Prima prova scritta parziale di Analisi Matematica II
Corso di Laurea Triennale in Matematica

14 dicembre 2016

1. Dire per quali $p \in \mathcal{R}$ la successione di funzioni:
$$f_n(x) = n^p\, x^n \left(1 - x\sqrt{x}\right)^4, \quad x \in [0,1]$$
converge uniformemente. Dire inoltre per quali valori di $p \in \mathcal{R}$, esiste una funzione $g \in \mathcal{L}^1([0,1])$ con $|f_n(x)| \leq g(x),\ \forall n \in \mathcal{N},\ \forall x \in [0,1]$.

2. Studiare la continuità e la differenziabilità della funzione $f : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ definita dalla legge:
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1-\cos(x\,y)}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
Colcolare inoltre la derivata della funzione f nel punto $(\pi, 1)$ nella direzione $v = \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3. Trovare i punti critici della funzione $f(x,y) = x^2\, y^2(1-x-y)$ e dire se sono punti di massimo o minimo relativi.

4. Calcolare l'integrale doppio:
$$\iint_M \log\left(x^2+y^2\right)\, dxdy$$
dove $M = [0,1] \times [0,1]$.

5. Calcolare il volume del solido:
$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3,\ x^2+y^2 \leq z \leq 4\left(1 - \sqrt{x^2+y^2}\right)\right\}$$

Correzione

1. Dire per quali $p \in \mathcal{R}$ la successione di funzioni:
$$f_n(x) = n^p\, x^n \left(1 - x\sqrt{x}\right)^4, \quad x \in [0,1]$$
converge uniformemente. Dire inoltre per quali valori di $p \in \mathcal{R}$, esiste una funzione $g \in \mathcal{L}^1([0,1])$ con $|f_n(x)| \leq g(x),\ \forall n \in \mathcal{N},\ \forall x \in [0,1]$.
$\forall x \in \mathcal{R}$ risulta
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

D'altra parte

$$f_n'(x) = n^p \left[n x^{n-1} \left(1 - x\sqrt{x}\right)^4 - x^n 4 \left(1 - x\sqrt{x}\right)^3 \frac{3}{2} x^{1/2} \right] =$$

$$= n^p x^{n-1} \left(1 - x\sqrt{x}\right)^3 \left[n - (n+6) x^{3/2} \right]]$$

La funzione f_n assume il suo valore massimo α_n per $x = x_n = \left(\frac{n}{n+6}\right)^{2/3}$ e risulta

$$\alpha_n = n^p \left(\frac{n}{n+6}\right)^{2n/3} \left(1 - \frac{n}{n+6}\right)^4 = \left[\left(\frac{1}{1+6/n}\right)^{n/6} \right]^4 \frac{6^4 n^p}{(n+6)^4}$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \begin{cases} 0 & \text{se } p < 4 \\ e^{-4}\, 6^4 & \text{se } p = 4 \\ +\infty & \text{se } p > 4 \end{cases}$$

Pertanto la convergenza della successione uniforme se e solo se $p < 4$. Infine

$$\frac{\partial f_n(x)}{\partial n} = \left(1 - x\sqrt{x}\right)^4 \left[p n^{p-1} x^n + n^p x^n \log x \right] = \left(1 - x\sqrt{x}\right)^4 n^{p-1} x^n \left[p + n \log x \right]$$

Pertanto il valore massimo di $f_n(x)$, rispetto ad n, viene assunto per $n = -p/\log x$ e vale

$$\frac{p^p}{(-\log x)^p} x^{-p/\log x} \left(1 - x\sqrt{x}\right)^4 = p^p e^{-p} \frac{\left(1 - x\sqrt{x}\right)^4}{(-\log x)^p} = g(x)$$

Per studiare il comportamento di g per $x \to 1^-$, osserviamo che

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{-\log x}{1-x} = \lim_{y\to 0} \frac{-\log(1-y)}{y} = 1$$

Pertanto

$$g(x) = p^p e^{-p} \left(\frac{1-x}{-\log x}\right)^p \frac{\left(1 - x\sqrt{x}\right)^4}{(1-x)^p}$$

Infine

$$1 - x\sqrt{x} = 1 - x^{3/2} = \frac{1 - x^3}{1 + x^{3/2}} = \frac{(1-x)(1+x+x^2)}{1 + x^{3/2}}$$

