (111)$$

(Diremo in questo caso che l'insieme  $M$  è normale rispetto all'asse  $y$ ).

Analoga alla formula (111) è la seguente formula che si ottiene scambiando  $x$  con  $y$ :

**Teorema 3.12** (*Formula di riduzione per un integrale doppio su un dominio normale rispetto all'asse  $x$* )

Sia

$$\overline{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \in [\overline{a}, \overline{b}], \overline{\alpha}(y) \leq x \leq \overline{\beta}(y)\}$$

dove  $\overline{\alpha}, \overline{\beta} : [\overline{a}, \overline{b}] \rightarrow \mathbb{R}$  sono due funzioni continue con  $\overline{\alpha}(y) \leq \overline{\beta}(y)$  e se  $f : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$  sia una funzione continua, allora:

$$\iint_{\overline{M}} f(x, y) dx dy = \int_{\overline{a}}^{\overline{b}} \left( \int_{\overline{\alpha}(y)}^{\overline{\beta}(y)} f(x, y) dx \right) dy \quad (112)$$

In modo simile, si può dimostrare la seguente formula di riduzione più generale:

**Teorema 3.13** (*Formula di riduzione per un integrale multiplo*)

Sia

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n, x \in A, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

dove  $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$  è un insieme misurabile limitato e chiuso ed  $\alpha, \beta : A \rightarrow \mathbb{R}$  sono due funzioni continue con  $\alpha(x) \leq \beta(x) \forall x \in A$  e sia  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua, allora vale la seguente formula:

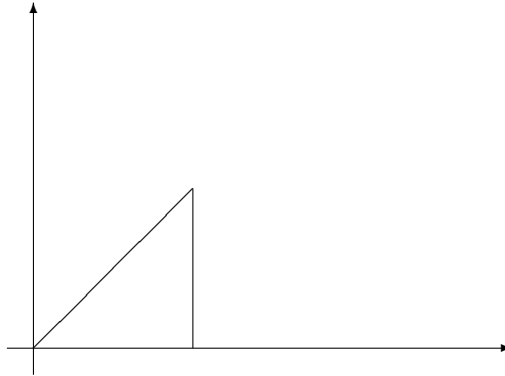
$$\iint_M f(x, y) dx dy = \int_A \left( \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx \quad (113)$$

Concludiamo questo paragrafo, con alcuni esempi.

1. Calcolare l'integrale

$$\iint_D \frac{xy}{1+y} dx dy$$

dove  $D$  è il triangolo di vertici  $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$ .



Il dominio  $D$  è normale rispetto all'asse  $y$  e risulta

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in [0, 1], 0 \leq y \leq x\}$$

Ne deriva quindi, dalla formula di riduzione

$$\iint_D \frac{xy}{1+y} dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^x \frac{xy}{1+y} dy \right) dx = \int_0^1 \left( x \int_0^x \left( 1 - \frac{1}{1+y} \right) dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 x(x - \log(1+x)) dx = \frac{1}{3} - \int_0^1 x \log(1+x) dx$$

D'altra parte, integrando per parti, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \log(1+x) dx &= \frac{x^2}{2} \log(1+x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \log 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 \left( x - 1 + \frac{1}{1+x} \right) dx = \frac{1}{2} \log 2 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 + \log 2 \right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Pertanto

$$\iint_D \frac{xy}{1+y} dx dy = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

2. Calcolare l'integrale

$$\iint_D x dx dy$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$$

Il dominio é normale rispetto all'asse  $y$  e risulta:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in [0, 2], -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$$

Possiamo dunque scrivere:

$$\iint_D x dx dy = \int_0^2 x \left( \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \right) dx = 2 \int_0^2 x \sqrt{4-x^2} dx = -2 \frac{1}{3} (4-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{16}{3}$$

3. Calcolare il volume di una sfera.

Siccome la semisfera superiore ( di raggio  $R$  e centro l'origine ) é il grafico della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

dalla definizione di integrale, risulta che il volume  $V$  della sfera è dato dall'integrale

$$V = 2 \int \int_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

Risulta dunque dalla formula di riduzione:

$$V = 2 \int_{-R}^R \left( \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dy \right) dx$$

Fissato ora  $x \in [-R, R]$ , nell'integrale piú interno, consideriamo la sostituzione

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \sin t$$

Risulta allora, dalla formula di integrazione per sostituzione per integrali di funzioni di una sola variabile:

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dy &= (R^2 - x^2) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = \\ &= (R^2 - x^2) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = (R^2 - x^2) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{\pi}{2} (R^2 - x^2) \end{aligned}$$

Ne possiamo concludere che

$$V = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \pi \left( R^2 2R - \frac{2R^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi R^3$$

4. Calcolare l'integrale

$$\iint_D x y^2 dx dy$$

dove  $D$  è il cerchio di centro il punto  $(1, 0)$  e raggio 1. Osserviamo che il dominio  $D$  può essere scritto come:

$$D = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$$

ed è normale sia rispetto all'asse  $x$  che rispetto all'asse  $y$ . Scrivendo  $D$  nella forma

$$D = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2, x \in [0, 2], -\sqrt{1-(x-1)^2} \leq y \leq \sqrt{1-(x-1)^2}\}$$

possiamo ridurre l'integrale nel seguente modo:

$$\iint_D x y^2 dx dy = \int_0^2 \left( \int_{-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} x y^2 dy \right) dx = \frac{2}{3} \int_0^2 x \left( \sqrt{1-(x-1)^2} \right)^3 dx$$

Usando infine la sostituzione  $x-1 = \sin t$  si ottiene:

$$\iint_D x y^2 dx dy = \frac{2}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin t) \cos^4 t dt = \frac{2}{3} \left[ \frac{-\cos^5 t}{5} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt \right]$$

Ricordando infine che

$$\begin{aligned} \cos^4 t &= (\cos^2 t)^2 = \left( \frac{1 + \cos(2t)}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \left( 1 + 2 \cos(2t) + \frac{1 + \cos(4t)}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{3}{2} + 2 \cos(2t) + \frac{\cos(4t)}{2} \right) \end{aligned}$$

si ottiene che:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{1}{4} \frac{3}{2} \pi$$

si ottiene che

$$\iint_D x y^2 dx dy = \frac{\pi}{4}$$

5. Calcolare l'integrale

$$\iint_D \frac{x}{1+y^2} dx dy$$

dove  $D$  è il triangolo di vertici  $(0, 0), (1, 1), (2, 0)$  Considerando  $D$  normale rispetto all'asse  $x$ , ossia scrivendo

$$D = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2, y \in [0, 1], y \leq x \leq 2-y\}$$

abbiamo la seguente formula di riduzione:

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x}{1+y^2} dx dy &= \int_0^1 \left( \int_y^{2-y} \frac{x}{1+y^2} dx \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{(2-y)^2 - y^2}{1+y^2} \right) dy = \\ &= \int_0^1 \frac{2-2y}{1+y^2} dy = 2 \arctan y - \log(1+y^2) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - \log 2 \end{aligned}$$

### 3.10 Formula di cambiamento di variabile nell'integrale multiplo

Anche nel caso dell'integrale multiplo vale una formula di integrazione per sostituzione che estende quella che conosciamo per l'integrale di funzioni di una sola variabile, ma nel caso di più variabili la dimostrazione risulta molto più complicata.

Cominceremo col considerare il caso in cui il cambiamento di variabile sia dato da un'applicazione lineare. In questo caso, vale il seguente:

**Teorema 3.14 (Cambiamento di variabile lineare)** Sia  $L : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$  un'applicazione lineare non singolare (cioè iniettiva e suriettiva) ed  $E \subset \mathcal{R}^n$  un insieme limitato. Allora  $E \in \mathcal{M}$  se e solo se  $L(E) \in \mathcal{M}$  e vale la seguente formula:

$$\mathcal{L}(L(E)) = |\det J_L| \mathcal{L}(E) \quad (114)$$

dove  $J_L$  è la matrice jacobiana di  $L$  (vedi (68)).

**Dimostrazione.** Ricordiamo che, dalla definizione di matrice jacobiana, nel caso di funzioni lineari, risulta:  $L(x) = J_L \cdot x$  dove il prodotto si intende prodotto riga per colonna della matrice  $n \times n$   $J_L$  e della matrice  $n \times 1$  (vettore colonna)  $x$ .

Verifichiamo, in primo luogo, che la formula (114) vale nel caso che la funzione lineare  $L$  sia particolare.

**Primo caso ( Caso diagonale)** Supponiamo che la matrice  $J_L$  sia diagonale, ossia:

$$L(x) = (d_1 x_1, d_2 x_2, \dots, d_n x_n) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Allora se  $I = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \dots \times [a_n, b_n)$ , risulta :

$$\mathcal{L}(L(I)) = \prod_{j=1}^n |d_j(b_j - a_j)| = \left( \prod_{j=1}^n |d_j| \right) \left( \prod_{j=1}^n (b_j - a_j) \right) = |\det J_L| \mathcal{L}(I)$$

Tale formula si estende poi ai plurintervalli e agli insiemi misurabili e limitati.

**Secondo caso (Matrici semplice)** Chiameremo semplici matrici di due tipi diversi:

**Tipo 1** Siano  $h, k \in \{1, 2, \dots, n\}$  con  $h \neq k$ , indichiamo con  $J_{hk}^{(1)}$  la matrice  $n \times n$  che si ottiene dalla matrice identità scambiando le due colonne di posto  $h$  e  $k$ . Ad esempio:

$$J_{12}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Risulta ovviamente  $\det J_{hk}^{(1)} = -1$  e, se poniamo  $y = L_{hk}^{(1)}(x) = J_{hk}^{(1)} \cdot x$ , risulta  $y_h = x_k$ ,  $y_k = x_h$ , e  $y_j = x_j \forall j \neq h, k$ . Pertanto se  $L = L_{hk}^{(1)}$  la (114) vale. Osserviamo infine che se  $J$  è una generica matrice  $n \times n$  di elementi  $a_{ij}$ , allora  $J \cdot J_{hk}^{(1)}$  è la matrice che si ottiene dalla matrice  $J$  scambiando le due colonne di ordine  $h$  e  $k$ . Vediamolo per esempio nel caso  $h = 1$ ,  $k = 2$ :

$$J \cdot J_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & & \\ a_{n2} & a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

**Tipo 2** Siano  $h, k \in \{1, 2, \dots, n\}$  con  $h \neq k$  e sia  $c \in \mathcal{R}$ , indichiamo con  $J_{hk}^{(2)} = J_{hk}^{(2)}(c)$  la matrice  $n \times n$  i cui elementi sono dati da

$$a_{hk} = c, \quad a_{ij} = \delta_{ij} \quad \text{se } (i, j) \neq (h, k)$$

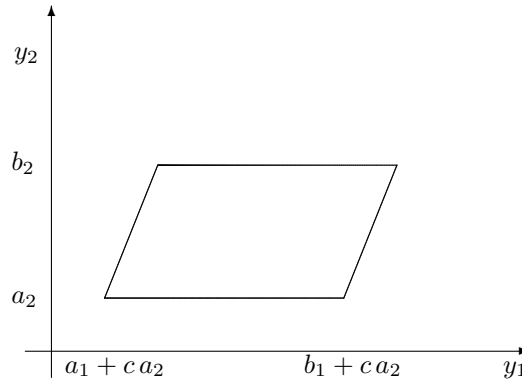
Ad esempio

$$J_{12}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & c & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Risulta  $\det J_{hk}^{(2)} = 1$  e, ragionando per semplicità nel caso che abbiamo considerato, se poniamo  $y = L^{(2)}(x) = J_{12}^{(2)} \cdot x$ , risulta:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + cx_2 \\ y_2 = x_2 \\ \vdots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

Pertanto se  $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ , risulta  $L^{(2)}(I) = A \times [a_3, b_3] \times \cdots \times [a_n, b_n]$  dove  $A$  è il sottoinsieme di  $\mathcal{R}^2$  indicato in figura:



Ne deriva quindi che

$$\mathcal{L}(L^{(2)}(I)) = \mathcal{L}_2(A) \cdot \left( \prod_{j=3}^n (b_j - a_j) \right) = \mathcal{L}(I)$$

Osserviamo infine che se  $J$  è una generica matrice  $n \times n$  di elementi  $a_{ij}$ , allora risulta:

$$\begin{aligned} J \cdot J_{12}^{(2)} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & c & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11}c + a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21}c + a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n1}c + a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{12}^{(2)} \cdot J &= \begin{pmatrix} 1 & c & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} + c a_{12} & a_{12} + c a_{22} & \cdots & a_{1n} + c a_{2n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Risulta pertanto che  $\det(J \cdot J_{12}^{(2)}) = \det(J_{12}^{(2)} \cdot J) = \det J$ . Osserviamo inoltre che la matrice  $J_{hk}^{(2)}(-c)$  è l'inversa della matrice  $J_{hk}^{(2)}(c)$ .

**Caso generale** Se  $L$  è una generica funzione lineare, allora esistono un numero finito di matrici semplici del tipo uno o due:  $J_1, J_2, \dots, J_h$  e  $J'_1, J'_2, \dots, J'_k$  tali che vale la decomposizione:

$$J'_1 \cdot J'_2 \cdot \dots \cdot J'_k \cdot J_L \cdot J_1 \cdot J_2 \dots \cdot J_h = D \quad (115)$$

dove  $D$  è una matrice diagonale.

Per semplicità, verifichiamo questo fatto nel caso  $n = 3$ . Risulta:

$$\begin{aligned}
J_L \cdot J_{12} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11}c + a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21}c + a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31}c + a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Scegliendo quindi

$$c = -\frac{a_{12}}{a_{11}}$$

risulta:

$$J_L \cdot J_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a'_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a'_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Stiamo supponendo ovviamente che sia  $a_{11} \neq 0$ . Se questo non fosse, dovremmo prima fare uno scambio di colonne, in modo che ciò avvenga.

Proseguendo, si ottiene:

$$\begin{aligned}
(J_L \cdot J_{12}) \cdot J_{13} &= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a'_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a'_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{11}c + a_{13} \\ a_{21} & a'_{22} & a_{21}c + a_{23} \\ a_{31} & a'_{32} & a_{31}c + a_{33} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Scegliendo ora

$$c = -\frac{a_{13}}{a_{11}}$$

risulta:

$$(J_L \cdot J_{12}) \cdot J_{13} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix}$$

Infine :

$$\begin{aligned} [(J_L \cdot J_{12}) \cdot J_{13}] \cdot J_{23} &= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a'_{22} & a'_{22}c + a'_{23} \\ a_{31} & a'_{32} & a'_{32}c + a'_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Scegliendo ora

$$c = -\frac{a'_{23}}{a'_{22}}$$

risulta:

$$[(J_L \cdot J_{12}) \cdot J_{13}] \cdot J_{23} = A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a'_{22} & 0 \\ a_{31} & a'_{32} & a''_{33} \end{pmatrix}$$

Quest'ultima scelta si può fare se  $a'_{22} \neq 0$ . Se questo non fosse, dovremmo prima fare uno scambio di colonne, in modo che ciò avvenga.

D'altra parte

$$J_{21} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a'_{22} & 0 \\ a_{31} & a'_{32} & a''_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{11}c + a_{21} & a'_{22} & 0 \\ a_{31} & a'_{32} & a''_{33} \end{pmatrix}$$

e quindi se  $c = \frac{a_{21}}{a_{11}}$ :

$$J_{21} \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & 0 \\ a_{31} & a'_{32} & a''_{33} \end{pmatrix}$$

Possiamo quindi concludere, con opportune scelte di  $c$  che

$$J_{32} \cdot [J_{31} \cdot (J_{21} \cdot A)] = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{pmatrix} = D$$

Dalla decomposizione (115), si ricava che

$$J_L = J_k'^{-1} \dots J_2'^{-1} \cdot J_1'^{-1} \cdot D \cdot J_h^{-1} \cdot \dots \cdot J_2^{-1} \cdot J_1^{-1} \quad (116)$$

Ricordando i passi uno e due e le osservazioni fatte sulle matrici semplici, possiamo concludere che vale la formula (114). q.e.d.

Per estendere la formula (114) al caso di cambiamenti di variabile più generali dobbiamo dare una definizione precisa di ciò che intenderemo con cambiamento di variabile.

Siano  $A, B \subset \mathcal{R}^n$  due insiemi aperti e  $\Phi : A \rightarrow B$  una data funzione. Diremo che  $\Phi$  è un **diffeomorfismo** tra  $A$  e  $B$  se:

- i)  $\Phi$  è una corrispondenza biunivoca tra  $A$  e  $B$ , ossia  $\Phi$  è iniettiva e suriettiva;
- ii)  $\Phi \in C^1(A)$  e  $\Phi^{-1} \in C^1(B)$ .

