Prova scritta di Analisi Matematica II
Corso di Laurea Triennale in Matematica

23 gennaio 2017

1. Studiare la convergenza della successione di funzioni:
$$f_n(x) = n\,x(1-x)\,e^{-n^2\,x(1-x)}, \quad x \in [0,1]$$

2. Sia $f\,:\mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ la funzione definita da:
$$\begin{cases} \frac{x\,y^3}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   Dire

   i) Dire se f è continua in $(0,0)$,

   ii) dire se f ha derivate direzionali in $(0,0)$,

   iii) dire se f è differenziabile in $(0,0)$.

3. Calcolare
$$\iint_M \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$$
   dove $M = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2,\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$.

4. Calcolare il valore massimo ed il valore minimo della funzione $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+y-2\,z$ sull'insieme: $K = \{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ z \geq 0\}$.

5. Sia $\varphi\,:[0,1] \to \mathcal{R}^2$ la curva definita da:
$$\varphi(t) = (t\,\cos(\log\,t),\ t\,\sin(\log\,t))\,,\ t \in (0,1], \quad \varphi(0) = (0,0)$$
   Verificare che φ "gira" attorno all'origine infinite volte. Calcolare la lunghezza di φ e la sua curvatura. Calcolare inoltre l'area della parte di piano racchiusa dal primo giro di φ attorno all'origine (quando $t \in \left[e^{-2\,\pi},\ 1\right]$) e un segmento dell'asse x.

Correzione

1. Studiare la convergenza della successione di funzioni:
$$f_n(x) = n\,x(1-x)\,e^{-n^2\,x(1-x)}, \quad x \in [0,1]$$

Risulta

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \quad \forall x \in [0,1]$$

pertanto f_n converge a zero puntualmente. D'altra parte:

$$f_n'(x) = n\, e^{-n^2(x-x^2)} \left[1 - 2\,x - n^2(1-2\,x)(x-x^2)\right] = n\,(1-2\,x)e^{-n^2(x-x^2)} \left[1 - n^2\,x + n^2\,x^2\right]$$

Posto infine

$$x_1(n) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1-\frac{4}{n^2}}}{2}, \quad x_2(n) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1-\frac{4}{n^2}}}{2}$$

si ottiene

$$\alpha_n = \max\{|f_n(x)|,\ x \in [0,1]\} = f_n(x_1(n)) = f_n(x_2(n)) = \frac{1}{n\,e}$$

Pertanto

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$

Conseguentemente la convergenza a zero della successione f_n è uniforme.

2. Sia $f\ : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ la funzione definita da:

$$\begin{cases} \frac{x\,y^3}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Dire

i) Dire se f è continua in $(0,0)$,

ii) dire se f ha derivate direzionali in $(0,0)$,

iii) dire se f è differenziabile in $(0,0)$.

Ricordando che $2\,|a\,b| \leq a^2 + b^2,\ \forall a, b \in \mathcal{R}$, si ottiene la stima:

$$\left|\frac{x\,y^3}{x^2+y^4}\right| = \left|\frac{x\,y^2\ y}{x^2+y^4}\right| \leq \frac{|y|}{2}$$

Pertanto la funzione è continua in $(0,0)$. Ora, indicata con $v = (v_1, v_2)$ una direzione in $\mathcal{R}^2$, dalla definizione risulta;

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h\,v_1,\ h\,v_2) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^4\,v_1\ v_2^3}{h^3(v_1^2 + h^2\,v_2^4)} = 0$$

Infine, osserando che $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. la funzione f è differenziabile in $(0,0)$ se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sigma(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y^3}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

D'altra parte se $x = y^2$ con $y > 0$, si ottiene;

$$\sigma(y^2, y) = \frac{y^5}{2\,y^4\ y\,\sqrt{y^2+1}} = \frac{1}{2\,\sqrt{y^2+1}}$$

Pertanto f non è differenziabile in $(0,0)$.

3. Calcolare
$$\int\int_M \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$$
dove $M = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2,\ (x-1)^2 + y^2 \le 1\}$.