Pertanto

$$g(x) = p^p e^{-p} \left(\frac{1-x}{(-\log x)^p}\right)^p \frac{(1+x+x^2)^4}{(1+x^{3/2})^4} \frac{1}{(1-x)^{p-4}}$$

Pertanto la funzione g integrabile in $[0,1]$ se e solo se $p - 4 < 1$ ossia $p < 5$

2. Studiare la continuità e la differenziabilità della funzione $f : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ definita dalla legge:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1-\cos(x\,y)}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Colcolare inoltre la derivata della funzione f nel punto $(\pi, 1)$ nella direzione $v = \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
Ricordando che

$$\lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{z^2} = \frac{1}{2}$$

si ottiene che esiste un numero $\delta > 0$, tale che

$$\left|\frac{1-\cos z}{z^2}\right| \leq 1 \quad se\ |z| < \delta$$

Si ottine quindi se $0 < |x\, y| < \delta$

$$\left|\frac{1-\cos(xy)}{x^4+y^2}\right| = \left|\frac{1-\cos(xy)}{x^2y^2}\right| \left|\frac{y^2}{x^4+y^2}\right| \quad x^2 \leq x^2$$

Ne deriva pertanto che la funzione è continua in $(0,0)$. Essendo $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ e

$$\left|\frac{1-\cos(xy)}{(x^4+y^2)(\sqrt{x^2+y^2})}\right| = \left|\frac{1-\cos(xy)}{x^2y^2}\right| \left|\frac{y^2}{x^4+y^2}\right| \left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| |x| \leq |x|$$

ne possiamo concludere che f è differenziale anche in $(0,0)$. Infine se $(x,y) \neq (0,0)$

$$f_x = \frac{y\sin(xy)\ \left[x^4+y^2\right] - (1-\cos(xy))\ 4x^3}{(x^4+y^2)^2}$$

$$f_y = \frac{x\sin(xy)\ \left[x^4+y^2\right] - (1-\cos(xy))\ 2y}{(x^4+y^2)^2}$$

E quindi

$$f_x(\pi,1) = \frac{-8\,\pi^3}{(\pi^4+1)^2}$$

$$f_y(\pi,1) = \frac{-4}{(\pi^4+1)^2}$$

Ne possiamo concludere che

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\pi,1) = \frac{-8\,\pi^3\cdot 1/2 - 4\cdot\ \sqrt{3}/2}{(\pi^4+1)^2} = -\frac{4\,\pi^3+2\sqrt{3}}{(\pi^4+1)^2}$$

3. Trovare i punti critici della funzione $f(x,y) = x^2\,y^2(1-x-y)$ e dire se sono punti di massimo o minimo relativi.

   Risulta

$$\begin{array}{lcl} f_x = 2\,x\,y^2(1-x-y) - x^2\,y^2 = 0 & \text{ossia} & x\,y^2(2-3\,x-2\,y) = 0 \\ f_y = 2\,x^2\,y(1-x-y) - x^2\,y^2 = 0 & & x^2\,y(2-2\,x-3\,y) = 0 \end{array}$$

   Sono dunque punti critici ogni punto del tipo $(a,0)$ e $(0,b)$, $\forall a,b \in \mathcal{R}$. Inoltre abbiamo anche

$$\begin{array}{c} 2-3\,x-2\,y = 0 \\ 2-2\,x-3\,y = 0 \end{array}$$

e quindi $y = \frac{2-3x}{2}$ e quindi $4 - 4x - 6 + 9x = 0$ ossia $x = \frac{2}{5}$ e quindi $y = \frac{2-6/5}{2} = \frac{2}{5}$. Abbiamo infine:

$$\begin{aligned} f_{x\,x} &= 2\,y^2(1-x-y) - 2\,x\,y^2 - 2\,x\,y^2 \\ f_{x\,y} &= 4\,x\,y(1-x-y) - 2\,x\,y^2 - 2\,x^2\,y \\ f_{y\,y} &= 2\,x^2(1-x-y) - 2\,x^2\,y - 2\,x^2\,y \end{aligned}$$