Molto importante per la dimostrazione della formula del cambiamento di variabili è il seguente:

**LEMMA** Siano  $A, B \subset \mathcal{R}^n$  due insiemi aperti,  $\Phi : A \rightarrow B$  un diffeomorfismo ed  $U \subset A$  un aperto limitato con  $\bar{U} \subset A$ . Allora  $\forall \sigma > 0 \exists r_0 > 0$  tale che se  $x_0 \in U$  e  $0 < r < r_0$ , risulta:

$$\Phi(Q_r(x_0)) \subset F(Q_{r(1+\sigma)}(x_0)) \quad (117)$$



dove abbiamo indicato con  $Q_r(x_0)$  il quadrato  $n$ -dimensionale chiuso di centro  $x_0$  e lato  $2r$ , ossia

$$Q_r(x_0) = [x_{01} - r, x_{01} + r] \times [x_{02} - r, x_{02} + r] \times \dots \times [x_{0n} - r, x_{0n} + r]$$

ed  $F : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$  è la trasformazione affine:

$$F(x) = \Phi(x_0) + J_{\Phi}(x_0) \cdot (x - x_0)$$

**Dimostrazione.** Sia  $d = \text{dist}(\bar{U}, \partial A)$ . Siccome  $\bar{U} \subset A$ , risulta  $d > 0$ . Pertanto se poniamo

$$K = \left\{ x \in A, \text{dist}(x, \bar{U}) \leq \frac{d}{2} \right\}$$

otteniamo un insieme compatto  $K$  con  $\bar{U} \subset K \subset A$ . Essendo  $\Phi$  una funzione continua risulta pure che  $\Phi(K) \subset B$  è un insieme compatto. Possiamo trovare quindi una costante  $M > 0$  tale che

$$|J_{\Phi^{-1}}(y)| \leq M \quad \forall y \in \Phi(K) \quad (118)$$

Ricordiamo che se  $J = \{a_{ij}\}$  è una matrice  $n \times n$ , allora

$$|J| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2}$$

Essendo  $\Phi \in C^1(A)$ , le funzioni  $\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}$  sono continue in  $A$  e quindi uniformemente continue in  $K$ . Fissato quindi  $\sigma > 0$ , possiamo trovare una costante  $r_0 = r_0(\sigma) > 0$  tale che

$$r_0 \in (0, \frac{d}{2\sqrt{n}}) \quad (119)$$

$$|J_{\Phi}(x') - J_{\Phi}(x'')| \leq \frac{\sigma}{M\sqrt{n}} \quad \forall x', x'' \in K, \text{ con } |x' - x''| < r_0 \quad (120)$$

Sia ora  $x_0 \in U$ . Siccome  $\Phi$  è un diffeomorfismo,  $\det J_{\Phi}(x_0) \neq 0$  e quindi l'applicazione lineare  $L(x) = J_{\Phi}(x_0) \cdot x$  è invertibile e  $L^{-1}(y) = J_{\Phi^{-1}}(y_0) \cdot y$  dove  $y_0 = \Phi(x_0)$ . Ne deriva quindi dalla (118) e ricordando anche la stima (70) che, se  $x', x'' \in \mathcal{R}^n$ :

$$|x' - x''| = |L^{-1}(L(x' - x''))| = |J_{\Phi^{-1}}(y_0) \cdot (L(x' - x''))| \leq M|L(x' - x'')| \quad (121)$$

Supponiamo ora che  $y \in \Phi(Q_r(x_0))$  con  $r \in (0, r_0)$  e cerchiamo di provare che  $y \in F(Q_{r(1+\sigma)}(x_0))$ . Usando le notazioni  $x = \Phi^{-1}(y)$  e  $\bar{x} = F^{-1}(y)$ , si ha  $F(\bar{x}) = y = \Phi(x)$  e quindi per la (121):

$$\begin{aligned} |x - \bar{x}| &\leq M|L(x - \bar{x})| = M|F(x) - F(\bar{x})| = \\ &= M|F(x) - \Phi(x)| = M|\Phi(x_0) - \Phi(x) + J_{\Phi}(x_0) \cdot (x - x_0)| \end{aligned}$$

Osserviamo infine che  $x \in Q_r(x_0) \subset B_{r\sqrt{n}}(x_0) \subset K$  in quanto  $x_0 \in \bar{U}$  e  $r\sqrt{n} \leq d/2$ . Pertanto il segmento congiungente  $x$  con  $x_0$  è tutto contenuto in  $K$ . Possiamo ora scrivere, per ogni componente  $\Phi_i$ :

$$\Phi_i(x) - \Phi_i(x_0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} (\Phi_i(x_0 + t(x - x_0))) dt = \sum_{j=1}^n \int_0^1 \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(x_0 + t(x - x_0))(x_j - x_{0j}) dt$$

Pertanto risulta

$$\Phi(x) - \Phi(x_0) = \int_0^1 (J_{\Phi}(x_0 + t(x - x_0)) \cdot (x - x_0)) dt$$

Possiamo quindi concludere che

$$|x - \bar{x}| \leq M \left| \int_0^1 (J_{\Phi}(x_0 + t(x - x_0)) - J_{\Phi}(x_0)) \cdot (x - x_0) dt \right| \leq M \frac{\sigma}{M\sqrt{n}} |x - x_0| \leq \sigma r$$

Possiamo pertanto concludere  $\forall i = 1, 2, \dots, n$  che

$$|\bar{x}_i - x_{0i}| \leq |\bar{x}_i - x_i| + |x_i - x_{0i}| \leq \sigma r + r = r(1 + \sigma)$$

Ossia che  $y = F(\bar{x}) \in F(Q_{r(1+\sigma)}(x_0))$ .

q.e.d.

Siamo ora in grado di dimostrare la seguente:

**Proposizione** Siano  $A, B \subset \mathcal{R}^n$  due insiemi aperti,  $\Phi : A \rightarrow B$  un diffeomorfismo ed  $C \subset A$  un insieme limitato e chiuso. Allora vale la disuguaglianza:

$$\mathcal{L}(\Phi(C)) \leq \int_C |J_\Phi(x)| dx \quad (122)$$

**Dimostrazione.** Ricordiamo che, dalla definizione di misura di Lebesgue (vedi (85)), risulta che:

$$\mathcal{L}(C) = \inf\{\mathcal{L}(P), P \text{ plurintervallo chiuso con } C \subset P \subset A\}$$

Osserviamo ora che risulta pure:

$$\mathcal{L}(C) = \inf\{\mathcal{L}(P'), P' \in \mathcal{P}', C \subset P'\} \quad (123)$$

dove  $\mathcal{P}'$  è la famiglia dei plurintervalli che sono riunione di un numero finito di intervalli  $n$ -dimensionali chiusi, ognuno dei quali è prodotto di  $n$  intervalli unidimensionali i cui estremi sono numeri diadici. Ossia, indicato con

$$\mathcal{D} = \left\{ \frac{h}{2^k}, h \in \mathcal{Z}, k \in \mathcal{N} \right\}$$

si ha che

$$P' \in \mathcal{P}' \iff P' = \bigcup_{j=1}^N I'_j$$

dove  $I'_j = I'$  è un intervallo del tipo:

$$I' = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \text{ con } a_i, b_i \in \mathcal{D} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

La dimostrazione di (123) viene lasciata per esercizio.

Cominciamo dunque a dimostrare la (122) nel caso che  $C = P' \in \mathcal{P}'$  sia un plurintervallo contenuto in  $A$ . Siccome  $P'$  è un compatto e  $P' \subset A$ , possiamo trovare un aperto  $U$  con  $P' \subset U \subset \bar{U} \subset A$  e applicare il Lemma. Fissato dunque  $\sigma > 0$  sia  $r_0 = r_0(\sigma) > 0$  la costante con le proprietà indicate dal Lemma. Possiamo infine scegliere  $r \in (0, r_0)$  tale che:

$$\text{i) } \forall x', x'' \in P' \text{ con } |x' - x''| < r \quad |det J_\Phi(x') - det J_\Phi(x'')| < \sigma \quad (124)$$

ii)  $\exists x_1, x_2, \dots, x_N \in P'$  tali che

$$P' = \bigcup_{j=1}^N Q_r(x_j) \text{ con } \overset{\circ}{Q}_r(x_i) \cap \overset{\circ}{Q}_r(x_j) = \emptyset \text{ se } i \neq j$$

Usando infine la notazione

$$F_i(x) = \Phi(x_i) + J_\Phi(x_i) \cdot (x - x_i) \quad x \in \mathcal{R}^n$$

dalle (117) e (114) si ottiene:

$$\mathcal{L}(\Phi(P')) \leq \sum_{j=1}^N \mathcal{L}(\Phi(Q_r(x_j))) \leq \sum_{j=1}^N \mathcal{L}(F_j(Q_{r(1+\sigma)}(x_j))) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^N |det J_{\Phi}(x_j)| 2^n r^n (1 + \sigma)^n = (1 + \sigma)^n \sum_{j=1}^N \int_{Q_r(x_j)} |det J_{\Phi}(x_j)| dx \leq \\
&\leq (1 + \sigma)^n \sum_{j=1}^N \int_{Q_r(x_j)} |det J_{\Phi}(x_j) - det J_{\Phi}(x)| dx + (1 + \sigma)^n \sum_{j=1}^N \int_{Q_r(x_j)} |det J_{\Phi}(x)| dx \leq \\
&\leq \sigma (1 + \sigma)^n m(P') + (1 + \sigma)^n \int_{P'} |det J_{\Phi}(x)| dx
\end{aligned}$$

Infine se  $\sigma \rightarrow 0$ , si ottiene

$$\mathcal{L}(\Phi(P')) \leq \int_{P'} |det J_{\Phi}(x)| dx \quad (125)$$

Per ottenere la (122) nel caso generale, basta osservare che é possibile trovare un successione decrescente  $P'_h \in \mathcal{P}'$  con  $C \subset P'_h$  e

$$\mathcal{L}\left(C - \bigcap_{h=1}^{\infty} P'_h\right) = \mathcal{L}(C) - \lim_{h \rightarrow \infty} \mathcal{L}(P'_h) = 0$$

e quindi

$$\mathcal{L}(\Phi(C)) \leq \lim_{h \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\Phi(P'_h)) = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{P'_h} |det J_{\Phi}(x)| dx = \int_C |det J_{\Phi}(x)| dx$$

q.e.d.

**Proposizione** Siano  $A, B \subset \mathcal{R}^n$  due insiemi aperti,  $\Phi : A \rightarrow B$  un diffeomorfismo ed  $E \subset A$  un insieme limitato e chiuso. Indichiamo con  $D = \Phi(E) \subset B$ . Allora se  $f : D \rightarrow \mathcal{R}$  è una funzione continua non negativa, risulta:

$$\int_D f(y) dy \leq \int_E f(\Phi(x)) |det J_{\Phi}(x)| dx \quad (126)$$

**Dimostrazione** Siccome  $f$  è uniformemente continua in  $D$ ,  $\forall \varepsilon > 0$  possiamo decomporre  $D$  come

$$D = \bigcup_{j=1}^N D_j$$

dove gli insiemi  $D_j$  sono misurabili tali che  $M_j - m_j < \varepsilon$  dove  $M_j$  ed  $m_j$  sono rispettivamente i massimi ed i minimi valori che la funzione  $f$  assume su  $D_j$ . Allora, posto  $E_j = \Phi^{-1}(D_j)$ , si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int_D f(y) dy &\leq \sum_{j=1}^N M_j \mathcal{L}(D_j) \leq \\
&\leq \varepsilon \mathcal{L}(D) + \sum_{j=1}^N m_j \mathcal{L}(\Phi(E_j)) \leq \varepsilon \mathcal{L}(D) + \sum_{j=1}^N m_j \int_{E_j} |det J_{\Phi}(x)| dx \leq \\
&\leq \varepsilon \mathcal{L}(D) + \sum_{j=1}^N \int_{E_j} f(\Phi(x)) |det J_{\Phi}(x)| dx \leq \varepsilon \mathcal{L}(D) + \int_E f(\Phi(x)) |det J_{\Phi}(x)| dx
\end{aligned}$$

La (126) si ottiene infine facendo tendere  $\varepsilon$  a zero.

Siamo ora finalmente in grado di provare il:

**Teorema 3.15 Cambiamento di variabile nell'integrale multiplo** Siano  $A, B \subset \mathcal{R}^n$  due insiemi aperti,  $\Phi : A \rightarrow B$  un diffeomorfismo ed  $E \subset A$  un insieme misurabile. Indichiamo con  $D = \Phi(E) \subset B$ . Allora se  $f : D \rightarrow \mathcal{R}$  è una funzione continua, risulta:

$$\int_D f(y) dy = \int_E f(\Phi(x)) |det J_{\Phi}(x)| dx \quad (127)$$

**Dimostrazione.** Dimostreremo in primo luogo il teorema nel caso che  $E$  sia limitato e chiuso e che  $f$  sia non negativa. In vista della (126), basta provare che vale anche la disuguaglianza:

$$\int_D f(y) dy \geq \int_E f(\Phi(x)) |det J_\Phi(x)| dx$$

Questa disuguaglianza si può ottenere applicando la (126) alla funzione  $f(\Phi(x))|det J_\Phi(x)|$  usando come diffeomorfismo  $\Phi^{-1}$ . Infatti si ottiene, in tal caso:

$$\begin{aligned} \int_E f(\Phi(x))|det J_\Phi(x)| dx &\leq \int_D f(\Phi(\Phi^{-1}(y)))|det J_\Phi(\Phi^{-1}(y))||det J_{\Phi^{-1}}(y)| dy = \\ &= \int_D f(y) dy \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che

$$J_{\Phi^{-1}}(y) = (J_\Phi)^{-1}(\Phi^{-1}(y))$$

Se poi  $E \subset A$  è solo misurabile, ricordiamo che per la (??), è possibile trovare una successione crescente di compatti  $K_h \subset E$  con

$$\mathcal{L}(E) = \lim_{h \rightarrow \infty} \mathcal{L}(K_h)$$

La formula (127) vale dunque per i compatti  $K_h$  e quindi basta passare al limite per  $h \rightarrow \infty$ . q.e.d.

Due cambiamenti di variabile che useremo spesso sono i seguenti:

a) **Coordinate polari in  $\mathcal{R}^2$**  Sia  $\Phi : \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^2$  la funzione definita da

$$\Phi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$

Se consideriamo  $\Phi : A \rightarrow B$  dove  $A = (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$  e  $B = \mathcal{R}^2 - \{(x, 0) \in \mathcal{R}^2, x \geq 0\}$  otteniamo un diffeomorfismo. Siccome

$$J_\Phi(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

si ottiene che  $det J_\Phi(\rho, \theta) = \rho$ . Pertanto se  $D \subset B$  e  $E = \Phi^{-1}(D)$  vale la formula :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \quad (128)$$

a) **Coordinate polari in  $\mathcal{R}^3$**  Sia  $\Phi : \mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{R}^3$  la funzione definita da

$$\Phi(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta)$$

Se consideriamo  $\Phi : A \rightarrow B$  dove  $A = (0, +\infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$  e  $B = \mathcal{R}^3 - \{(x, 0, z) \in \mathcal{R}^3, x \geq 0, z \in \mathcal{R}\}$  otteniamo un diffeomorfismo. Siccome

$$J_\Phi(\rho, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

si ottiene che

$$\begin{aligned} det J_\Phi(\rho, \theta, \varphi) &= \rho^2 (\sin^3 \theta \sin^2 \varphi + \sin \theta \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin \theta \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + \\ &+ \sin^3 \theta \cos^2 \varphi) = \rho^2 \sin \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \rho^2 \sin \theta \end{aligned}$$

Pertanto se  $D \subset B$  e  $E = \Phi^{-1}(D)$  vale la formula :

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_E f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi \end{aligned} \quad (129)$$

### 3.11 Volume di un solido di rotazione

Una applicazione interessante della formula (127) è il calcolo del volume di una solido di rotazione.

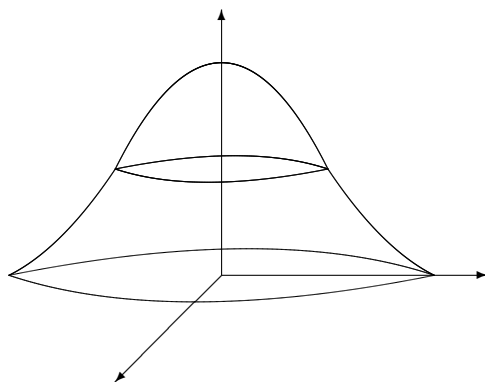
Se  $E \subset \mathcal{R}^3$  diremo che  $E$  è un solido di rotazione attorno all'asse  $z$  se  $\forall z \in \mathcal{R}$  l'intersezione di  $E$  col piano orizzontale di  $\mathcal{R}^3$  passante per il punto  $(0, 0, z)$  è un cerchio di centro l'origine e raggio  $r(z)$ , ossia se  $\forall z \in \mathcal{R}$  si ha:

$$E_z = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2, (x, y, z) \in E\} = B_{r(z)}(0, 0)$$

In altre parole, supponendo che la proiezione di  $E$  sull'asse  $z$  sia un intervallo  $[a, b]$ , allora

$$(x, y, z) \in E \iff z \in [a, b], \quad x^2 + y^2 \leq r^2(z)$$

dove, per semplicità supporremo che la funzione  $r : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$  sia una funzione continua non negativa. (vedi figura)



Se consideriamo le coordinate polari in  $\mathcal{R}^2$ , allora la funzione  $\Phi : \mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{R}^3$  data dalla legge.

$$\Phi(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)$$

è un diffeomorfismo tra gli insiemi  $\{(\rho, \theta, z) \in \mathcal{R}^3, z \in [a, b], \theta \in (0, 2\pi), \rho \in (0, r(z))\}$  ed  $E^* = E - \{(x, 0, z) \in \mathcal{R}^3, x \geq 0\}$ . Risulta inoltre:

$$J_{\Phi}(\rho, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

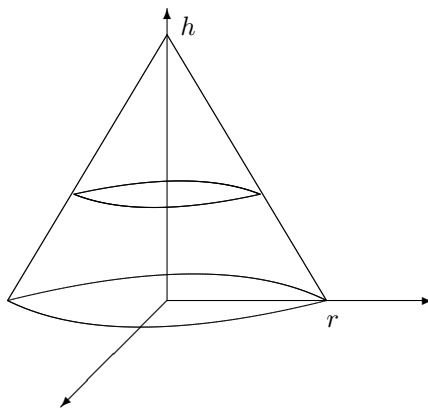
e quindi  $\det J_{\Phi}(\rho, \theta, z) = \rho$ . Applicando dunque la formula di integrazione per sostituzione in  $\mathcal{R}^3$ , otteniamo la seguente formula:

**Volume di una solido di rotazione:**

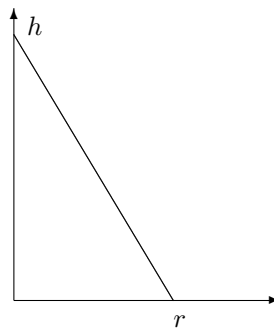
$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3(E) &= \iiint_E dx dy dz = \\ &= \int_a^b dz \left[ \int_0^{2\pi} d\theta \left( \int_0^{r(z)} \rho d\rho \right) \right] = \pi \int_a^b r^2(z) dz \end{aligned} \quad (130)$$

Usiamo la (130) per calcolare alcuni volumi.

