Prova scritta di Analisi Matematica II
Corso di Laurea Triennale in Matematica

26 giugno 2017

1. Dire per quali $p \in \mathcal{R}$ converge uniformemente la successione di funzioni;
$$f_n(x) = n^p\, x^n\, (1-x)^{10},\ x \in [0,1].$$

2. Sia $f\,: \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ la funzione definita da $f(0,0) = 0$ e
$$f()x, y = \frac{\log(1 + x^2\, y^2)}{x^4 + y^2} \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0)$$
Dire se f è continua e differenziabile.

3. Siano $S = \{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ e $E = \{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3,\ x^2 + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 1\}$. Calcolare $\mathcal{L}_3(S \cap E)$.

4. Dire se il sistema
$$\begin{cases} x\, y\, z - 1 = 0 \\ 3\, x^2 + 2\, y^2 + z^2 - 6 = 0 \end{cases}$$
determina una curva nell'intorno del punto $P = (1,1,1)$ e, in caso affermativo calcolare della curva la curvatura in P.

5. Dire se la forma differenziale
$$\omega(x, yz) = \big(3\, x^2\, y + 2\, x\, z\big)\, dx + \big(x^3 + 2\, y\big)\, dy + \big(x^2 + 2\, z\big)\, dz$$
è esatta e, in caso affermativo, trovarne una primitiva.

Correzione

1. Dire per quali $p \in \mathcal{R}$ converge uniformemente la successione di funzioni;

$$f_n(x) = n^p\, x^n\, (1-x)^{10},\ \ x \in [0,1].$$

$\forall p \in \mathcal{R}$ e $\forall x \in [0,1]$ risulta

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

D'altrra parte

$$f_n'(x) = n^p \left[n\, x^{n-1}(1-x)^{10} - x^n\, 10(1-x)^9 \right] = n^p\, x^{n-1}(1-x)^9\, (n - (n+10)\, x)$$

Pertanto il punto $x_n = \frac{n}{n+10}$ è il punto di massimo per f_n e si ha

$$\alpha_n = \max f_n = f_n(x_n) = n^p \left(\frac{n}{n+10} \right)^n \left(1 - \frac{n}{n+10} \right)^{10} = \frac{n^p}{(n+10)^{10}}\ 10^{10}\ \frac{1}{(1+10/n)^n}$$

Ne possiamo concludere che

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \begin{cases} 0 & \text{se } p < 10 \\ 10^{10}\, e^{-10} & \text{se } p = 10 \\ +\infty & \text{se } p > 10 \end{cases}$$

Ne deriva quindi che la convergenza di f_n a zero è uniforme se e solo se $p < 10$.

2. Sia $f\, : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ la funzione definita da $f(0,0) = 0$ e

$$f()x, y = \frac{\log(1 + x^2\, y^2)}{x^4 + y^2} \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0)$$

Dire se f è continua e differenziabile.

Dalle proprietà del logaritmo, sappiamo che esiste $\delta > 0$ tale che

$$\left| \frac{\log(1+t)}{t} \right| < 2, \quad \forall t \neq 0,\ t \in (-\delta,\ \delta)$$

Allora se $0 < x^2\, y^2 < \delta$, possiamo ottenere la stima:

$$|f(x,y)| = \left| \frac{\log(1 + x^2\, y^2)}{x^2\, y^2} \right| \cdot \left| \frac{y^2}{x^4 + y^2} \right| \cdot x^2 < 2\, x^2$$

Ne possiamo quindi concludere che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

e quindi f è continua anche nell'origine. Analogamente, ricordando che $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, ragionando nello stesso modo otteniamo la stima:

$$\left| \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \left| \frac{\log(1 + x^2\, y^2)}{x^2\, y^2} \right| \cdot \left| \frac{y^2}{x^4 + y^2} \right| \cdot \left| \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \cdot |x| \leq 2\, |x|$$

e quindi le funzione f è differenziabile anche nell'origine.

3. Siano $S = \{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 \le 4\}$ e $E = \{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3,\ x^2+\frac{y^2}{9}+z^2 \le 1\}$. Calcolare $\mathcal{L}_3(S \cap E)$.

Osserviamo che $\mathcal{L}_3(S\cap E) = \mathcal{L}_3(E) - \mathcal{L}_3(E\setminus S) = \frac{4}{3}\pi\, 1\cdot 3\cdot 1 - \mathcal{L}_3(E\setminus S) = 4\pi - \mathcal{L}_3(E\setminus S)$. Daltra parte

$$E\setminus S = \{(x,y,z)\in\mathcal{R}^3,\ x^2+y^2+z^2\ge 4,\ x^2+\frac{y^2}{9}+z^2\le 1\}$$