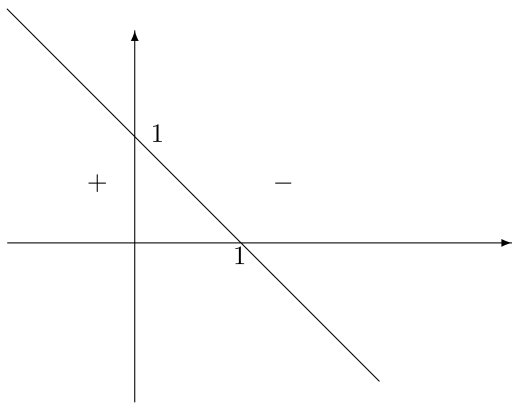
Risulta allora

$$\begin{aligned} f_{x\,x}(2/5, 2/5) &= -3\,(2/5)^3 \\ f_{x\,y}(2/5, 2/5) &= -2\,(2/5)^3 \\ f_{y\,y}(2/5, 2/5) &= -3\,(2/5)^3 \end{aligned}$$

Possiamo quindi concludere che $(2/5, 2/5)$ è un punto di massimo relativo. D'altra parte

$$H(a,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\,a^2(1-a) \end{pmatrix} \quad H(0,b) = \begin{pmatrix} 2\,b^2(1-b) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi $det H(a,0) = det H(0,b) = 0$. Tenendo conto che la funzione si annulla sugli assi coordinati e che il suo segno si può capire facilmente dalla figura:



possiamo concludere che i punti $(a,0)$ con $a > 1$ sono punti di massimo relativo, mentre se $a < 1$ sono punti di minimo relativo. Invece i punti del tipo $(0,b)$ sono punti di massimo relativo se $b > 1$ e di minimo telativo se $b < 1$. Infine i punti $(1,0)$ e $(0,1)$ sono punti sella.

4. Calcolare l'integrale doppio:

$$\int\!\!\int_M \log\left(x^2 + y^2\right)\,dxdy$$

dove $M = [0,1] \times [0,1]$.

Risulta

$$\int\!\!\int_M \log(x^2+y^2)\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \log(x^2+y^2)\,dy\right) dx$$

Integrando per parti, si ottiene

$$\int_0^1 \log(x^2+y^2)\,dy = y\,\log(x^2+y^2)\big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2\,y^2}{x^2+y^2}\,dy =$$

$$= \log(1+x^2) - 2\left[\int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{x^2+y^2}\right) dy\right] = \log(1+x^2) - 2 + 2\int_0^1 \frac{1}{1+(y/x)^2}\, dy =$$

$$= \log(1+x^2) - 2 + 2\,x\ \arctan(y/x)|_0^1 = \log(1+x^2) - 2 + 2\,x\ \arctan(1/x)$$

Infine, integrando sempre per parti:

$$\iint_M \log(x^2+y^2)\, dxdy = -2 + \int_0^1 \big(\log(1+x^2) + 2\,x \arctan(1/x)\big)\, dx =$$

$$= -2 + \big(x\log(1+x^2) + x^2\arctan(1/x)\big)\big|_0^1 - \int_0^1 \left[\frac{2\,x^2}{1+x^2} + x^2\frac{1}{1+(1/x)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right] dx =$$

$$= -2 + \log\,2 + \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = -2 + \log\,2 + \frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + \log\,2 - 3$$

5. Calcolare il volume del solido:

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3,\ x^2+y^2 \le z \le 4\left(1 - \sqrt{x^2+y^2}\right)\right\}$$

Posto $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, le due superficie si intersecano se $\rho^2 = 4(1-\rho)$, ossia $\rho^2 + 4\,\rho - 4 = 0$ e quindi $\rho = \rho_0 = 2(\sqrt{2}-1)$. Possiamo quindi concludere che

$$\mathcal{L}_3(M) = \iint_{B_{\rho_0}} \left[4(1 - \sqrt{x^2+y^2}) - (x^2+y^2)\right] dxdy = 2\,\pi \int_0^{\rho_0} (4\,\rho - 4\,\rho^2 - \rho^3) d\rho =$$

$$= 2\,\pi \left[2\,\rho^2 - \frac{4}{3}\rho^3 - \frac{1}{4}\rho^4\right]\Bigg|_0^{\rho_0} = 8\,\pi(\sqrt{2}-1)^2 \left[\frac{5-2\sqrt{2}}{3}\right]$$