1. **Volume di un cono** Consideriamo il cono circolare retto  $C_{r,h}$  della figura:



L'intersezione del cono col semipiano  $x = 0, y \geq 0$  è indicata nella figura:



e la retta che dà le generatrici del cono ha equazione:

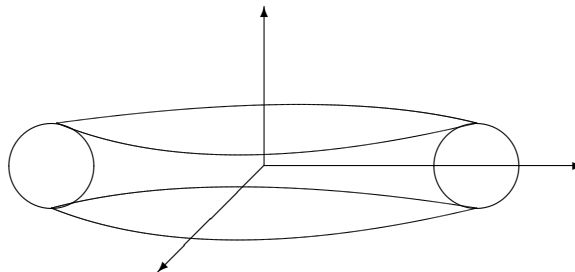
$$z = h - \frac{h}{r} y \quad \text{ossia} \quad y = \frac{r}{h}(h - z) = r(z)$$

Applicando la formula (130), otteniamo

$$\mathcal{L}_3(C_{r,h}) = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} (h - z)^2 dz = \pi \frac{r^2}{h^2} \left. \frac{-(h - z)^3}{3} \right|_0^h = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

## 2. Volume di un toro

Consideriamo nel piano  $yz$  un cerchio  $C$  di centro il punto  $(R, 0)$  e raggio  $r$  con  $0 < r < R$ . Facendo ruotare  $C$  attorno all'asse  $z$  si ottiene la figura geometrica che indicheremo con  $T_{Rr}$  nota col nome di toro, un solido di  $\mathcal{R}^3$  del tipo indicato in figura:



L'equazione della circonferenza  $C = \partial C$  è data da  $(y - R)^2 + z^2 = r^2$  ed è formata dalla riunione delle due semicirconferenze:

$$y = R + \sqrt{r^2 - z^2} = r_+(z)$$

$$y = R - \sqrt{r^2 - z^2} = r_-(z)$$

Usando la (130), il volume del toro è dato dall'integrale:

$$m_3(T_{Rr}) = \pi \int_{-r}^r (r_+^2(z) - r_-^2(z)) dz$$

Usando infine la sostituzione  $z = r \sin t$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3(T_{Rr}) &= 4\pi \int_{-r}^r R\sqrt{r^2 - z^2} dz = 4\pi Rr^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \\ &= 2\pi^2 Rr^2 = (2\pi R)(\pi r^2) \end{aligned}$$

### 3.12 Alcuni esercizi

Applichiamo in questo paragrafo i risultati dei paragrafi precedenti per calcolare alcuni integrali.

1. Calcolare l'integrale

$$\iint_D \frac{1}{1+x+y^2} dx dy$$

dove  $D$  è il triangolo di vertici  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,1)$ . Consideriamo il dominio  $D$  normale rispetto all'asse  $x$ , ossia scriviamo

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \in [0,1], 0 \leq x \leq y\}$$

Possiamo allora scrivere

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{1}{1+x+y^2} dx dy &= \int_0^1 \left( \int_0^y \frac{dx}{1+x+y^2} \right) dy = \\ &= \int_0^1 (\log(1+y+y^2) - \log(1+y^2)) dy \end{aligned}$$

Integrando per parti, otteniamo

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\log(1+y+y^2) - \log(1+y^2)) dy &= y (\log(1+y+y^2) - \log(1+y^2)) \Big|_0^1 - \\ &\quad - \int_0^1 \left( \frac{y(1+2y)}{1+y+y^2} - \frac{2y^2}{1+y^2} \right) dy \end{aligned}$$

Osserviamo infine che risulta

$$\begin{aligned} \frac{y(1+2y)}{1+y+y^2} &= 2 - \frac{y+2}{1+y+y^2} = 2 - \frac{1}{2} \frac{2y+1}{1+y+y^2} - \frac{3}{2} \frac{1}{1+y+y^2} \\ \frac{y^2}{1+y^2} &= 1 - \frac{1}{1+y^2} \end{aligned}$$

Ne deriva quindi che

$$\iint_D \frac{1}{1+x+y^2} dx dy = \log 3 - \log 2 + \frac{1}{2} \log 3 - \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{dy}{1+y+y^2}$$

Concludiamo infine, osservando che

$$1+y+y^2 = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \left(1 + \left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)$$

e quindi

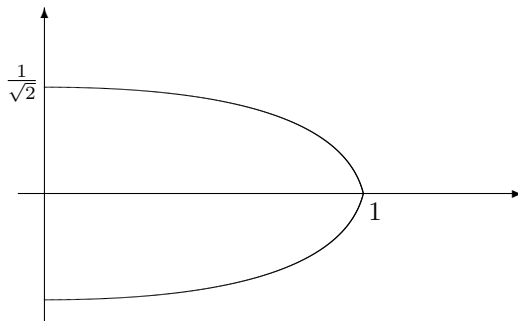
$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dy}{1+y+y^2} &= \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{1}{1 + \left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right)^2} dy = \\ &= \frac{4}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \arctan \left( \frac{2y+1}{\sqrt{3}} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \arctan \sqrt{3} - \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

2. Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_D x y^2 dx dy$$

dove  $D = \{(x, y) ; x^2 + 2y^2 \leq 1, x \geq 0\}$ .

Il dominio  $D$  è indicato dalla figura:



Se consideriamo il cambiamento di variabili:

$$\Phi(\rho, \theta) = \left( \rho \cos \theta, \frac{1}{\sqrt{2}} \rho \sin \theta \right)$$

si ottiene che:

$$\phi^{-1}(D) = D' = [0, 1] \times \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$J_{\Phi}(\rho, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\det J_{\Phi}(\rho, \theta) = \frac{\rho}{\sqrt{2}}$$

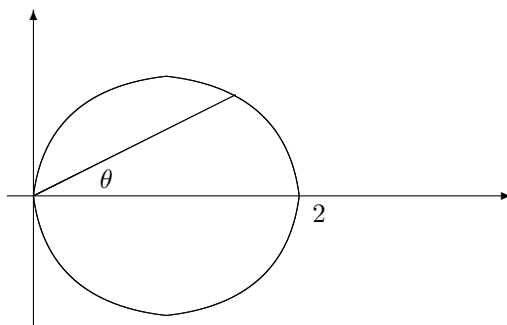
Risulta pertanto:

$$\begin{aligned} \iint_D x y^2 dx dy &= \int_0^1 \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho \cos \theta \frac{1}{2} \rho^2 \sin^2 \theta \frac{\rho}{\sqrt{2}} d\rho \right) d\theta = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{5} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{15\sqrt{2}} \end{aligned}$$

3. Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

dove  $D$  è il cerchio di centro il punto  $(1, 0)$  e raggio 1.





Passando in coordinate polari, otteniamo che

$$\Phi^{-1}(D) = D' = \left\{ (\rho, \theta) \in \mathcal{R}^2, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq \rho \leq 2 \cos \theta \right\}$$

Pertanto:

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{2 \cos \theta} \rho \rho d\rho \right) d\theta = \frac{8}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta$$

D'altra parte, integrando per parti, si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \cdot \cos^2 \theta d\theta = \sin \theta \cos^2 \theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \\ &+ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cdot 2 \cos \theta \sin \theta d\theta = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta \end{aligned}$$

Possiamo quindi concludere che:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta = \frac{2}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = \frac{4}{3}$$

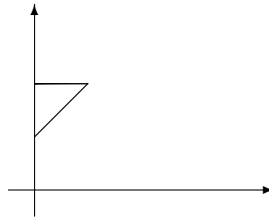
Pertanto:

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \frac{32}{9}$$

4. Calcolare il seguente:

$$\iint_D x \log y dx dy$$

dove  $D$  è il triangolo di vertici i punti di coordinate  $(0, 1)$ ,  $(0, 2)$  e  $(1, 2)$ .



Considerando il dominio normale rispetto all'asse  $x$ , possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \iint_D x \log y dx dy &= \int_1^2 \left( \int_0^{y-1} x \log y dx \right) dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 (y-1)^2 \log y dy \end{aligned}$$

Integrando infine per parti, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_1^2 (y-1)^2 \log y dy &= \frac{(y-1)^3}{3} \log y \Big|_1^2 - \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{(y-1)^3}{y} dy = \\ &= \frac{\log 2}{3} - \frac{1}{3} \int_1^2 \left( y^2 - 3y + 3 - \frac{1}{y} \right) dy = \\ &= \frac{\log 2}{3} - \frac{1}{3} \left[ \frac{8-1}{3} - 3 \frac{4-1}{2} + 3 - \log 2 \right] = \frac{2 \log 2}{3} - \frac{5}{18} \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\iint_D x \log y dx dy = \frac{\log 2}{3} - \frac{5}{36}$$

5. Calcolare il seguente:

$$\iint_D x^2 y^2 dx dy$$

dove

$$D = \{(x, y), x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

Passando in coordinate polari in  $\mathcal{R}^2$ , si ottiene:

$$\iint_D x^2 y^2 dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^1 \rho^5 \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\rho \right) d\theta = \frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta$$

Usando infine la formula:

$$\cos^2 \theta \sin^2 \theta = \frac{\sin^2(2\theta)}{4} = \frac{1}{8} (1 - \cos(4\theta))$$

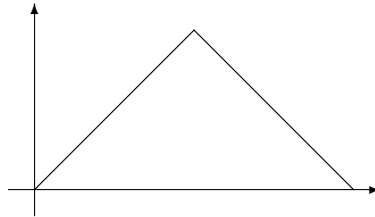
risulta:

$$\iint_D x^2 y^2 dx dy = \frac{1}{6} \frac{1}{8} \left[ \theta - \frac{\sin(4\theta)}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right] = \frac{\pi}{96}$$

6. Calcolare il seguente integrale:

$$\iint_D \frac{x}{1+x+y} dx dy$$

dove  $D$  é il triangolo di vertici i punti di coordinate  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  e  $(2, 0)$ . Dalla figura risulta:



$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x}{1+x+y} dx dy &= \int_0^1 \left( \int_0^x \frac{x}{1+x+y} dy \right) dx + \int_1^2 \left( \int_0^{2-x} \frac{x}{1+x+y} dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 x [\log(1+2x) - \log(1+x)] dx + \int_1^2 x [\log 3 - \log(1+x)] dx = \\ &= \frac{3}{2} \log 3 + \int_0^1 x \log(1+2x) dx - \int_0^2 x \log(1+x) dx \end{aligned}$$

D'altra parte, integrando per parti, si ottiene:

$$\int_0^1 x \log(1+2x) dx = \frac{x^2}{2} \log(1+2x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{1+2x} dx$$

ed usando la decomposizione

$$\frac{x^2}{1+2x} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{4(1+2x)}$$

si può concludere che:

$$\int_0^1 x \log(1+2x) dx = \frac{1}{2} \log 3 - \left[ \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \log 3 \right] = \frac{3}{8} \log 3$$

In maniera simile:

$$\int_0^2 x \log(1+x) dx = \frac{x^2}{2} \log(1+x) \Big|_0^2 - \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{x^2}{1+x} dx$$

ed usando, in questo caso, la decomposizione

$$\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$$

si può concludere che:

$$\int_0^2 x \log(1+x) dx = 2 \log 3 - \frac{1}{2} [2 - 2 + \log 3] = \frac{3}{2} \log 3$$

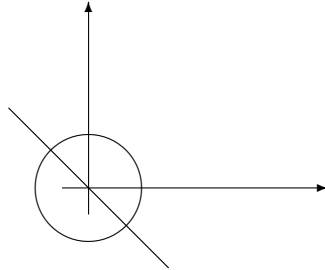
Possiamo quindi calcolare

$$\iint_D \frac{x}{1+x+y} dx dy = \frac{3}{2} \log 3 + \frac{3}{8} \log 3 - \frac{3}{2} \log 3 = \frac{3}{8} \log 3$$

7. Calcolare l'integrale:

$$\iint_D (x+y) dx dy$$

dove  $D$  é l'intersezione del cerchio di centro l'origine e raggio 1 con il semipiano  $\Pi = \{(x, y), x+y \geq 0\}$ .



Passando in coordinate polari, si ottiene:

$$\iint_D (x+y) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left( \int_0^1 \rho^2 (\cos \theta + \sin \theta) d\rho \right) d\theta = \frac{1}{3} (\sin \theta - \cos \theta) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

Ricordando che

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

si ottiene:

$$\iint_D (x+y) dx dy = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

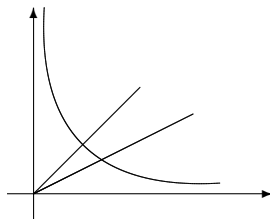
8. Calcolare il seguente integrale:

$$\iint_D y(1+x) dx dy$$

dove  $D$  é l'insieme:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, xy \leq 1, \frac{x}{2} \leq y \leq x\}$$

(Vedi figura)



Consideriamo il seguente cambiamento di variabili:

$$x y = u \in [0, 1]$$

$$\frac{y}{x} = v \in \left[ \frac{1}{2}, 1 \right]$$

ossia:  $y = v x$ ,  $x^2 v = u$  e pertanto:

$$\begin{cases} x = u^{1/2} v^{-1/2} \\ y = u^{1/2} v^{1/2} \end{cases}$$

Posto  $\Phi(u, v) = (x, y)$  otteniamo un diffeomorfismo tra gli insiemi  $(0, 1) \times (1/2, 1)$  e  $D$ . Risulta

$$J_{\Phi}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

Pertanto

$$\det J_{\Phi}(u, v) = \frac{1}{2v}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} \iint_D y(1+x) dx dy &= \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \left( \int_0^1 u^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}} (1 + u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}}) v^{-1} du \right) dv = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \left( \int_0^1 (u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} + u v^{-1}) du \right) dv = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \left( \frac{2}{3} v^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} v^{-1} \right) dv = \\ &= \left( \frac{2}{3} v^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \log v \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{4} \log 2 \end{aligned}$$

9. Calcolare il volume dell'elissoide:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$$

dove  $a, b, c \in \mathcal{R}$  sono numeri fissati positivi.

Usando la (113), si ricava:

$$\mathcal{L}_3(E) = 2c \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$$

dove  $D$  è l'ellisse:

$$D = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$$

Se consideriamo il cambiamento di variabili:

$$\Phi(\rho, \theta) = (a \rho \cos \theta, b \rho \sin \theta)$$

si ottiene che:

$$\phi^{-1}(D) = D' = [0, 1] \times [0, 2\pi]$$

$$J_{\Phi}(\rho, \theta) = ab \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\det J_{\Phi}(\rho, \theta) = ab\rho$$

Risulta pertanto:

$$\mathcal{L}_3(E) = 2c \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \rho^2} \rho d\rho \right) d\theta = 4\pi abc \left( -\frac{1}{3} (1 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 \right) = \frac{4}{3} \pi abc$$

### 3.13 Misura della sfera unità in $\mathcal{R}^n$

Applicheremo in questo paragrafo, la formula (109) per calcolare il volume della sfera unità in  $\mathcal{R}^n$ ,  $n \geq 2$ .

Indicheremo con  $B_R = \{x \in \mathcal{R}^n, |x| \leq R\}$  e con

$$\omega_n = \mathcal{L}_n(B_1) \quad (131)$$

Applicando la (109) abbiamo:

$$\omega_n = \int_{-1}^1 \mathcal{L}_{n-1}(B_z) dz$$

dove abbiamo indicato per semplicità con  $B_z = (B_1)_z$ . Ora se  $z \in [-1, 1]$ ,  $x' \in B_z \iff |x'| + z^2 \leq 1 \iff |x'| \leq 1 - z^2$ . Pertanto  $B_z$  è la sfera  $n-1$ -dimensionale di centro l'origine e raggio  $\sqrt{1-z^2}$ . Siccome è facile vedere che nello spazio  $n$ -dimensionale  $\mathcal{L}_n(B_R) = \omega_n R^n$ , abbiamo:

$$\omega_n = \int_{-1}^1 \omega_{n-1} \left(\sqrt{1-z^2}\right)^{n-1} dz$$

ed usando infine la sostituzione  $z = \sin t$ :

$$\omega_n = \omega_{n-1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt = 2\omega_{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt = 2\omega_{n-1} \alpha_n \quad (132)$$

Cerchiamo ora di calcolare  $\alpha_n$   $n \geq 2$ . Integrando per parti, si ottiene:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos^{n-1} t dt = \sin t \cos^{n-1} t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^{n-2} t dt = \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} t dt - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt \end{aligned}$$

otteniamo quindi la seguente formula di ricorrenza;

$$\alpha_n = \frac{n-1}{n} \alpha_{n-2} \quad \forall n \geq 2 \quad (133)$$

Siccome

$$\alpha_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0 t dt = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 1$$

Per induzione si ottengono le seguenti formule che esprimono  $\alpha_n$  o seconda che  $n$  è pari o dispari. Ossia  $\forall k \in \mathcal{N}$ ,  $k \geq 1$ :

$$\alpha_{2k} = \frac{(2k-1)(2k-3)\dots 5 \cdot 3}{(2k)(2k-2)\dots 4 \cdot 2} \frac{\pi}{2} \quad (134)$$

$$\alpha_{2k+1} = \frac{(2k)(2k-2)\dots 4 \cdot 2}{(2k+1)(2k-1)\dots 5 \cdot 3} \quad (135)$$

Combinando infine le (132), (134) e (135), si ottiene,  $\forall k \in \mathcal{N}$ ,  $k \geq 1$ :

$$\frac{\omega_{2k}}{\omega_{2k-2}} = 4\alpha_{2k}\alpha_{2k-1} = \frac{\pi}{k} \quad (136)$$

$$\frac{\omega_{2k+1}}{\omega_{2k-1}} = 4\alpha_{2k+1}\alpha_{2k} = \frac{2\pi}{(2k+1)} \quad (137)$$

e da queste, sempre ragionando per induzione si ottengono le formule cercate:

$$\omega_{2k} = \frac{\pi^k}{k!} \quad (138)$$

$$\omega_{2k+1} = \frac{2^{k+1} \pi^k}{(2k+1)!!} \quad (139)$$

### 3.14 Integrale che dipende da un parametro

Siano  $A \subset \mathcal{R}^n$  un aperto,  $M \subset \mathcal{R}^m$  un insieme misurabile ed  $f : A \times M \rightarrow \mathcal{R}$  una funzione misurabile. Supponiamo che  $\forall x \in A \ f(x, \cdot) \in \mathcal{L}^1(M)$ . Allora possiamo definire la funzione:

$$g(x) = \int_M f(x, y) dy \quad x \in A \quad (140)$$

Siamo interessati a studiare la regolarità della funzione  $g$ .

Valgono i seguenti due teoremi:

**Teorema 3.16 (Teorema sulla continuità della funzione  $g$ )** Supponiamo  $x_0 \in A$  e che:

i)  $\forall y \in M \ f(\cdot, y)$  sia continua in  $x_0$ ,

ii) esista  $h \in \mathcal{L}^1(M)$  con

$$|f(x, y)| \leq h(y) \quad \forall x \in A, \ y \in M$$

Allora la funzione  $g$  è continua in  $x_0$  e

$$g(x_0) = \int_M f(x_0, y) dy$$

**Dimostrazione.** Supponiamo che  $x_h$  sia una successione di elementi di  $A$  con  $x_h \rightarrow x_0$ , allora:

i)  $\forall y \in M \ f(x_h, y) \rightarrow f(x_0, y)$ ,

ii)  $|f(x_h, y)| \leq h(y) \quad \forall n \in \mathcal{R}, \ y \in M$

Per il teorema di Lebesgue sulla convergenza dominata, risulta allora:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} g(x_h) = \int_M \lim_{h \rightarrow \infty} f(x_h, y) dy = \int_M f(x_0, y) dy = g(x_0)$$

q.e.d.