Passando in coordinate polari, si ottiene:
$$\int\int_M \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{2\,\cos\,\theta} \rho\ \cos\,\theta\ d\rho\right)d\theta = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\,\theta\,d\theta =$$
$$= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\cos\,\theta - \cos\,\theta\,\sin^2\,\theta\right)\,d\theta = 2\left[\sin\,\theta - \frac{\sin^3\,\theta}{3}\right]\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{8}{3}$$

4. Calcolare il valore massimo ed il valore minimo della funzione $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+y-2\,z$ sull'insieme: $K = \{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 \le 4,\ z \ge 0\}$.

La funzione f ha un unico punto critico dato da $P_1 = (0,\ -1/2,\ 1)$. Studiando la funzione sulla sfera unità, col metodo dei moltiplicatori, si ottiene il sistema:
$$\begin{cases} 2\,x - 2\,\lambda\,x = 0 \\ 2\,y + 1 - 2\,\lambda\,y = 0 \\ 2\,z - 2 - 2\,\lambda\,z = 0 \\ x^2+y^2+z^2-4 = 0 \end{cases}$$
Dalla prima equazione, si ottiene $x = 0$. Dalla seconda $\lambda = \frac{2\,y+1}{2\,y}$ e quindi dalla terza $z = -2\,y$. Sostituendo infine nella quarta equazione otteniamo $y^2 = 1/5$ e, tenendo conto che deve essere $z \ge 0$, otteniamo il punto
$$P_2 = \left(0,\ -\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$$
Osserviamo infine che, sulla parte della frontiera di K ove $z = 0$, la funzione diventa $f(x,y,0) = g(x,y) = x^2+y^2+y$ ed il vincolo $x^2+y^2 \le 4$. Abbiamo quindi l'ulteriore punto critico $P_3 = (0,\ -1/2,\ 0)$ e sul bordo $(x^2+y^2=4)$ gli altri punti $P_4 = (0,\ 2,\ 0)$ e $P_5 = (0,\ -2,\ 0)$. Confrontando infine i valori, si ha
$$f(P_1) = \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{4},\quad f(P_2) = \frac{4}{5} + \frac{16}{5} - \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{8}{\sqrt{5}} = 4 - 2\sqrt{5}$$
$$f(P_3) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4},\quad f(P_4) = 4+2 = 6,\quad f(P_5) = 4-2 = 2$$
Il punto di minimo risulta essere quinri P_1, mentre il punto di massimo P_4.

5. Sia $\varphi : [0,1] \to \mathcal{R}^2$ la curva definita da:
$$\varphi(t) = (t\ \cos(\log\,t),\ t\ \sin(\log\,t))\,,\ t \in (0,1],\quad \varphi(0) = (0,0)$$
Verificare che φ "gira" attorno all'origine infinite volte. Calcolare la lunghezza di φ e la sua curvatura. Calcolare inoltre l'area della parte di piano racchiusa dal primo giro di φ attorno all'origine (quando $t \in \left[e^{-2\,\pi},\ 1\right]$) e un segmento dell'asse x.

Osserviamo che risulta:

$$x'(t) = \cos(\log\, t) - \sin(\log\, t), \quad y'(t) = \sin(\log\, t) + \cos(\log\, t)$$

e quindi $|\varphi'(t)|^2 = 2$. Ne deriva che

$$L(\varphi) = \int_0^1 |\varphi'(t)|\, dt = \sqrt{2}$$

Infine

$$x''(t) = \frac{-\sin(\log\, t) - \cos(\log\, t)}{t}, \quad y''(t) = \frac{\cos(\log\, t) - \sin(\log\, t)}{t}$$

Pertanto

$$k(t) = \frac{y''(t)\, x'(t) - x''(t)\, y'(t)}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\, t}$$

Infine, usando le formule di Gauss-Green:

$$Area = \frac{1}{2} \int_{e^{-2\pi}}^1 [t\, \cos(\log\, t)\, (\sin(\log\, t) + \cos(\log\, t)) + t\, \sin(\log\, t)\, (-\cos(\log\, t) + \sin(\log\, t))]\, dt =$$

$$= \frac{1 - e^{-4\,\pi}}{4}$$