Pertanto $(x,y,z)\in E\setminus S$ se e solo se $4-x^2-z^2 \le y^2 \le 9(1-x^2-z^2)$. La proiezione dell'insieme $E\setminus S$ sul piano $y=0$ è data quindi dell'insieme dei punti $(x,z)\in\mathcal{R}^2$ tali che $4-x^-z^2 \le 9(1-x^2-z^2)$ ossia $8(x^2+z^2)\le 5$. Ponendo infine per semplicità $a=\sqrt{5/8}$ e passando in coordinate polari, si ottiene:

$$\mathcal{L}_3(E\setminus S) = 2\iint_{B_a}\left(3\sqrt{1-x^2-z^2}-\sqrt{4-x^2-z^2}\right)dxdz =$$

$$= 4\pi\int_0^a \rho\left(3\sqrt{1-\rho^2}-\sqrt{4-\rho^2}\right)d\rho = 4\pi\left[-(1-\rho^2)^{3/2}+\frac{1}{3}(4-\rho^2)^{3/2}\right]\Bigg|_0^a =$$

$$= 4\pi\left(\frac{1}{3}(4-a^2)^{3/2}-(1-a^2)^{3/2}-\frac{5}{8}\right)$$

4. Dire se il sistema

$$\begin{cases} x\,y\,z-1=0 \\ 3\,x^2+2\,y^2+z^2-6=0\end{cases}$$

determina una curva nell'intorno del punto $P=(1,1,1)$ e, in caso affermativo calcolare della curva la curvatura in P.

Indicata con $\Phi : \mathcal{R}^3\to\mathcal{R}^2$ la funzione che determina il sistema, si ha

$$J_\Phi(x,y,z) = \begin{pmatrix} y\,z & x\,z & x\,y \\ 6\,x & 4\,y & 2\,z\end{pmatrix}$$

e nel punto P:

$$J_\Phi(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 2\end{pmatrix}$$

Essendo

$$det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2\end{pmatrix} = -2 \ne 0$$

possiamo applicare al sistema il teorema del Dini sulle funzioni implicite. Esistono quindi $r,\ R>0$, tali che $\forall x\in(1-r,1+r)$ esistono unici $(y,z)\in B_R(1,1)$ tali che $\Phi(x,y,z)=0$. Il sistema determina quindi una curva $\phi(x)=(x,y(x),z(x))$. Derivando il sistema rispetto ad x, si ottiene:

$$\begin{cases} y\,z+x\,y'\,z+x\,y\,z'=0 \\ 6\,x+4\,y\,y'+2\,z\,z'=0\end{cases}$$

e per $x=1$

$$\begin{cases} 1+y'(1)+z'(1)=0 \\ 6+4\,y'(1)+2\,z'(1)=0\end{cases}$$

e quindi $y'(1) = -2,\ z'(1) = 1$. Allora $\phi'(1) = (1, -2, 1)$. Derivando infine una seconda volta

$$\begin{cases} y'\,z + y\,z' + y'\,z + x\,y''\,z + x\,y'\,z' + y\,z' + x\,y'\,z' + x\,y\,z'' = 0 \\ 6 + 4\,(y')^2 + 4\,y\,y'' + 2\,(z')^2 + 2\,z\,z'' = 0 \end{cases}$$

e per $x = 1$

$$\begin{cases} -2 + 1 - 2 + y''(1) - 2 + 1 - 2 + z''(1) = 0 \\ 6 + 16 + 4\,y''(1) + 2 + 2\,z''(1) = 0 \end{cases}$$

e quindi $y''(1) = -18,\ z''(1) = 24$. Allora $\phi''(1) = (0, -18, 24)$. Concludendo

$$k(1) = \frac{|\phi'(1) \wedge \phi''(1)|}{|\phi'(1)|^3} = \frac{\sqrt{146}}{8(\sqrt{6})^3}$$

5. Dire se la forma differenziale

$$\omega(x, yz) = \big(3\,x^2\,y + 2\,x\,z\big)\,dx + \big(x^3 + 2\,y\big)\,dy + \big(x^2 + 2\,z\big)\,dz$$

è esatta e, in caso affermativo, trovarne una primitiva.

Risulta

$$\frac{\partial a_1}{\partial y} = 3\,x^2, \quad \frac{\partial a_2}{\partial x} = 3\,x^2,$$
$$\frac{\partial a_1}{\partial z} = 2\,x, \quad \frac{\partial a_3}{\partial x} = 2\,x,$$
$$\frac{\partial a_2}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial a_3}{\partial y} = 0.$$

Pertanto la forma differenziale è chiusa e quindi anche esatta essendo definita in tutto lo spazio. Integrando a_1 rispetto ad x si ottiene che deve essere $f(x, y, z) = x^3\,y + x^2\,z + g(y, z)$ e quindi $f_y = x^3 + g_y = x^3 + 2\,y$, allora $g_y = 2\,y$ e quindi $g(y, z) = y^2 + h(z)$. Derivando infine in z $f_z = x^2 + h' = x^2 + 2\,z$. Pertanto una primitiva della forma differenziale ω è la funzione $f(x, y, z) = x^3\,y + x^2\,z + y^2 + z^2$.