**Teorema 3.17 (Teorema sulla derivabilità di  $g$ )** Supponiamo che:

i)  $f(x, y)$  abbia derivata parziale rispetto alla variabile  $x_k$  in ogni punto di  $A \times M$ ,

ii) esista  $h \in \mathcal{L}^1(M)$  con

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(x, y) \right| \leq h(y) \quad \forall x \in A, \ y \in M$$

Allora  $g$  è derivabile rispetto alla variabile  $x_k$  in  $A$  e vale  $\forall x \in A$ :

$$\frac{\partial g}{\partial x_k}(x) = \int_M \frac{\partial f}{\partial x_k}(x, y) dy \quad (141)$$

**Dimostrazione.** Sia  $x_0 \in A$  e  $x_s = x_0 + h_s e_k$ , dove  $h_s \neq 0$  è una successione di numeri reali che tende a zero. Allora:

$$\frac{g(x_0 + h_s e_k) - g(x_0)}{h_s} = \int_M \frac{f(x_0 + h_s e_k, y) - f(x_0, y)}{h_s} dy$$

Posto infine

$$\varphi_s(y) = \frac{f(x_0 + h_s e_k, y) - f(x_0, y)}{h_s}$$

risulta:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \varphi_s(y) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0, y) \quad \forall y \in M$$

e, per il teorema del valor medio:

$$|\varphi_s(y)| = \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0 + \theta_s e_k, y) \right| \leq h(y)$$

e quindi posso applicare il teorema della convergenza dominata.

q.e.d.

Un esempio importante di integrale che dipende da un parametro è il seguente integrale:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} y^{x-1} e^{-y} dy \quad (142)$$

definito per  $x \in \mathcal{R}$ ,  $x > 0$ .

La funzione  $f(x, y) = y^{x-1} e^{-y}$  definita in  $A = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2, x > 0, y > 0\}$  è di classe  $C^\infty$  e  $\forall x > 0$ ,  $f(x, \cdot) \in \mathcal{L}^1(0, +\infty)$  e quindi la funzione  $\Gamma$  che viene chiamata appunto **la funzione Gamma** è di classe  $C^\infty$ . Da notare che risulta:

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy = \int_0^{+\infty} y^{x-1} \lg y e^{-y} dy \quad (143)$$

Da notare anche che si ottiene integrando per parti, per ogni  $x > 0$ :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} y^x e^{-y} dy = -y^x e^{-y} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x y^{x-1} e^{-y} dy = x \Gamma(x)$$

Siccome

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-y} dy = 1$$

si ottiene  $\forall n \in \mathcal{N}$ :

$$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n) = n(n-1) \Gamma(n-1) = n(n-1)(n-2) \cdots 1 \Gamma(1) = n! \quad (144)$$

Da notare ancora che, con la sostituzione  $y = s^2$ , si ottiene:

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} y^{-1/2} e^{-y} dy = 2 \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}$$

Usando la (144) possiamo ottenere il seguente risultato, noto col nome di **formula asintotica di Stirling**:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n n!}{n^n \sqrt{2\pi n}} = 1 \quad (145)$$

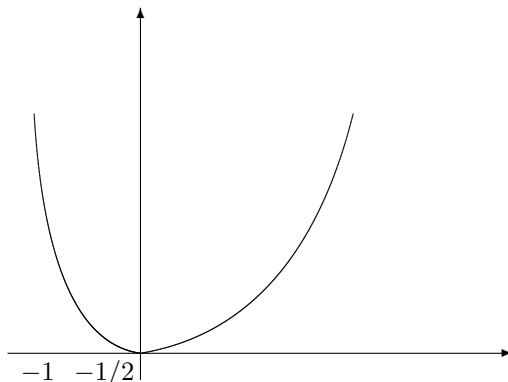
Infatti, usando la (144) e la sostituzione  $y = n(1+s)$ , so ottiene;

$$\frac{e^n n!}{n^n \sqrt{2\pi n}} = \frac{e^n}{n^n \sqrt{2\pi n}} \int_0^{+\infty} y^n e^{-y} dy = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{+\infty} (1+s)^n e^{-ns} ds$$

Scriviamo ora la funzione integranda come  $e^{-n(s-\lg(1+s))}$  ed indichiamo con  $\varphi(s) = s - \lg(1+s)$ . Siccome

$$\varphi'(s) = 1 - \frac{1}{1+s} = \frac{s}{1+s}$$

il grafico della funzione  $\varphi$  é del tipo:



Siccome

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(s)}{s} = 1$$

esiste  $b > 0$  tale che  $\varphi(s) > s/2 \forall s \geq b$ . Osserviamo ora che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^{-1/2} \sqrt{n} e^{-n \varphi(s)} ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_b^{+\infty} \sqrt{n} e^{-n \varphi(s)} ds = 0$$

Infatti se  $s \in (-1, -1/2)$ ,  $\varphi(s) \geq \varphi(-1/2) = \alpha > 0$  e quindi  $\sqrt{n} e^{-n \varphi(s)} \leq \sqrt{n} e^{-n \alpha}$ , mentre se  $s \geq b$ :

$$\int_b^{+\infty} \sqrt{n} e^{-n \varphi(s)} ds \leq \int_b^{+\infty} \sqrt{n} e^{-n s/2} ds = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{nb}^{+\infty} e^{-t/2} dt$$

D'altra parte

$$s - \lg(1+s) = \frac{s^2}{2} 2 \frac{s - \lg(1+s)}{s^2} = \frac{s^2}{2} h(s)$$

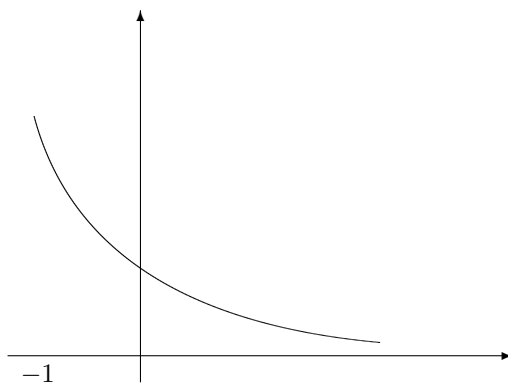
Siccome

$$h'(s) = \frac{2}{s^3} \left[ -\frac{s^2 + 2s}{1+s} + 2 \lg(1+s) \right] = \frac{2}{s^3} H(s)$$

e a sua volta

$$H'(s) = -\frac{s^2}{(1+s)^2}$$

risulta che la funzione  $h$  ha una grafico del tipo:





Usando infine la sostituzione:

$$s = \sqrt{\frac{2}{n}} t$$

si ottiene, indicando per semplicità con

$$\alpha_n = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{2}}, \quad \beta_n = \sqrt{\frac{n}{2}} b$$

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1/2}^b \sqrt{n} e^{-n\varphi(s)} ds = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha_n}^{\beta_n} e^{-t^2 h(\sqrt{\frac{2}{n}} t)} dt$$

Osserviamo infine che se  $t \in (\alpha_n, \beta_n)$ ,

$$h\left(\sqrt{\frac{2}{n}} t\right) \geq h(b) > 0$$

e quindi

$$e^{-t^2 h(\sqrt{\frac{2}{n}} t)} \leq e^{-t^2 h(b)}$$

Possiamo quindi applicare il teorema della convergenza dominata di Lebesgue, per ottenere:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha_n}^{\beta_n} e^{-t^2 h(\sqrt{\frac{2}{n}} t)} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1$$

## 4 CURVE

Cominciamo col dare la seguente:

**Definizione 4.1** Chiameremo **curva** una funzione:

$$\varphi : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}^n$$

Il punto  $\varphi(a)$  viene chiamato il **punto iniziale della curva**, mentre il punto  $\varphi(b)$  viene chiamato il **punto finale**. L'insieme dei valori  $\varphi([a, b])$  viene chiamato il **sostegno della curva**.

Se  $\varphi(a) = \varphi(b)$ , diremo che la curva  $\varphi$  é **chiusa**, mentre diremo che la curva  $\varphi$  é **semplice** se:

$\forall t_1, t_2 \in [a, b]$ ,  $t_1 \neq t_2$  e almeno uno dei due punti interno ad  $[a, b]$ , risulta  $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ .

Una curva  $\varphi$  si dice **regolare** se  $\varphi \in C^1([a, b])$  e  $\varphi'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$ .

In tal caso il versore ( vettore di modulo 1):

$$T(t) = \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|} \quad t \in [a, b]$$

viene chiamato il **versore tangente** alla curva  $\varphi$  nel punto  $\varphi(t)$ . Infatti risulta immediato vedere che la retta passante per  $\varphi(t)$  ed avente direzione  $T(t)$  é la retta tangente al sostegno della curva  $\varphi$  nel punto  $\varphi(t)$ .

Vediamo alcuni esempi.

1. **Elica circolare** Siano  $a, b \in \mathcal{R}$  due numeri positivi. Poniamo:

$$\varphi(t) = (a \cos t, a \sin t, bt) \quad t \in [0, 2\pi]$$

Risulta:

$$\varphi'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b) \quad , \quad |\varphi'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Pertanto  $\varphi$  é una curva regolare in  $\mathcal{R}^3$ .

2. **Curva grafico di una funzione** Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$  é una funzione di classe  $C^1$ , poniamo:

$$\varphi(t) = (t, f(t)) \quad t \in [a, b]$$

Essendo  $\varphi'(t) = (1, f'(t))$ , la curva  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}^2$  é una curva regolare il cui sostegno é il grafico della funzione  $f$ .

3. Poniamo

$$\varphi(t) = (t^2 - 1, t^3 - t) \quad t \in [-2, 2]$$

Essendo  $\varphi'(t) = (2t, 3t^2 - 1)$ , la curva  $\varphi$  é una curva regolare. Per capire come é fatto il sostegno di questa curva, cerchiamo di ottenerne l'equazione cartesiana, eliminando il parametro  $t$  dal sistema:

$$\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t \end{cases}$$

Supponendo  $t \geq 0$ , si ha  $t = \sqrt{x+1}$  e quindi:

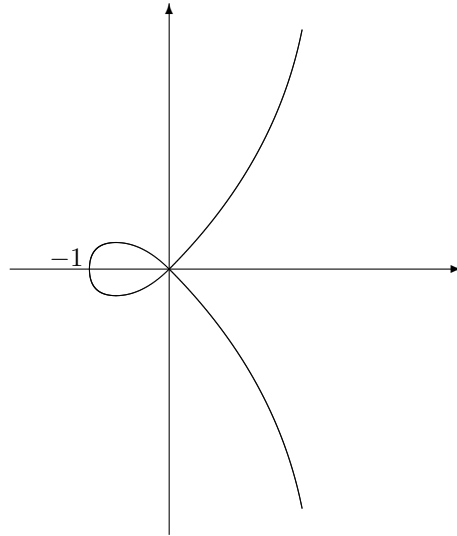
$$y = f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} = x\sqrt{x+1} \quad x \geq -1$$

Siccome

$$f'(x) = \sqrt{x+1} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}} = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$$

$x = -\frac{2}{3}$  é un punto di minimo relativo per  $f$ . Tenedo conto della sua simmetria rispetto all'asse  $x$ , possiamo quindi concludere che il sostegno della curva  $\varphi$  é un luogo geometrico del tipo di quello in

figura:



#### 4.1 Lunghezza di una curva

Data una curva  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}^n$  e una partizione  $P = \{t_0, t_1, \dots, t_h\}$  dell'intervallo  $[a, b]$ , indichiamo con  $\mathcal{P}$  la poligonale che si ottiene congiungendo con segmenti nell'ordine i punti

$$\varphi(t_0), \varphi(t_1), \dots, \varphi(t_h)$$

Tale poligonale viene detta **poligonale iscritta**. Indichiamo con  $L(\mathcal{P})$  la lunghezza di tale poligonale, ossia

$$L(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^h |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|$$

È immediato vedere che se  $\mathcal{P}'$  è una partizione dell'intervallo  $[a, b]$  piú fine della partizione  $\mathcal{P}$ , allora  $L(\mathcal{P}) \leq L(\mathcal{P}')$ . Sembra dunque ragionevole definire la **lunghezza di una curva**  $\varphi$  come

$$L(\varphi) = \sup \{L(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ partizione dell'intervallo } [a, b]\} \quad (146)$$

Osserviamo subito che, anche se  $\varphi$  è una curva continua, la sua lunghezza può essere infinita. Consideriamo, infatti, il seguente esempio:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \left(t, t \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right) \quad t \in \left(0, \frac{1}{\pi}\right] \\ \varphi(0) &= (0, 0) \end{aligned}$$

Fissato ora  $k \in \mathcal{N}$ , consideriamo i numeri

$$t_i = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + (2k - i)\pi} \quad i = 0, 1, 2, \dots, 2k - 1$$

ed indichiamo con  $P_k$  la partizione

$$P_k = \left\{0, t_0, t_1, \dots, t_{2k-1}, \frac{1}{\pi}\right\}$$

e con  $\mathcal{P}_k$  la poligonale associata. Risulta allora:

$$L(\mathcal{P}_k) = \sum_{i=1}^{2k-1} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| \geq \sum_{i=1}^{2k-1} \frac{1}{\frac{\pi}{2} + (2k-i)\pi} = (2k-i=h) \sum_{h=1}^{2k-1} \frac{1}{\frac{\pi}{2} + h\pi}$$

e quindi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} L(\mathcal{P}_k) = +\infty$$

Proviamo ora il seguente:

**Teorema 4.1** *Se  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}^n$  è una curva di classe  $C^1$ , allora la sua lunghezza è finita e risulta*

$$L(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)| dt \quad (147)$$

Prima di dimostrare il teorema, osserviamo che, se indichiamo con

$$\int_a^b \varphi(t) dt$$

l'integrale vettore:

$$\int_a^b \varphi(t) dt = \left( \int_a^b \varphi_1(t) dt, \int_a^b \varphi_2(t) dt, \dots, \int_a^b \varphi_n(t) dt \right)$$

continuano a valere le seguenti due proprietà che sono ben note nel caso dell'integrale usuale ( $n = 1$ ).

$$\left| \int_a^b \varphi(t) dt \right| \leq \int_a^b |\varphi(t)| dt \quad (148)$$

$$\int_a^b \varphi'(t) dt = \varphi(b) - \varphi(a) \quad \forall \varphi \in C^1([a, b]) \quad (149)$$

Verifichiamo la prima di queste due affermazioni.

Sia  $v \in \mathcal{R}^n$  un versore (vettore di modulo 1) fissato, allora:

$$v \cdot \varphi(t) = \sum_{i=1}^n v_i \varphi_i(t) \leq |\varphi(t)| \quad \forall t \in [a, b]$$

Integrando, si ottiene:

$$v \cdot \int_a^b \varphi(t) dt \leq \int_a^b |\varphi(t)| dt$$

e quindi la (148) si ottiene scegliendo

$$v = \frac{\int_a^b \varphi(t) dt}{\left| \int_a^b \varphi(t) dt \right|}$$

(ovviamente supponendo il denominatore diverso da zero).

**Dimostrazione. (del teorema)** Sia  $P$  una partizione dell'intervallo  $[a, b]$ , allora:

$$\begin{aligned} L(P) &= \sum_{i=1}^h |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^h \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi'(t) dt \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^h \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi'(t)| dt = \int_a^b |\varphi'(t)| dt \end{aligned}$$

Dalla definizione di lunghezza di una curva, otteniamo quindi

$$L(\varphi) \leq \int_a^b |\varphi'(t)| dt$$

La disuguaglianza contraria si ottiene ragionando nel modo seguente.

La funzione derivata  $\varphi' : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}^n$  é continua (per ipotesi) e quindi uniformemente continua in  $[a, b]$ ; ossia:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ tale che se } s, t \in [a, b] \text{ e } |s - t| < \delta_\varepsilon \implies |\varphi'(s) - \varphi'(t)| < \varepsilon$$

Fissato quindi un numero  $\varepsilon > 0$ , sia  $P = \{t_0, t_1, \dots, t_h\}$  una partizione dell'intervallo  $[a, b]$  con

$$t_i - t_{i-1} < \delta_\varepsilon \quad \forall i = 1, 2, \dots, h$$

Se  $s, t \in [t_{i-1}, t_i]$ , risulta

$$\varphi'(s) = \varphi'(t) + (\varphi'(s) - \varphi'(t))$$

Integrando rispetto alla variabile  $t \in [t_{i-1}, t_i]$ , ottengo:

$$\varphi'(s)(t_i - t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi'(t) dt + \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\varphi'(s) - \varphi'(t)] dt$$

e passando ai moduli:

$$|\varphi'(s)|(t_i - t_{i-1}) \leq \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi'(t) dt \right| + \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi'(s) - \varphi'(t)| dt \leq |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| + \varepsilon(t_i - t_{i-1})$$

Integrando infine in  $s$  sempre sull'intervallo  $[t_{i-1}, t_i]$ , ottengo:

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi'(s)| ds \leq |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| + \varepsilon(t_i - t_{i-1})$$

Infine sommando rispetto all'indice  $i$ :

$$\int_a^b |\varphi'(s)| ds \leq L(\mathcal{P}) + \varepsilon(b - a) \leq L(\varphi) + \varepsilon(b - a)$$

La dimostrazione si conclude infine facendo tendere  $\varepsilon$  a zero.

q.e.d.

Vediamo ora alcuni esempi.

**Lunghezza di una circonferenza** La circonferenza di centro l'origine e raggio  $R$  può essere vista come il sostegno della curva

$$\varphi(t) = R(\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

Risulta allora  $\varphi'(t) = R(-\sin t, \cos t)$  e quindi

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R$$

**Lunghezza di una grafico** Si ha in questo caso  $\varphi(t) = (t, f(t))$  con  $f \in C^1([a, b])$ . Risulta quindi:

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)} dt$$

**Lunghezza di un'elica** Ricordiamo che risulta  $\varphi(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$   $t \in [0, 2\pi]$  e quindi

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}$$

**Lunghezza di un ramo di cicloide** Si chiama cicloide il luogo geometrico del piano descritto da un punto fissato su di una circonferenza quando questa rotola, senza strisciare, su di una retta. Può essere vista come il sostegno della curva

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t) = R(t - \sin t) \\ y = \varphi_2(t) = R(1 - \cos t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Risulta allora  $\varphi'(t) = R(1 - \cos t, \sin t)$  e quindi

$$L(\varphi) = R \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = 2R \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 2R \left( -2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) \Big|_0^{2\pi} \right) = 8R$$

## 4.2 Curve equivalenti

**Definizione 4.2** Due curve  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}^n$  e  $\psi : [c, d] \rightarrow \mathcal{R}^n$  si dicono **equivalenti** se esiste un diffeomorfismo  $g : [a, b] \rightarrow [c, d]$  tale che

$$\varphi(t) = \psi(g(t)) \quad \forall t \in [a, b]$$

Ricordiamo che con la parola diffeomorfismo si intende una corrispondenza biunivoca tra due insiemi che sia di classe  $C^1$  con inversa pure di classe  $C^1$ . Nel caso che stiamo considerando  $g$  è un diffeomorfismo se e solo se  $g \in C^1([a, b])$  e  $g'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$ .

Da notare che se  $g$  è decrescente, allora  $\varphi(a) = \psi(b)$  e  $\varphi(b) = \psi(a)$  e quindi il punto iniziale di  $\varphi$  è il punto finale di  $\psi$  e viceversa. Allora  $\varphi$  e  $\psi$ , pur descrivendo lo stesso luogo geometrico (pur avendo lo stesso sostegno) hanno un verso di percorrenza contrario.

Per esempio sia  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 2\pi]$  la funzione definita dalla legge:  $g(t) = 2\pi(1 - t)$ . Allora la curva  $\psi$  definita da

$$\psi(t) = (\cos(2\pi(1 - t)), \sin(2\pi(1 - t))) \quad t \in [0, 1]$$

rappresenta la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 percorsa in senso orario.

Da notare che se  $\varphi$  e  $\psi$  sono due curve equivalenti e di classe  $C^1$ , allora  $\varphi$  e  $\psi$  hanno la stessa lunghezza. Infatti usando la sostituzione  $\lambda = g(t)$  e supponendo per esempio che sia  $g'(t) > 0$ , ottengo:

$$\begin{aligned} L(\psi) &= \int_c^d |\psi'(\lambda)| d\lambda = \int_a^b |\psi'(g(t))| g'(t) dt = \\ &= \int_a^b |\psi'(g(t)) g'(t)| dt = \int_a^b |\varphi'(t)| dt = L(\varphi) \end{aligned}$$

Data una curva regolare  $\varphi$ , una curva ad essa equivalente importante che viene chiamata **rappresentazione con parametro l'ascissa curvilinea**, si ottiene ragionando nel modo seguente.

Se poniamo

$$s(t) = \int_a^t |\varphi'(\lambda)| d\lambda \quad t \in [a, b]$$

otteniamo una funzione  $s : [a, b] \rightarrow [0, L(\varphi)]$  con  $s'(t) = |\varphi'(t)| > 0 \quad \forall t \in [a, b]$ , Indichiamo ora con  $g : [0, L(\varphi)] \rightarrow [a, b]$  la funzione inversa di  $s$  e consideriamo la curva:

$$\psi(s) = \varphi(g(s)) \quad s \in [0, L(\varphi)]$$

La curva  $\psi$  è una curva equivalente a  $\varphi$ . La sua particolarità sta nel fatto che il suo vettore tangente  $\psi'(s)$  è un versore, ossia risulta

$$|\psi'(s)| = 1 \quad \forall s \in [0, L(\varphi)]$$

Infatti:

$$\psi'(s) = \varphi'(g(s)) g'(s) = \varphi'(g(s)) \frac{1}{s'(g(s))} = \frac{\varphi'(g(s))}{|\varphi'(g(s))|}$$

### 4.3 Triedro fondamentale e formule di Frenet

In questo paragrafo e nel capitolo successivo useremo ampiamente il prodotto esterno in  $\mathcal{R}^3$ . Ne ricordiamo quindi brevemente la definizione e alcune proprietà fondamentali.

Siano dunque  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathcal{R}^3$  due vettori. Indicheremo con  $x \wedge y \in \mathcal{R}^3$  il vettore definito da:

$$x \wedge y = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1) \quad (150)$$

Un modo semplice per ricordare la definizione di prodotto esterno è quello di sviluppare rispetto alla prima riga il determinante della seguente matrice formale:

$$x \wedge y = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \quad (151)$$

Alcune proprietà fondamentali del prodotto esterno sono:

1.  $(x + y) \wedge z = x \wedge z + y \wedge z \quad \forall x, y, z \in \mathcal{R}^3$ ,
2.  $\lambda x \wedge y = (\lambda x) \wedge y = x \wedge (\lambda y) \quad \forall x, y \in \mathcal{R}^3, \lambda \in \mathcal{R}$ ,
3.  $x \wedge y = -y \wedge x \quad \forall x, y \in \mathcal{R}^3$ ,
4.  $x \wedge y = 0 \iff x, y$  sono linearmente dipendenti,
5.  $(x \wedge y) \cdot x = (x \wedge y) \cdot y = 0 \quad \forall x, y \in \mathcal{R}^3$ ,
6. se  $x, y$  sono linearmente indipendenti la terna  $(x, y, x \wedge y)$  forma una base destrorsa di  $\mathcal{R}^3$  ossia una base per cui:

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ (x \wedge y)_1 & (x \wedge y)_2 & (x \wedge y)_3 \end{pmatrix} > 0$$

In effetti dalle definizioni (150), risulta:

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ (x \wedge y)_1 & (x \wedge y)_2 & (x \wedge y)_3 \end{pmatrix} = |x \wedge y|^2$$

7.  $|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2 |y|^2 - (x \cdot y)^2} = \text{area del parallelogramma generato dai vettori } x, y$ ,
8. Dalla definizione (151), si ottiene infine che

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = x \cdot (y \wedge z) \quad (152)$$

Sia  $\varphi : [0, L] \rightarrow \mathcal{R}^3$  una curva di classe  $C^3$  con parametro la lunghezza d'arco e supponiamo che sia  $\varphi''(s) \neq 0 \quad \forall s \in [0, L]$ . Siccome  $|\varphi'(s)| = 1 \quad \forall s \in [0, L]$  risulta:

$$\varphi''(s) \cdot \varphi'(s) = 0 \quad \forall s \in [0, L]$$

ossia il vettore  $\varphi''(s)$  è ortogonale a  $\varphi'(s)$ .

Indicheremo con  $\vec{n}$  il versore del vettore  $\varphi''$ , ossia

$$\vec{n}(s) = \frac{\varphi''(s)}{|\varphi''(s)|} \quad s \in [0, L] \quad (153)$$

Essendo  $\varphi''(s) \neq 0$ ,  $\vec{n}$  risulta ben definito in  $[0, L]$ .

Il versore  $\vec{n}(s)$  viene chiamato **il vettore normale** alla curva  $\varphi$  nel punto  $\varphi(s)$ . Il vettore  $\vec{n}(s)$ , essendo normale al vettore tangente  $\varphi'(s)$ , che indicheremo nel seguito con  $\vec{t}(s)$  sta nel piano normale alla curva  $\varphi$  nel punto  $\varphi(s)$ .

La quantità  $k(s) = |\varphi''(s)|$  viene chiamata **la curvatura** della curva  $\varphi$  nel punto  $\varphi(s)$ .  $k(s)$  dá una stima di quanto varia il vettore tangente nell'intorno del punto  $\varphi(s)$ .

Dalle definizioni date risulta  $\forall s \in [0, L]$ :

$$\vec{t}'(s) = \varphi''(s) = |\varphi''(s)| \vec{n}(s) = k(s) \vec{n}(s) \quad (154)$$

Il piano individuato dai vettori  $\vec{t}(s)$  e  $\vec{n}(s)$  viene chiamato il **piano osculatore** della curva  $\varphi$  nel punto  $\varphi(s)$ .

Indichiamo infine con  $\vec{b}(s)$  il versore normale al piano osculatore ( e quindi normale sia a  $\vec{t}(s)$  che a  $\vec{n}(s)$  ) ed orientato in modo che la terna  $\vec{t}(s)$ ,  $\vec{n}(s)$  e  $\vec{b}(s)$  sia destrorsa ossia sovrapponibile mediante traslazione e rotazione alla base canonica di  $\mathcal{R}^3$ :  $e_1, e_2, e_3$ . Da notare che la terna considerata sarà destrorsa se:

$$\det \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} > 0$$

Il vettore  $\vec{b}(s)$  viene chiamato **il vettore binormale** alla curva  $\varphi$  nel punto  $\varphi(s)$ .

Da notare che il vettore  $\vec{b}$  si può esprimere facilmente usando il prodotto esterno in  $\mathcal{R}^3$ . Infatti risulta:

$$\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \wedge \vec{n}(s) \quad s \in [0, L] \quad (155)$$

Ricordiamo la (151), si ottiene::

$$\vec{t} \wedge \vec{n} = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} = \quad (156)$$

$$= (t_2 n_3 - n_2 t_3) e_1 + (t_3 n_1 - n_3 t_1) e_2 + (t_1 n_2 - n_1 t_2) e_3$$

Sarà interessante valutare la quantità  $|\vec{b}'(s)|$  che dá una stima di come varia il piano osculatore di  $\varphi$  nell'intorno del punto  $\varphi(s)$  ( e quindi di quanto la curva si discosta dall'essere una curva piana).

Ragionando come abbiamo fatto prima, ricordando che  $|\vec{b}(s)| = 1 \quad \forall s \in [0, L]$ , si ottiene che  $\vec{b}'(s) \cdot \vec{b}(s) = 0 \quad \forall s \in [0, L]$  e quindi  $\vec{b}'(s)$  sta nel piano osculatore della curva nel punto  $\varphi(s)$ . D'altra parte dalle relazioni (155) e (154), derivando si ottiene:

$$\vec{b}'(s) = \vec{t}'(s) \wedge \vec{n}(s) + \vec{t}(s) \wedge \vec{n}'(s) = k(s) \vec{n}(s) \wedge \vec{n}(s) + \vec{t}(s) \wedge \vec{n}'(s) = \vec{t}(s) \wedge \vec{n}'(s)$$

Ne deriva quindi che  $\vec{b}'(s)$  é pure ortogonale al vettore  $\vec{t}(s)$  e risulta quindi parallelo al vettore  $\vec{n}(s)$ . Risulta dunque

$$\vec{b}'(s) = \tau(s) \vec{n}(s) \quad s \in [0, L] \quad (157)$$

La costante di proporzionalità  $\tau(s)$  viene chiamata **la torsione** della curva  $\varphi$  nel punto  $\varphi(s)$ .

Osserviamo infine che, essendo  $\vec{n}'(s)$  ortogonale ad  $\vec{n}(s)$ , risulta:

$$\vec{n}'(s) = \alpha(s) \vec{t}(s) + \beta(s) \vec{b}(s)$$

D'altra parte, derivando le identità:

$$\vec{n}(s) \cdot \vec{t}(s) = \vec{n}(s) \cdot \vec{b}(s) = 0 \quad s \in [0, L]$$

si ottiene, ricordando anche la relazioni (154) e (157):

$$\vec{n}'(s) \cdot \vec{t}(s) = -\vec{n}(s) \cdot \vec{t}'(s) = -k(s) \quad (158)$$

$$\vec{n}'(s) \cdot \vec{b}(s) = -\vec{n}(s) \cdot \vec{b}'(s) = -\tau(s) \quad (159)$$

Otteniamo quindi:

$$\vec{n}'(s) = -k(s) \vec{t}(s) - \tau(s) \vec{b}(s) \quad (160)$$



Le equazioni ottenute relativamente ai vettori del triedro fondamentale, ossia:

$$\begin{cases} \vec{t}'(s) = k(s)\vec{n}(s) \\ \vec{b}'(s) = \tau(s)\vec{n}(s) \\ \vec{n}'(s) = -k(s)\vec{t}(s) - \tau(s)\vec{b}(s) \end{cases} \quad (161)$$

vengono chiamate **le equazioni di Frenet**.

Concludiamo questo paragrafo, osservando che dalla (159) si può ottenere un'espressione analitica per calcolare la torsione di una curva. Infatti

$$\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \wedge \vec{n}(s) = \frac{\varphi'(s) \wedge \varphi''(s)}{|\varphi''(s)|}$$

$$\vec{n}'(s) = \left( \frac{\varphi''(s)}{|\varphi''(s)|} \right)' = \frac{\varphi'''(s)}{|\varphi''(s)|} + \varphi''(s) \left( \frac{1}{|\varphi''(s)|} \right)'$$

Pertanto  $\forall s \in [0, L]$

$$\tau(s) = -\frac{\varphi'''(s) \cdot (\varphi'(s) \wedge \varphi''(s))}{|\varphi''(s)|^2} = \frac{-1}{|\varphi''(s)|^2} \det \begin{pmatrix} \varphi'_1(s) & \varphi'_2(s) & \varphi'_3(s) \\ \varphi''_1(s) & \varphi''_2(s) & \varphi''_3(s) \\ \varphi'''_1(s) & \varphi'''_2(s) & \varphi'''_3(s) \end{pmatrix} \quad (162)$$

Se una curva è rappresentata con una parametrizzazione  $\psi$  che non usa come parametro la lunghezza d'arco, ma un parametro  $t \in [a, b]$ , allora le formule per calcolare la curvatura e la torsione diventano

$$k(t) = \frac{|\psi'(t) \wedge \psi''(t)|}{|\psi'(t)|^3} \quad (163)$$

$$\tau(t) = -\frac{(\psi'(t) \wedge \psi''(t)) \cdot \psi'''(t)}{|\psi'(t) \wedge \psi''(t)|^2} \quad (164)$$

Infatti, posto:

$$s(t) = \int_0^t |\psi'(\lambda)| d\lambda$$

si ottiene un diffeomorfismo tra gli intervalli  $[a, b]$  e  $[0, L(\psi)]$ . Posto  $g(s)$  il diffeomorfismo inverso, la curva  $\varphi(s) = \psi(g(s))$  è equivalente a  $\psi$  ed è una rappresentazione con parametro l'ascissa curvilinea. Risulta quindi:

$$\varphi'(s) = \frac{\psi'(g(s))}{|\psi'(g(s))|}$$

$$\varphi''(s) = \left( \psi''(g(s))|\psi'(g(s))| - \psi'(g(s)) \frac{\psi'(g(s)) \cdot \psi''(g(s))}{|\psi'(g(s))|} \right) \frac{1}{|\psi'(g(s))|^3}$$

Pertanto, non scrivendo per brevità l'argomento  $g(s)$  dove si calcolano le funzioni al secondo membro, si ottiene:

$$|\varphi''(s)|^2 = \frac{|\psi''|^2 |\psi'|^2 + (\psi' \cdot \psi'')^2 - 2(\psi' \cdot \psi'')^2}{|\psi'|^6} = \frac{|\psi''|^2 |\psi'|^2 - (\psi' \cdot \psi'')^2}{|\psi'|^6}$$

Abbiamo quindi dimostrato la formula (163). Infine, scrivendo per semplicità:

$$\varphi''(s) = \frac{\psi''(g(s))}{|\psi'(g(s))|^2} - \psi'(g(s)) A(s)$$

ottengo:

$$\varphi'(s) \wedge \varphi''(s) = \frac{\psi'(g(s)) \wedge \psi''(g(s))}{|\psi'(g(s))|^3}$$

$$\varphi'''(s) = \frac{\psi'''(g(s))}{|\psi'(g(s))|^3} - \psi''(g(s)) \left( \frac{1}{|\psi'(g(s))|^2} \right)' - \frac{\psi''(g(s))}{|\psi'(g(s))|} A(s) - \psi'(g(s)) A'(s)$$

In conclusione

$$(\varphi'(s) \wedge \varphi''(s)) \cdot \varphi'''(s) = \frac{(\psi'(g(s)) \wedge \psi''(g(s))) \cdot \psi''(g(s))}{|\psi'(g(s))|^6}$$

Ricordando infine la (162), si ottiene la (164).

**Osservazione 4.1** Se la curva che si considera è piana, ossia se  $\varphi(s) = (x(s), y(s))$  ( $s$  sempre la lunghezza d'arco), allora  $\tau(s) = 0$  e si può definire la curvatura con segno usando sempre la formula:  $\vec{t}'(s) = k(s)\vec{n}(s)$ , ma scegliendo la direzione del vettore  $\vec{n}(s)$  in modo che la coppia  $(\vec{t}(s), \vec{n}(s))$  formi una base positiva di  $\mathcal{R}^2$  e quindi  $\vec{t}(s) = \varphi'(s) = (x'(s), y'(s))$  e  $\vec{n}(s) = (-y'(s), x'(s))$ . In questo caso risulta dunque:

$$k(s) = \vec{t}'(s) \cdot \vec{n}(s) = y''(s)x'(s) - x''(s)y'(s)$$

## ESERCIZI

1. Verificare che il piano osculatore ad una curva in un suo punto  $\varphi(s_0)$  è caratterizzato dalla seguente proprietà: indicata con  $d(s)$  la distanza del punto  $\varphi(s)$  della curva dal piano osculatore in  $\varphi(s_0)$ , vale:

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{d(s)}{(s - s_0)^2} = 0$$

2. Verificare che se una curva piana non è rappresentata con parametro la lunghezza d'arco, allora:

$$k(t) = \frac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{(\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)})^3}, \quad t \in [a, b] \quad (165)$$

3. Verificare che se una curva è grafico di una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$  allora:

$$k(x) = \frac{f''(x)}{(\sqrt{1 + f'^2(x)})^3} = \left( \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + f'^2(x)}} \right)', \quad x \in [a, b] \quad (166)$$

4. Sia  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}^3$  una curva regolare. Trovare espressioni analitiche per  $\vec{t}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{b}$ , i vettori del triedro fondamentale.

Ricordiamo che posto

$$s(t) = \int_a^t |\varphi'(\lambda)| d\lambda,$$

Indicata con  $g(s)$ ,  $s \in [0, L]$  la funzione inversa di  $s(t)$  e posto  $\psi(s) = \varphi(g(s))$ , si ottiene da definizione:

$$\vec{t} = \psi'(s), \quad \vec{n} = \frac{\psi''(s)}{|\psi''(s)|}, \quad \vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n}$$

Ora

$$\begin{aligned} \psi'(s) &= \varphi'(g(s))g'(s) = \frac{\varphi'(g(s))}{|\varphi'(g(s))|} \\ \psi''(s) &= \frac{1}{|\varphi'(g(s))|^3} \left( \varphi''(g(s))|\varphi'(g(s))| - \varphi'(g(s)) \frac{\varphi'(g(s)) \cdot \varphi''(g(s))}{|\varphi'(g(s))|} \right) = \\ &= \frac{\varphi''(g(s))|\varphi'(g(s))|^2 - \varphi'(g(s))\varphi'(g(s)) \cdot \varphi''(g(s))}{|\varphi'(g(s))|^4} \end{aligned}$$

Infine

$$|\psi''(s)|^2 = \frac{|\varphi''(g(s))|^2 |\varphi'(g(s))|^2 - (\varphi'(g(s)) \cdot \varphi''(g(s)))^2}{|\varphi'(g(s))|^6} = \frac{|\varphi'(g(s)) \wedge \varphi''(g(s))|^2}{|\varphi'(g(s))|^6}$$

Possiamo quindi concludere che

$$\vec{t} = \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|}, \quad \vec{n} = \frac{\varphi''(t)|\varphi'(t)|^2 - \varphi'(t)(\varphi'(t) \cdot \varphi''(t))}{|\varphi'(t)| |\varphi'(t) \wedge \varphi''(t)|}, \quad \vec{b} = \frac{\varphi'(t) \wedge \varphi''(t)}{|\varphi'(t) \wedge \varphi''(t)|}$$

In particolare si  $\varphi$  è l'elica  $\varphi(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ , allora risulta:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= (-a \sin t, a \cos t, b) \\ \varphi''(t) &= (-a \cos t, -a \sin t, 0) \\ \varphi'(t) \wedge \varphi''(t) &= (ab \sin t, -ab \cos t, a^2) \\ |\varphi'(t)| &= \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi'(t) \cdot \varphi''(t) = 0, \quad |\varphi'(t) \wedge \varphi''(t)| = a\sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Possiamo quindi concludere che

$$\begin{aligned} \vec{t} &= \frac{(-a \sin t, a \cos t, b)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \vec{n} &= \frac{(-a \cos t, -a \sin t, 0)}{a} \\ \vec{b} &= \frac{(b \sin t, -b \cos t, a)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

#### 4.4 Integrale curvilineo

**Definizione 4.3** Sia  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}^n$  una curva di classe  $C^1$  ed  $f : A \subset \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$  una funzione continua. Supponiamo che  $\varphi([a, b]) \subset A$ , allora definiamo:

$$\int_{\varphi} f ds = \int_a^b f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt \quad (167)$$

Tale integrale viene chiamato **l'integrale curvilineo** della funzione  $f$  lungo la curva  $\varphi$ .

Da notare che se  $\varphi$  e  $\psi$  sono due curve equivalenti, allora:

$$\int_{\varphi} f ds = \int_{\psi} f ds$$

Infatti supponendo per esempio che sia  $g'(t) < 0$ , si ottiene:

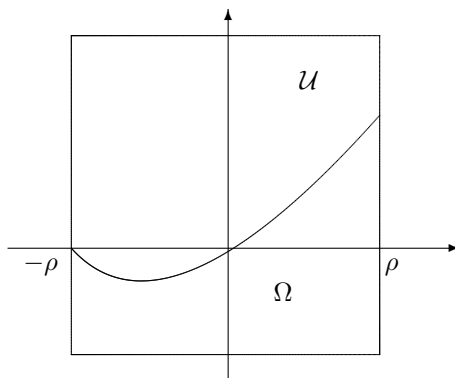
$$\begin{aligned} \int_{\psi} f ds &= \int_c^d f(\psi(\lambda)) |\psi'(\lambda)| d\lambda = \int_b^a f(\psi(g(t))) |\psi'(g(t))| g'(t) dt = \\ &= - \int_b^a f(\psi(g(t))) |\psi'(g(t))| g'(t) dt = \int_a^b f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt = \int_{\varphi} f ds \end{aligned}$$

## 5 Formule di Gauss-Green nel piano

Sia  $\Omega \subset \mathcal{R}^2$  un insieme limitato. Diremo che  $\Omega$  è un **aperto con frontiera di classe  $C^1$**  se  $\forall x_0 \in \partial\Omega$  esiste un intorno  $\mathcal{U}$  di  $x_0$  in  $\mathcal{R}^2$  tale che, con una opportuna scelta del sistema di coordinate con centro in  $x_0$ , si possa scrivere:

$$\Omega \cap \mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathcal{U}, x \in (-\rho, \rho), a \leq y < \alpha(x)\} \quad (168)$$

dove  $\alpha : (-\rho, \rho) \rightarrow \mathcal{R}$  è una funzione di classe  $C^1((-\rho, \rho))$  con  $\alpha(x) > a \forall x \in (-\rho, \rho)$ , dove  $a, \rho > 0$  sono opportune costanti positive.



Se  $\Omega \subset \mathcal{R}^2$  è un aperto con frontiera di classe  $C^1$ , allora  $\partial\Omega$  è il sostegno di una curva regolare. Sia ora  $f \in C^1(A)$  (dove  $A$  è un aperto di  $\mathcal{R}^2$  con  $\bar{\Omega} \subset A$ ), valgono allora le seguenti formule:

**Teorema 5.1 (Formule di Gauss-Green):**

$$\int \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx dy = \int_{\partial\Omega} f \nu_1 ds \quad (169)$$

$$\int \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx dy = \int_{\partial\Omega} f \nu_2 ds \quad (170)$$

dove con

$$\nu(x, y) = (\nu_1(x, y), \nu_2(x, y))$$

indichiamo il versore della normale esterna a  $\partial\Omega$  in un suo punto  $(x, y)$ .

Le due formule precedenti possono essere raggruppate in una unica formula se si usa il concetto di divergenza. Infatti se  $G : A \rightarrow \mathcal{R}^2$  ( $G = (G_1, G_2)$ ) è una funzione a valori vettoriali di classe  $C^1$  e se indichiamo con

$$\text{div } G = \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y}$$

la **divergenza** di  $G$ , allora vale il seguente:

**Teorema 5.2 Teorema della Divergenza**

$$\int \int_{\Omega} \text{div } G(x, y) dx dy = \int_{\partial\Omega} G \cdot \nu ds \quad (171)$$

Infine applicando il teorema della divergenza al vettore  $fG$  con  $f$  funzione a valori scalari e ricordando che

$$\text{div}(fG) = f \text{div } G + \text{grad } f \cdot G$$

otteniamo la seguente formula:

**Teorema 5.3 Formula di integrazioni per parti in  $\mathcal{R}^2$  :**

$$\int \int_{\Omega} f(x, y) \text{div } G(x, y) dx dy = - \int \int_{\Omega} \text{grad } f(x, y) \cdot G(x, y) dx dy + \int_{\partial\Omega} f G \cdot \nu ds \quad (172)$$

Prima di dimostrare le formule di Gauss-Green, ricordiamo che se  $Q = [a, b] \times [c, d]$  è un rettangolo di  $\mathcal{R}^2$  ed  $f : Q \rightarrow \mathcal{R}$  una funzione di classe  $C^1$ , allora per la (141) la funzione:

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy \quad x \in [a, b]$$

è derivabile in  $[a, b]$  e risulta

$$F'(x) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy$$

Siano ora  $\alpha, \beta \in C^1([a, b])$  due funzioni con

$$c \leq \alpha(x) \leq \beta(x) \leq d$$

Poniamo

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \quad x \in [a, b]$$

Allora  $F \in C^1([a, b])$  e vale la formula:

$$F'(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy + f(x, \beta(x)) \beta'(x) - f(x, \alpha(x)) \alpha'(x) \quad (173)$$

Infatti se poniamo per  $x \in [a, b]$  e  $u, v \in [c, d]$

$$G(x, u, v) = \int_u^v f(x, y) dy$$

si ottiene sempre dalla (141) e dal teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x}(x, u, v) &= \int_u^v \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy \\ \frac{\partial G}{\partial u}(x, u, v) &= -f(x, u) \quad , \quad \frac{\partial G}{\partial v}(x, u, v) = f(x, v) \end{aligned}$$

Allora la derivata di  $F$  si ottiene dalla regola di derivazione della funzione composta, osservando che  $F(x) = G(x, \alpha(x), \beta(x))$ .

### **Dimostrazione.(delle formule di Green)**

**Primo passo** Supponiamo in primo luogo che  $f \in C^1(A)$  abbia supporto contenuto in un aperto  $\mathcal{U}$  dove vale la (168). Allora:

$$\int \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx dy = \int \int_{\Omega \cap \mathcal{U}} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx dy = \int_{-\rho}^{\rho} \left( \int_a^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy \right) dx$$

Ora se poniamo

$$F(x) = \int_a^{\alpha(x)} f(x, y) dy$$

dalla (173), risulta:

$$\int \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx dy = \int_{-\rho}^{\rho} (F'(x) - f(x, \alpha(x)) \alpha'(x)) dx = - \int_{-\rho}^{\rho} f(x, \alpha(x)) \alpha'(x) dx$$

dove abbiamo usato il fatto che, essendo  $f$  a supporto compatto in  $\mathcal{U}$ , si ha che  $F(-\rho) = F(\rho) = 0$ .

Osserviamo ora che in un punto  $(x, \alpha(x)) \in \partial\Omega \cap \mathcal{U}$  si ha:

$$\nu(x, \alpha(x)) = \frac{(-\alpha'(x), 1)}{\sqrt{1 + (\alpha'(x))^2}}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} f \nu_1 ds &= \int_{\partial\Omega \cap \mathcal{U}} f \nu_1 ds = \\ &= \int_{-\rho}^{\rho} f(x, \alpha(x)) \frac{-\alpha'(x)}{\sqrt{1 + (\alpha'(x))^2}} \sqrt{1 + (\alpha'(x))^2} dx = - \int_{-\rho}^{\rho} f(x, \alpha(x)) \alpha'(x) dx \end{aligned}$$

Vale dunque in questo caso la (169).

La seconda formula (170) si ottiene ragionando nello stesso modo ma in maniera piú immediata. Infatti in questo caso:

$$\begin{aligned} \int \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx dy &= \int \int_{\Omega \cap \mathcal{U}} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-\rho}^{\rho} \left( \int_a^{\alpha(x)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy \right) dx = \int_{-\rho}^{\rho} f(x, \alpha(x)) dx \end{aligned}$$

D'altra parte, risulta:

$$\int_{\partial\Omega} f \nu_2 ds = \int_{\partial\Omega \cap \mathcal{U}} f \nu_2 ds = \int_{-\rho}^{\rho} f(x, \alpha(x)) dx$$

**Secondo passo** Essendo  $\partial\Omega$  un insieme compatto, esiste un numero finito di punti  $x_i \in \partial\Omega$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  e un numero finito di aperti  $\mathcal{U}_i$  contenenti  $x_i$ , tali che  $\partial\Omega \cap \mathcal{U}_i$  si può rappresentare come in (168) e tali che

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^N \mathcal{U}_i$$

Indichiamo infine con  $\mathcal{U}_0 = \Omega$  e scegliamo una partizione dell'unità  $\varphi_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, N$  relativa alla famiglia di aperti  $\{\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_N\}$  ossia una famiglia di funzioni con

$$\varphi_i \in C_0^1(\mathcal{U}_i), \quad \sum_{i=0}^N \varphi_i(x, y) = 1 \quad \forall (x, y) \in \bar{\Omega}$$

Applicando il primo passo, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \int \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx dy &= \sum_{i=0}^N \int \int_{\Omega} \varphi_i(x, y) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx dy = \\ &= \sum_{i=0}^N \int \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_i f)(x, y) - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x, y) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] dx dy = \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega} \varphi_i f \nu_1 ds - \int \int_{\Omega} \sum_{i=0}^N \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x, y) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx dy = \int_{\partial\Omega} f \nu_1 ds \end{aligned}$$

dove abbiamo usato i seguenti due fatti:

i) essendo  $\varphi_0 f$  una funzione di classe  $C^1$  con supporto compatto contenuto in  $\mathcal{U}_0 = \Omega$ , risulta:

$$\int \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_0 f)(x, y) dx dy = 0$$

ii)

$$\sum_{i=0}^N \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{i=0}^N \varphi_i \right)(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (1)(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

### OSSERVAZIONI

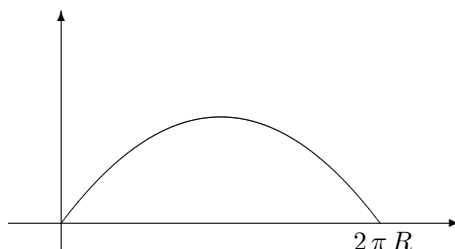
- Le formule di Gauss-Green continuano a valere anche se  $\partial\Omega$  contiene un numero finito di punti  $\{x_i, i = 1, 2, \dots, N\}$  in cui una rappresentazione del tipo (168) non vale, come nel caso di un quadrato per esempio o nel caso in cui la frontiera di  $\Omega$  sia la riunione di un numero finito di curve regolari.
- Scegliendo  $f(x, y) = x$  o  $f(x, y) = y$  o  $G(x, y) = (x, y)$ , si ottengono le seguenti formule utili a volte per calcolare la misura di un insieme  $\Omega$ .

$$m(\Omega) = \int_{\partial\Omega} x \nu_1 ds = \int_{\partial\Omega} y \nu_2 ds \quad (174)$$

$$m(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (x \nu_1 + y \nu_2) ds \quad (175)$$

Vediamo, per concludere, alcuni esempi.

1. Calcolare l'area della regione di piano  $A$  racchiusa da un ramo di cicloide e dall'asse  $x$ .



Come abbiamo visto, risulta  $\varphi(t) = R(t - \sin t, 1 - \cos t)$   $t \in [0, 2\pi]$  e quindi  $\varphi'(t) = R(1 - \cos t, \sin t)$ . Il versore della normale esterna nei punti della cicloide è dato quindi da

$$\nu(t) = \frac{(-\sin t, 1 - \cos t)}{\sqrt{2(1 - \cos t)}}$$

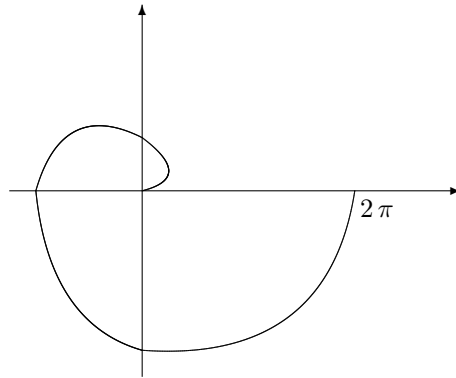
Possiamo allora calcolare:

$$\begin{aligned} m(A) &= \int_{\partial A} x \nu_1 ds = \int_0^{2\pi} R^2 (t - \sin t)(-\sin t) dt = \\ &= R^2 \left( \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt - \int_0^{2\pi} t \sin t dt \right) = \\ &= R^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt - R^2 \left[ -t \cos t \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t dt \right] = R^2 \pi + 2 R^2 \pi = 3 \pi R^2 \end{aligned}$$

2. Consideriamo il seguente ramo di spirale:

$$\varphi(t) = (t \cos t, t \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

Calcolare la sua lunghezza e l'area della regione di piano  $A$  compresa da tale spirale e l'asse  $x$ .



Risulta  $\varphi'(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t)$  e quindi  $|\varphi'(t)| = \sqrt{1+t^2}$ . Pertanto la curva considerata è regolare e risulta:

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+t^2} dt$$

Integrando per parti, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sqrt{1+t^2} dt &= t \sqrt{1+t^2} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} dt = \\ &= 2\pi \sqrt{1+4\pi^2} - \int_0^{2\pi} \sqrt{1+t^2} dt + \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt \end{aligned}$$

Siccome una primitiva della funzione integranda dell'ultimo integrale è data dalla funzione  $\log(t + \sqrt{1+t^2})$  possiamo concludere che

$$L(\varphi) = \pi \sqrt{1+4\pi^2} + \frac{1}{2} \log(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})$$

Per calcolare la misura di  $A$  usiamo la formula

$$m(A) = \frac{1}{2} \int_{\partial A} (x \nu_1 + y \nu_2) ds$$

Ricordando che

$$\nu(t) = \frac{(\sin t + t \cos t, -\cos t + t \sin t)}{\sqrt{1+t^2}}$$

otteniamo

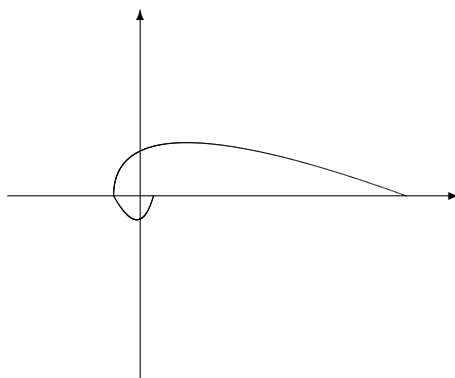
$$\begin{aligned} m(A) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [t \cos t (\sin t + t \cos t) + t \sin t (-\cos t + t \sin t)] dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} t^2 dt = \frac{8\pi^3}{6} = \frac{4\pi^3}{3} \end{aligned}$$

3. Trovare la curvatura della spirale:

$$\varphi(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

Il sostegno della curva è del tipo:





Risulta

$$\begin{aligned}x'(t) &= e^{-t} (-\cos t, -\sin t) \\y'(t) &= e^{-t} (-\sin t, +\cos t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x''(t) &= e^{-t} (\cos t, +\sin t + \sin t - \cos t) = 2e^{-t} \sin t \\y''(t) &= e^{-t} (\sin t, -\cos t - \cos t - \sin t) = -2e^{-t} \cos t\end{aligned}$$

Ricordando la formula, si ottiene:

$$k = \frac{y'' x' - x'' y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{e^{-2t}}{(2e^{-2t})^{3/2}} [-2 \cos t (-\cos t - \sin t) - 2 \sin (-\sin t - \cos t)] = \frac{e^t}{\sqrt{2}}$$

## 6 SUPERFICI DUE-DIMENSIONALI IN $\mathcal{R}^3$

Cominciamo col dare la seguente:

**Definizione 6.1** Una funzione  $\varphi : A \subset \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^3$  (dove  $A$  è un insieme aperto), viene chiamata una **superficie** se verifica le seguenti proprietà:

- i)  $\varphi$  è iniettiva;
- ii)  $\varphi \in C^1(A)$ ;
- iii) la matrice jacobiana di  $\varphi$ , ossia la matrice:

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{pmatrix}$$

ha rango massimo in tutti i punti  $(u, v) \in A$ .

Da notare che, se poniamo:

$$\begin{aligned} \varphi_u &= \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \right) \\ \varphi_v &= \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \right) \end{aligned}$$

la condizione iii) può esprimersi richiedendo che  $\varphi_u \wedge \varphi_v \neq 0 \quad \forall (u, v) \in A$ . Vediamo ora alcuni esempi.

### 1. Superficie grafico di una funzione

Sia  $f : A \rightarrow \mathcal{R}$  una funzione di classe  $C^1(A)$  Poniamo:

$$\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v)) \quad (u, v) \in A$$

Risulta:

$$\begin{aligned} \varphi_u &= (1, 0, f_u) \\ \varphi_v &= (0, 1, f_v) \end{aligned}$$

e quindi

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = (-f_u, -f_v, 1) \quad , \quad |\varphi_u \wedge \varphi_v| = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} > 0$$

### 2. Sfera in coordinate polari

Consideriamo la funzione  $\varphi : A \rightarrow \mathcal{R}^3$  di componenti:

$$\begin{cases} x = R \sin u \cos v \\ y = R \sin u \sin v \\ z = R \cos u \end{cases} \quad (u, v) \in A = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$$

Allora

$$\begin{aligned} \varphi_u &= R(\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u) \\ \varphi_v &= R(-\sin u \sin v, \sin u \cos v, 0) \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \varphi_u \wedge \varphi_v &= R^2 (\sin^2 u \cos v, \sin^2 u \sin v, \cos u \sin u) = \\ &= R^2 \sin u (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u) \end{aligned}$$

Ne deriva infine che  $|\varphi_u \wedge \varphi_v| = R^2 \sin u > 0$  essendo  $u \in (0, \pi)$ .

### 3. Elicoide

Si chiama elicoide il sostegno della superficie data da:

$$\varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, k u) \quad (u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, R)$$

dove  $k, R$  sono due costanti positive fissate. Risulta:

$$\begin{aligned}\varphi_u(u, v) &= (-v \sin u, v \cos u, k) \\ \varphi_v(u, v) &= (\cos u, \sin u, 0)\end{aligned}$$

Pertanto:

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = (-k \sin u, k \cos u, -v) \quad , \quad |\varphi_u \wedge \varphi_v| = \sqrt{k^2 + v^2}$$

### 4. Proiezione stereografica della sfera

Si chiama con questo nome la corrispondenza  $\varphi : \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^3$  che al punto  $P$  (nel piano  $xy$ ) di coordinate  $(u, v)$  associa il punto  $Q$  di intersezione tra la sfera di centro l'origine e raggio  $R$  e la retta passante per  $P$  e per il polo nord della sfera  $N$  ( $N=(0,0,R)$ ) (diverso ovviamente dal polo nord). Essendo  $N = (0, 0, R)$ ,  $P = (u, v, 0)$  la retta per i punti  $P$  ed  $N$  si può scrivere come sostegno della curva:

$$\psi(t) = N + t(P - N) = (t u, t v, R(1 - t)) \quad t \in \mathcal{R}$$

Il punto  $Q$  si ottiene quando  $|\psi(t)| = R$ , ossia

$$t^2 u^2 + t^2 v^2 + R^2(1 + t^2 - 2t) = R^2$$

ossia

$$t = \frac{2 R^2}{u^2 + v^2 + R^2}$$

Pertanto la funzione  $\varphi$  ha le seguenti componenti

$$\varphi(u, v) = \left( \frac{2 R^2 u}{u^2 + v^2 + R^2}, \frac{2 R^2 v}{u^2 + v^2 + R^2}, R \frac{u^2 + v^2 - R^2}{u^2 + v^2 + R^2} \right)$$

### 5. Superfici di rotazione

Consideriamo nel piano  $(y, z)$  una curva di equazioni  $\psi(t) = (y(t), z(t)) \quad t \in [a, b]$  e supponiamo che  $y(t) > 0 \quad \forall t \in [a, b]$ . Allora la superficie che si ottiene ruotando la curva sostegno di  $\psi$  attorno all'asse  $z$  si può rappresentare nel seguente modo:

$$\varphi(t, \theta) = \begin{cases} x(t, \theta) = y(t) \cos \theta \\ y(t, \theta) = y(t) \sin \theta \\ z(t, \theta) = z(t) \end{cases} \quad (t, \theta) \in (a, b) \times (0, 2\pi)$$

Risulta quindi:

$$\varphi_t = (y'(t) \cos \theta, y'(t) \sin \theta, z'(t))$$

$$\varphi_\theta = (-y(t) \sin \theta, y(t) \cos \theta, 0)$$

$$\varphi_t \wedge \varphi_\theta = (-y(t) z'(t) \cos \theta, -y(t) z'(t) \sin \theta, y(t) y'(t))$$

$$|\varphi_t \wedge \varphi_\theta| = y(t) \sqrt{z'^2(t) + y'^2(t)}$$

Un caso interessante di superficie di rotazione è il **toro** che si ottiene quando il sostegno di  $\psi$  è una circonferenza di raggio  $r$  e centro nel punto  $(R, 0)$  del piano  $(y, z)$  con  $R > r$ ; ossia

$$\begin{cases} y(t) = R + r \cos t \\ z(t) = r \sin t \end{cases} \quad t \in (0, 2\pi)$$

## 6.1 Superfici equivalenti, piano tangente e versore normale

Come nel caso delle curve, daremo la seguente:

**Definizione 6.2** Diremo che due superfici

$$\varphi : A \subset \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^3, \quad \psi : B \subset \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^3$$

sono **equivalenti** se esiste un diffeomorfismo  $g : A \rightarrow B$  tale che

$$\varphi(u, v) = \psi(g(u, v)) \quad \forall (u, v) \in A$$

Ricordiamo che  $g : A \rightarrow B$  è un diffeomorfismo se è una corrispondenza biunivoca, di classe  $C^1$  con inversa pure di classe  $C^1$ . Va notato che questo implica che

$$\det J_g(u, v) \neq 0 \quad \forall (u, v) \in A$$

Notiamo che, se indichiamo con  $(s, t)$  le variabili di  $\psi$ , si ha:

$$\varphi_u = \psi_s \frac{\partial g_1}{\partial u} + \psi_t \frac{\partial g_2}{\partial u}$$

$$\varphi_v = \psi_s \frac{\partial g_1}{\partial v} + \psi_t \frac{\partial g_2}{\partial v}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \varphi_u \wedge \varphi_v &= \psi_s \wedge \psi_t \frac{\partial g_1}{\partial u} \frac{\partial g_2}{\partial v} + \psi_t \wedge \psi_s \frac{\partial g_2}{\partial u} \frac{\partial g_1}{\partial v} = \\ &= \psi_s \wedge \psi_t \left( \frac{\partial g_1}{\partial u} \frac{\partial g_2}{\partial v} - \frac{\partial g_2}{\partial u} \frac{\partial g_1}{\partial v} \right) = \det J_g(u, v) \psi_s \wedge \psi_t \end{aligned}$$

Sia ora  $\varphi : A \subset \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^3$  una superficie, sia  $Q = (u_0, v_0) \in A$  e sia  $\psi : [a, b] \rightarrow A$  ( $\psi(t) = (u(t), v(t))$ ) una curva con sostegno contenuto in  $A$  e passante per  $Q$  ( per esempio supponiamo che sia  $Q = \psi(t_0)$  con  $t_0 \in (a, b)$ ). La curva  $\gamma(t) = \varphi(\psi(t))$   $t \in [a, b]$  è una curva in  $\mathcal{R}^3$  contenuta nel sostegno della superficie  $\varphi$  e passante per il punto  $P = \varphi(Q) = \varphi(u_0, v_0)$ . Da notare che

$$\gamma'(t_0) = \varphi_u(u_0, v_0) u'(t_0) + \varphi_v(u_0, v_0) v'(t_0)$$

Il vettore  $\gamma'(t_0)$  tangente alla curva  $\gamma$  in  $P$  è combinazione lineare dei vettori  $\varphi_u(u_0, v_0)$  e  $\varphi_v(u_0, v_0)$  e quindi sta nel piano generato da questi vettori. Per questa ragione il piano parallelo al piano generato dai vettori  $\varphi_u(u_0, v_0)$  e  $\varphi_v(u_0, v_0)$  e passante per il punto  $P$ , viene chiamato **piano tangente** alla superficie sostegno di  $\varphi$  nel punto  $P$ . Tale piano può essere rappresentato nel modo seguente:

$$\bar{\varphi}(u, v) = \varphi(u_0, v_0) + \varphi_u(u_0, v_0)(u - u_0) + \varphi_v(u_0, v_0)(v - v_0) \quad (u, v) \in \mathcal{R}^2$$

Il versore

$$\nu(u_0, v_0) = \frac{\varphi_u(u_0, v_0) \wedge \varphi_v(u_0, v_0)}{|\varphi_u(u_0, v_0) \wedge \varphi_v(u_0, v_0)|}$$

viene chiamato il **versore normale** alla superficie nel punto  $P = \varphi(u_0, v_0)$ .

Ad esempio, nel caso di una superficie grafico di una funzione, ossia del tipo  $\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$  si ha:

$$\nu(u, v) = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}$$

Noi indicheremo nel seguito con  $T_P(\varphi)$  ( $P = \varphi(u_0, v_0)$ ) lo spazio vettoriale 2-dimensionale generato dai vettori  $\varphi_u(u_0, v_0)$  e  $\varphi_v(u_0, v_0)$  e lo chiameremo **spazio tangente** a  $\varphi$  in  $P$ . Indicheremo anche con  $N_P(\varphi)$  lo spazio vettoriale unidimensionale generato dalla normale  $\nu(u_0, v_0)$  e lo chiameremo lo **spazio normale** a  $\varphi$  in  $P$ .

**ESERCIZIO** Sia  $\varphi : A \rightarrow \mathcal{R}^3$  una superficie e  $P = \varphi(u_0, v_0)$ . Siano inoltre  $v_1, v_2 \in T_P(\varphi)$  due vettori linearmente indipendenti. Allora esiste una superficie  $\psi(s, t)$  equivalente a  $\varphi$  e definita in un aperto  $B$  contenente l'origine e tale che

$$\psi(0, 0) = P, \quad \psi_s(0, 0) = v_1 \quad \psi_t(0, 0) = v_2$$

Infatti supponiamo che sia:

$$v_1 = a \varphi_u(u_0, v_0) + b \varphi_v(u_0, v_0)$$

$$v_2 = c \varphi_u(u_0, v_0) + d \varphi_v(u_0, v_0)$$

e consideriamo la funzione:

$$\psi(s, t) = \varphi(u_0 + a s + c t, v_0 + b s + d t),$$

$(s, t) \in B = \{(s, t) \in \mathcal{R}^2, (u_0 + a s + c t, v_0 + b s + d t) \in A\}$ . Ovviamente  $B$  é un aperto che contiene l'origine,  $\psi$  é equivalente a  $\varphi$  e:

$$\psi_s(0, 0) = \varphi_u(u_0, v_0) a + \varphi_v(u_0, v_0) b = v_1$$

$$\psi_t(0, 0) = \varphi_u(u_0, v_0) c + \varphi_v(u_0, v_0) d = v_2$$

## 6.2 Prima e seconda forma fondamentale e curvatura media di una superficie

Sia  $\varphi : A \rightarrow \mathcal{R}^3$  una superficie,  $(u_0, v_0) \in A$  e  $P = \varphi(u_0, v_0)$ . Per semplicità, nel seguito di questo paragrafo, non indicheremo più l'argomento delle funzioni che intervengono e si supporrà che sia sempre  $(u_0, v_0)$ .

Come abbiamo già osservato i vettori  $\varphi_u, \varphi_v$  generano lo spazio tangente di  $\varphi$  in  $P$ :  $T_P(\varphi)$ . Useremo anche nel seguito le notazioni standard della geometria differenziale, ossia:

$$E = \varphi_u \cdot \varphi_u = |\varphi_u|^2, \quad F = \varphi_u \cdot \varphi_v, \quad G = \varphi_v \cdot \varphi_v = |\varphi_v|^2 \quad (176)$$

Indicheremo inoltre con  $T$  la matrice:

$$T = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad (177)$$

che viene chiamata **tensor metrico** di  $\varphi$  in  $P$ .

Da notare che risulta

$$\det T = EG - F^2 = |\varphi_u \wedge \varphi_v|^2$$

Se  $w \in T_P$ , risulta  $w = \alpha \varphi_u + \beta \varphi_v$  e quindi  $|w|^2 = w \cdot w = E \alpha^2 + 2F \alpha \beta + G \beta^2$ . La forma quadratica

$$I : T_P \rightarrow \mathcal{R}$$

definita da:

$$I(w) = E \alpha^2 + 2F \alpha \beta + G \beta^2 \quad (178)$$

é una forma quadratica definita positiva che viene chiamata **la prima forma fondamentale** di  $\varphi$  in  $P$ .

Da notare che usando il prodotto tra matrici, si può scrivere

$$I(w) = \left( T \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right) \cdot (\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}^t \cdot T \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (179)$$

dove l'apice  $t$  indica la matrice trasposta.

Ora se  $w \in \mathcal{R}^3$ , indicheremo con  $w^\perp$  la sua componente nella direzione  $\nu$ , la direzione normale alla superficie  $\varphi$  in  $P$ : ossia

$$w^\perp = (w \cdot \nu) \nu$$

La forma quadratica:

$$II(w) : T_P \rightarrow \mathcal{R}$$

definita da, se  $w = \alpha \varphi_u + \beta \varphi_v$ :

$$II(w) = \frac{\varphi_{uu}^\perp \alpha^2 + 2 \varphi_{uv}^\perp \alpha \beta + \varphi_{vv}^\perp \beta^2}{I(w)} \quad (180)$$

viene chiamata **la seconda forma fondamentale** di  $\varphi$  in  $P$ .

### Osservazione importante

La definizione di prima e seconda forma fondamentale non dipende dalla parametrizzazione scelta per rappresentare la superficie. Ossia se  $\psi$  è una superficie equivalente a  $\varphi$  allora la prima e la seconda forma fondamentale definita tramite la  $\varphi$  e tramite la  $\psi$  danno lo stesso risultato. Questo fatto per la prima forma fondamentale è immediato in quanto si ottiene in ogni caso il modulo del vettore del piano tangente che si sta considerando. Per la seconda forma fondamentale invece la verifica è molto più laboriosa. (Qui viene riportata per completezza ma non sarà richiesta all'esame).

Supponiamo dunque che  $\varphi$  e  $\psi$  siano due superfici equivalenti, che sia  $\varphi(u, v) = \psi(g(u, v))$  dove  $g : A \rightarrow B$  è un diffeomorfismo e che  $P = \varphi(u_0, v_0) = \psi(s_0, t_0)$ . Se  $w \in T_P$  e  $w = \alpha \varphi_u + \beta \varphi_v = A \psi_s + B \psi_t$ , dovremmo verificare che:

$$\varphi_{uu}^\perp \alpha^2 + 2 \varphi_{uv}^\perp \alpha \beta + \varphi_{vv}^\perp \beta^2 = \psi_{ss}^\perp A^2 + 2 \psi_{st}^\perp AB + \psi_{tt}^\perp B^2 \quad (181)$$

Osserviamo in primo luogo che

$$\begin{aligned} \varphi_u &= \psi_s \frac{\partial g_1}{\partial u} + \psi_t \frac{\partial g_2}{\partial u} \\ \varphi_v &= \psi_s \frac{\partial g_1}{\partial v} + \psi_t \frac{\partial g_2}{\partial v} \end{aligned}$$

e quindi

$$\alpha \varphi_u + \beta \varphi_v = \left( \alpha \frac{\partial g_1}{\partial u} + \beta \frac{\partial g_1}{\partial v} \right) \psi_s + \left( \alpha \frac{\partial g_2}{\partial u} + \beta \frac{\partial g_2}{\partial v} \right) \psi_t$$

Pertanto

$$\begin{aligned} A &= \alpha \frac{\partial g_1}{\partial u} + \beta \frac{\partial g_1}{\partial v} \\ B &= \alpha \frac{\partial g_2}{\partial u} + \beta \frac{\partial g_2}{\partial v} \end{aligned}$$

e, usando il prodotto tra matrici:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = J_g \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (182)$$

D'altra parte:

$$\begin{aligned} \varphi_{uu} &= \left( \psi_{ss} \frac{\partial g_1}{\partial u} + \psi_{st} \frac{\partial g_2}{\partial u} \right) \frac{\partial g_1}{\partial u} + \psi_s \frac{\partial^2 g_1}{\partial u^2} + \\ &\quad + \left( \psi_{ts} \frac{\partial g_1}{\partial u} + \psi_{tt} \frac{\partial g_2}{\partial u} \right) \frac{\partial g_2}{\partial u} + \psi_t \frac{\partial^2 g_2}{\partial u^2} \\ \varphi_{uv} &= \left( \psi_{ss} \frac{\partial g_1}{\partial v} + \psi_{st} \frac{\partial g_2}{\partial v} \right) \frac{\partial g_1}{\partial u} + \psi_s \frac{\partial^2 g_1}{\partial u \partial v} + \\ &\quad + \left( \psi_{ts} \frac{\partial g_1}{\partial v} + \psi_{tt} \frac{\partial g_2}{\partial v} \right) \frac{\partial g_2}{\partial u} + \psi_t \frac{\partial^2 g_2}{\partial u \partial v} \\ \varphi_{vv} &= \left( \psi_{ss} \frac{\partial g_1}{\partial v} + \psi_{st} \frac{\partial g_2}{\partial v} \right) \frac{\partial g_1}{\partial v} + \psi_s \frac{\partial^2 g_1}{\partial v^2} + \\ &\quad + \left( \psi_{ts} \frac{\partial g_1}{\partial v} + \psi_{tt} \frac{\partial g_2}{\partial v} \right) \frac{\partial g_2}{\partial v} + \psi_t \frac{\partial^2 g_2}{\partial v^2} \end{aligned}$$

Ricordando infine che  $\psi_s^\perp = \psi_t^\perp = 0$ , si ha:

$$\varphi_{uu}^\perp \alpha^2 + 2 \varphi_{uv}^\perp \alpha \beta + \varphi_{vv}^\perp \beta^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \psi_{ss}^\perp \left[ \alpha^2 \left( \frac{\partial g_1}{\partial u} \right)^2 + 2\alpha\beta \frac{\partial g_1}{\partial u} \frac{\partial g_1}{\partial v} + \beta^2 \left( \frac{\partial g_1}{\partial v} \right)^2 \right] + \\
&+ \psi_{st}^\perp \left[ 2\alpha^2 \frac{\partial g_1}{\partial u} \frac{\partial g_2}{\partial u} + 2\alpha\beta \left( \frac{\partial g_1}{\partial u} \frac{\partial g_2}{\partial v} + \frac{\partial g_1}{\partial v} \frac{\partial g_2}{\partial u} \right) + 2\beta^2 \frac{\partial g_1}{\partial v} \frac{\partial g_2}{\partial v} \right] + \\
&+ \psi_{tt}^\perp \left[ \alpha^2 \left( \frac{\partial g_2}{\partial u} \right)^2 + 2\alpha\beta \frac{\partial g_2}{\partial u} \frac{\partial g_2}{\partial v} + \beta^2 \left( \frac{\partial g_2}{\partial v} \right)^2 \right] = \\
&= \psi_{ss}^\perp A^2 + 2\psi_{st}^\perp AB + \psi_{tt}^\perp B^2
\end{aligned}$$

Sia ora  $w \in T_P$  un vettore di modulo uno, chiameremo **curvatura di  $\varphi$  nella direzione  $w$  e nel punto  $P$** , la quantità:

$$k(w) = II(w) \cdot \nu \quad (183)$$

Indicando con

$$e = \varphi_{uu} \cdot \nu, \quad f = \varphi_{uv} \cdot \nu, \quad g = \varphi_{vv} \cdot \nu$$

e con  $B$  la matrice:

$$B = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \quad (184)$$

se  $w = \alpha \varphi_u + \beta \varphi_v$ , risulta:

$$k(w) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}^t \cdot B \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (185)$$

Supponiamo ora che  $w_1, w_2 \in T_P$ , formino una base ortonormale di  $T_P$ , poniamo

$$H_P = \frac{1}{2} (k(w_1) + k(w_2)) \quad (186)$$

La quantità  $H_P$  viene chiamata la **curvatura media** di  $\varphi$  in  $P$ . È interessante notare che la curvatura media non dipende dalla base ortonormale scelta in  $T_P$ . Questo è una conseguenza della validità della seguente formula che può essere utilizzata per calcolare la curvatura media:

$$H_P = \frac{1}{2} \text{tr} (B \cdot T^{-1}) = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \quad (187)$$

dove  $\text{tr}$  indica la traccia della matrice indicata.

### Dimostrazione della (187)

Supposto

$$w_1 = \alpha \varphi_u + \beta \varphi_v, \quad w_2 = A \varphi_u + B \varphi_v \quad (188)$$

consideriamo la superficie  $\psi$  equivalente a  $\varphi$  definita da

$$\psi(s, t) = \varphi(u_0 + \alpha s + At, v_0 + \beta t + Bt)$$

in modo che sia:

$$\begin{aligned}
\psi(0, 0) &= \varphi(u_0, v_0) = P \\
\psi_s(0, 0) &= \varphi_u \alpha + \varphi_v \beta = w_1 \\
\psi_t(0, 0) &= \varphi_u A + \varphi_v B = w_2
\end{aligned}$$

Usando la rappresentazione  $\psi$ , ottengo:

$$k(w_1) + k(w_2) = \psi_{ss}^\perp(0, 0) + \psi_{tt}^\perp(0, 0)$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}\psi_{ss} &= \alpha(\varphi_{uu}\alpha + \varphi_{uv}\beta) + \beta(\varphi_{uv}\alpha + \varphi_{vv}\beta) \\ \psi_{tt} &= A(\varphi_{uu}A + \varphi_{uv}B) + B(\varphi_{uv}A + \varphi_{vv}B)\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}k(w_1) + k(w_2) &= (\alpha^2 + A^2) e + 2(\alpha\beta + AB) f + (\beta^2 + B^2) g = \\ &= \text{tr} \left[ \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha^2 + A^2 & \alpha\beta + AB \\ \alpha\beta + AB & \beta^2 + B^2 \end{pmatrix} \right]\end{aligned}$$

D'altra parte dalle relazioni (188), ottengo

$$\varphi_u = \frac{1}{\alpha}(w_1 - \beta\varphi_v) \quad \text{e quindi} \quad w_2 = \frac{A}{\alpha}(w_1 - \beta\varphi_v) + B\varphi_v$$

Pertanto:

$$\varphi_v = \frac{\alpha w_2 - A w_1}{\alpha B - A\beta}, \quad \varphi_u = \frac{B w_1 - \beta w_2}{\alpha B - A\beta}$$

Ne deriva pertanto che

$$G = \frac{\alpha^2 + A^2}{(\alpha B - A\beta)^2}, \quad F = -\frac{\alpha\beta + AB}{(\alpha B - A\beta)^2}, \quad E = \frac{\beta^2 + B^2}{(\alpha B - A\beta)^2}$$

Infine

$$EG - F^2 = \frac{\alpha^2\beta^2 + \alpha^2 B^2 + A^2\beta^2 + A^2 B^2 - \alpha^2\beta^2 - A^2 B^2 - 2\alpha\beta AB}{(\alpha B - A\beta)^4} = \frac{1}{(\alpha B - A\beta)^2}$$

Possiamo quindi concludere che

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 + A^2 & \alpha\beta + AB \\ \alpha\beta + AB & \beta^2 + B^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$$

La formula (187) che permette di calcolare la curvatura media di una superficie assume una forma particolarmente semplice quando la superficie è grafico di una funzione. In questo caso si ha  $\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$  e quindi:

$$\varphi_u = (1, 0, f_u), \quad \varphi_v = (0, 1, f_v), \quad \varphi_{uu} = (0, 0, f_{uu}), \quad \varphi_{uv} = (0, 0, f_{uv}), \quad \varphi_{vv} = (0, 0, f_{vv})$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 + f_u^2 & f_u f_v \\ f_u f_v & 1 + f_v^2 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \frac{1}{1 + f_u^2 + f_v^2} \begin{pmatrix} 1 + f_v^2 & -f_u f_v \\ -f_u f_v & 1 + f_u^2 \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{uv} & f_{vv} \end{pmatrix}$$

Pertanto

$$H_P = \frac{1}{2} \left( \frac{(1 + f_v^2) f_{uu} - 2 f_u f_v f_{uv} + (1 + f_u^2) f_{vv}}{(\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2})^3} \right) = \frac{1}{2} \text{div}(\mathbf{T}(f)) \quad (189)$$

dove abbiamo indicato con

$$\mathbf{T}(f) = \frac{(f_u, f_v)}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}$$



Per comprendere meglio il significato geometrico delle definizioni di curvatura di una superficie in una direzione e di curvatura media, sarà utile la seguente osservazione.

**OSSERVAZIONE**

Se  $w \in T_P(\varphi)$  è un vettore di modulo uno, allora  $k(w)$  è la curvatura con segno (nel senso dell'osservazione 4.1) della curva piana che ottiene intersecando il sostegno della superficie  $\varphi$  col piano individuato dai vettori  $w$  e  $\nu$  (il versore normale a  $\varphi$  in  $P$ ).

Per verificare questa affermazione, supponiamo che il sistema di riferimento in  $\mathcal{R}^3$  sia scelto in modo che l'origine coincida col punto  $P$  e che  $e_1 = w$ ,  $e_3 = \nu$ . Supponiamo inoltre che la superficie sia grafico di una funzione  $f$  e quindi parametrizzata dalla funzione  $\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$ ,  $(u, v) \in A \subset \mathcal{R}^2$ , con  $A$  aperto contenente  $(0, 0)$  e  $\varphi(0, 0) = P = 0$ ,  $f_u(0, 0) = 0$ ,  $f_v(0, 0) = 0$ . Risulta allora, dalla (185):

$$k(w) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^t \cdot B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B_{11} = B_{11} = f_{uu}(0, 0)$$

D'altra parte, la curva intersezione del piano individuato dai vettori  $w$  e  $\nu$  con la superficie  $\varphi$  si può parametrizzare con la funzione  $\psi(u) = (u, 0, f(u, 0))$  e quindi per la (165),  $k(0) = f_{uu}(0, 0)$ .

Concludiamo questo paragrafo con due esercizi:

- a) **Curvatura media di una sfera** Consideriamo per esempio la calotta inferiore di una sfera di centro l'origine e raggio  $R$  che possiamo considerare il grafico della funzione:

$$f(u, v) = -\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}$$

Risulta:

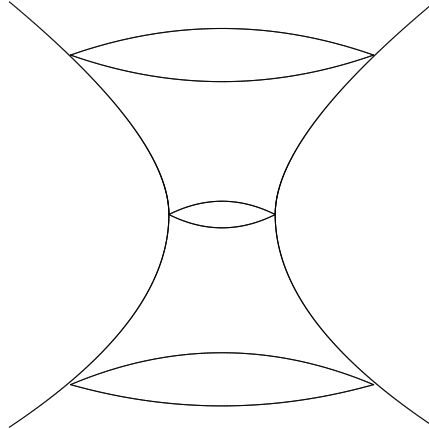
$$f_u = \frac{u}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, \quad f_v = \frac{v}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, \quad 1 + f_u^2 + f_v^2 = \frac{R^2}{1 + f_u^2 + f_v^2}$$

e quindi  $T(f) = \frac{(u,v)}{R}$  e quindi, usando la formula (189),  $H_P = \frac{1}{R}$ .

- b) **Curvatura media di una catenoide** Consideriamo nel piano  $y, z$  il grafico della funzione cosenoiperbolico, ossia l'insieme dei punti  $(\cosh u, u)$ ,  $u \in \mathcal{R}$  e facciamo ruotare tale grafico attorno all'asse  $z$ . Si ottiene così una superficie che può essere parametrizzata dalla funzione

$$\varphi(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u), \quad u \in \mathcal{R}, \quad v \in (0, 2\pi)$$

che è nota col nome di **catenoide** e che è del tipo indicato in figura:



Si ha:

$$\begin{aligned}\varphi_u &= (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, 1) \\ \varphi_v &= (-\cosh u \sin v, \cosh u \cos v, 0) \\ E &= 1 + \sinh^2 u = \cosh^2 u, \quad F = 0, \quad G = \cosh^2 u\end{aligned}$$

$$T^{-1} = \frac{1}{\cosh^4 u} \begin{pmatrix} \cosh^2 u & 0 \\ 0 & \cosh^2 u \end{pmatrix}$$

$$\nu = \frac{(-\cos v, -\sin v, \sinh u)}{\cosh v}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{uu} &= (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, 0) \\ \varphi_{uv} &= (-\sinh u \sin v, \sinh u \cos v, 0) \\ \varphi_{vv} &= (-\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v, 0) \\ e &= -\cosh u, \quad f = 0, \quad g = \cosh u\end{aligned}$$

Possiamo quindi concludere, usando la formula (187), che

$$\begin{aligned}H_P &= \frac{1}{2} \operatorname{tr}(B \cdot T^{-1}) = \frac{1}{2 \cosh^4 u} \operatorname{tr} \begin{pmatrix} -\cosh u & 0 \\ 0 & \cosh u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cosh^2 u & 0 \\ 0 & \cosh^2 u \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2 \cosh^4 u} \operatorname{tr} \begin{pmatrix} -\cosh^3 u & 0 \\ 0 & \cosh^3 u \end{pmatrix} = 0\end{aligned}$$

- c) **Curvatura media di un toro** Consideriamo nel piano  $y, z$  le circonferenza di centro  $(R, 0)$  e raggio  $r \in (0, R)$  di equazioni parametriche  $y(u) = R + r \cos u$ ,  $z(u) = r \sin u$ ,  $u \in (0, 2\pi)$  e facciamo ruotare tale circonferenza attorno all'asse  $z$ . Si ottiene così una superficie che può essere parametrizzata dalla funzione

$$\varphi(u, v) = ((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin v), \quad u \in (0, 2\pi), \quad v \in (0, 2\pi)$$

che è un **toro**. Si ha:

$$\begin{aligned}\varphi_u &= (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u) \\ \varphi_v &= (-(R + r \cos u) \sin v, (R + r \cos u) \cos v, 0) \\ E &= \varphi_u \cdot \varphi_u = r^2, \quad F = \varphi_u \cdot \varphi_v = 0, \quad G = \varphi_v \cdot \varphi_v = (R + r \cos u)^2\end{aligned}$$

$$T^{-1} = \frac{1}{r^2 (R + r \cos u)^2} \begin{pmatrix} (R + r \cos u)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\nu &= -(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u) \\ \varphi_{uu} &= (-r \cos u \cos v, -r \cos u \sin v, -r \sin u) \\ \varphi_{uv} &= (r \sin u \sin v, -r \sin u \cos v, 0) \\ \varphi_{vv} &= (-(R+r \cos u) \cos v, -(R+r \cos u) \sin v, 0) \\ e = \varphi_{uu} \cdot \nu = r, \quad f = \varphi_{uv} \cdot \nu = 0, \quad g = \varphi_{vv} \cdot \nu &= (R+r \cos u) \cos u\end{aligned}$$

Possiamo quindi concludere, usando la formula (187), che

$$\begin{aligned}H_P &= \frac{1}{2} \operatorname{tr}(B \cdot T^{-1}) = \frac{1}{2r^2(R+r \cos u)^2} \operatorname{tr} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & (R+r \cos u) \cos u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (R+r \cos u)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} + \frac{\cos u}{R+r \cos u} \right) = \frac{R+2r \cos u}{2r(R+r \cos u)}\end{aligned}$$

Da notare che se  $R \geq 2r$  la curvatura media del toro é non negativa.

### 6.3 Area di una superficie ed integrali superficiali

**Definizione 6.3** Sia  $\varphi : A \subset \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^3$  una superficie, definiamo **area** di  $\varphi$  e la indichiamo con  $\mathcal{A}(\varphi)$  l'integrale:

$$\mathcal{A}(\varphi) = \iint_A |\varphi_u \wedge \varphi_v| \, dudv \quad (190)$$

Per motivare tale definizione, consideriamo il caso geometrico semplice in cui  $\varphi$  sia lineare; ossia

$$\begin{cases} x(u, v) = a_1 u + b_1 v \\ y(u, v) = a_2 u + b_2 v \\ z(u, v) = a_3 u + b_3 v \end{cases}$$

e supponiamo  $A = [0, 1] \times [0, 1]$ . In questo caso  $\varphi(A)$  é il parallelogramma generato dai vettori  $\varphi(1, 0) = \overline{A}$  e  $\varphi(0, 1) = \overline{B}$ . Essendo  $\varphi_u = \overline{A}$  e  $\varphi_v = \overline{B}$  si ha:

$$\mathcal{A}(\varphi) = \text{area del parallelogramma} = |\overline{A} \wedge \overline{B}| = |\varphi_u \wedge \varphi_v|$$

Nel caso che  $\varphi$  sia il grafico di una funzione, ossia  $\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$ , otteniamo la formula:

$$\mathcal{A}(\varphi) = \iint_A \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} \, dudv \quad (191)$$

Analogamente nel caso che  $\varphi$  sia una superficie di rotazione attorno all'asse  $z$  di una curva  $\psi(t) = (y(t), z(t))$   $t \in [a, b]$  contenuta nel piano  $(y, z)$  la formula per l'area diventa:

$$\mathcal{A}(\varphi) = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{y'^2(t) + z'^2(t)} \, dt \quad (192)$$

Vediamo per concludere alcuni esempi.

1. **Area di una sfera** La semisfera superiore é grafico della funzione

$$f(u, v) = \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \quad (u, v) \in A = B_R(0, 0).$$

Essendo

$$f_u = \frac{-u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}, \quad f_v = \frac{-v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}$$

si ottiene, passando in coordinate polari:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\varphi) &= 2 \iint_A \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} \, dudv = 2 \iint_A \frac{R}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \, dudv = \\ &= 4\pi \int_0^R \frac{R\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \, d\rho = 4\pi R \left( -\sqrt{R^2 - \rho^2} \Big|_0^R \right) = 4\pi R^2 \end{aligned}$$

**2. Area del toro** Usiamo la formula dell'area per una superficie di rotazione. In questo caso si ha  $\psi(t) = (R + r \cos t, r \sin t)$   $t \in [0, 2\pi]$ . Essendo  $\psi'(t) = (-r \sin t, r \cos t)$ , risulta:

$$\mathcal{A}(\varphi) = 2\pi \int_0^{2\pi} y(t) \sqrt{y'^2(t) + z'^2(t)} \, dt = 2\pi \int_0^{2\pi} (R + r \cos t)r \, dt = 4\pi^2 Rr$$

**Definizione 6.4** Sia ora  $\varphi : A \subset \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^3$  una superficie e  $f : B \subset \mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{R}$  una funzione continua con  $\varphi(A) \subset B$ , allora definiamo l'**integrale superficiale** di  $f$  su  $\varphi$  (o su  $\varphi(A)$ ) il seguente integrale:

$$\iint_{\varphi} f \, d\sigma = \iint_A f(\varphi(u, v)) |\varphi_u \wedge \varphi_v| \, dudv$$

Usando l'integrale superficiale, si possono scrivere le formule di Gauss-Green (o il teorema della divergenza) anche per funzioni di tre variabili.

**Teorema 6.1 Teorema della divergenza in  $\mathcal{R}^3$**  Supponiamo infatti che  $\Omega \subset \mathcal{R}^3$  sia un insieme limitato la cui frontiera  $\partial\Omega$  sia di classe  $C^1$  (o di classe  $C^1$  a tratti). Allora se  $f \in C^1(\Omega)$  e se indichiamo con  $\nu : \partial\Omega \rightarrow \mathcal{R}^3$  il versore della normale esterna, possiamo scrivere le formule:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \, dxdydz &= \iint_{\partial\Omega} f \nu_1 \, d\sigma \\ \iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \, dxdydz &= \iint_{\partial\Omega} f \nu_2 \, d\sigma \\ \iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \, dxdydz &= \iint_{\partial\Omega} f \nu_3 \, d\sigma \end{aligned}$$

Oppure se  $F : \Omega \rightarrow \mathcal{R}^3$  è una funzione a valori vettoriali di classe  $C^1(X)$ , allora:

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F \, dxdydz = \iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, d\sigma$$