Seconda prova scritta parziale di Analisi Matematica II
Corso di Laurea Triennale in Matematica

20 gennaio 2017

1. Sia $\varphi \ : [0,1] \to \mathcal{R}^2$ la curva: $\varphi(t) = (t(1-t), t(1-t)(1+t))$.
   i) Verificare che φ è una curva regolare chiusa,
   ii) calcolare la curvatura di φ,
   iii) calcolare l'area della parte di piano racchiusa dalla curva φ.
2. Calcolare il massimo e il minimo valore della funzione $f(x,y) = x^2+4y^2-x-y+1$ sull'insieme $K = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2, \ x^2+4y^2 \leq 1\}$.
3. Verificare che il sistema:
$$\begin{cases} xyz - 1 = 0 \\ x^2+y^2-z^2-1 = 0 \end{cases}$$
   determina nell'intorno del punto $P = (1,1,1)$ una curva $\mathcal{C}$. Di $\mathcal{C}$ trovare in P la curvatura ed il triedro fondamentale.
4. Sia $\omega \ : \mathcal{R}^3 \to (\mathcal{R}^3)^*$ la forma differenzale:
$$\omega(x,y,z) = (yz-y)dx + (xz-x+z)dy + (xy+y+2z)dz$$
   Dire se ω è esatta e, in caso affermativo, trovarne una primitiva.
5. Sia $\mathcal{S}$ la parte di cilindro $\mathcal{C} = \{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3, \ x^2+y^2 = R^2\}$ compresa tra il piano $z=0$ e l'elica $\mathcal{E} = \{(R\cos t, \ R\sin t, \ t), \ t \in [0, \ 2\pi]\}$. Calcolare l'area di $\mathcal{S}$.

Correzione

1. Sia $\varphi \ : [0,1] \to \mathcal{R}^2$ la curva: $\varphi(t) = (t(1-t), t(1-t)(1+t))$.
   i) Verificare che φ è una curva regolare chiusa,
   ii) calcolare la curvatura di φ,
   iii) calcolare l'area della parte di piano racchiusa dalla curva φ.

   Risulta $\varphi(t) = (t(1-t), t(1-t)(1+t)) = (t-t^2, t-t^3)$ e quindi $\varphi'(t) = (1-2t, \ 1-3t^2)$. Pertanto $|\varphi'(t)|^2 = 2-4t-2t^2+9t^4 > 0$ e quind φ è regolare. Risulta poi: $\varphi''(t) = (-2, -6t)$, ne possiamo quindi concludere che:
$$k(t) = \frac{y''x' - x''y'}{(\sqrt{x'^2+y'^2})^3} = \frac{-6t(1-2t)+2(1-3t^2)}{(\sqrt{2-4t-2t^2+9t^4})^3} = \frac{6t^2-6t+2}{(\sqrt{2-4t-2t^2+9t^4})^3}$$

Osserviamo infine che il versore della normale esterna ν è dato da

$$\nu = \frac{(1-3t^2,\ 2t-1)}{\sqrt{2-4t-2t^2+9t^4}}$$

e quindi usando le formule di Gauss-Green, si ha:

$$\mathcal{L}_2(A) = \frac{1}{2}\int_{\partial A}(x\nu_1 + y\nu_2)ds = \frac{1}{2}\int_0^1 [(t-t^2)(1-3t^2) + (t-t^3)(2t-1)]dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (t^4 - 2t^3 + t^2)dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{4} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{60}$$

2. Calcolare il massimo e il minimo valore della funzione $f(x,y) = x^2+4y^2-x-y+1$ sull'insieme $K = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2,\ x^2+4y^2 \leq 1\}$.

   La funzione f ha un unico punto critico all'interno di K dato da

   $$P_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$$

   Studiando la funzione sul bordo col metodo dei moltiplicatori, si ottie e il sistema:

   $$\begin{cases} 2x - 1 - 2\lambda x = 0 \\ 8y - 1 - 8\lambda y = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

   Dalla prima equazione, si ottie e:

   $$\lambda = \frac{2x-1}{2x}$$

   Sostituendo nella seconda: $16xy - 2x - 16xy + 8y = 0$, ossia $x = 4y$. Infine, dalla terza equazione, si ottengono i due punti

   $$P_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{5}}\right), \quad P_3 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)$$

   Infine, confrontando i valori, si ha:

   $$f(P_1) == \frac{11}{16}, \quad f(P_2) = \frac{4-\sqrt{5}}{2}, \quad f(P_3) = \frac{4+\sqrt{5}}{2}$$

   Pertanto P_1 e il punto di minimo assoluto e P_3 il punto di massimo assoluto.

3. Verificare che il sistema:

   $$\begin{cases} xyz - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

   determina nell'intorno del punto $P = (1,1,1)$ una curva $\mathcal{C}$. Di $\mathcal{C}$ trovare in P la curvatura ed il triedro fondamentale.

   La matrice jacobiana della trasformazione è:

   $$\begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 2x & 2y & -2z \end{pmatrix}$$

e, nel punto $(1,1,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Siccome

$$det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = -4 \neq 0$$

possiamo applicare il teorema del Dini, per concludere che, nell'intorno di P, il sistema considerato determina y e z come funzioni di x. Otteniamo quindi la curva $\varphi(x) = (x, y(x), z(x))$. Allora dervando rispetto ad x, si ottiene:

$$\begin{cases} yz + xy'z + xyz' = 0 \\ 2x + 2yy' - 2zz' = 0 \end{cases}$$

e, per $x = 1$:

$$\begin{cases} 1 + y'(1) + z'(1) = 0 \\ 2 + 2y'(1) - 2z'(1) = 0 \end{cases}$$

Se ne ricava che $y'(1) = -1$ e $z'(1) = 0$, pertanto

$$\varphi'(1) = (1,\ -1,\ 0) \quad \text{e quindi} \overrightarrow{t} = \frac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}}$$

Infine, dervando una seconda volta, si ha:

$$\begin{cases} y'z + yz' + y'z + xy''z + xy'z' + yz' + xy'z' + xyz'' = 0 \\ 2 + 2(y')^2 + 2yy'' - 2(z')^2 - 2zz'' = 0 \end{cases}$$

e, sempre per $x = 1$:

$$\begin{cases} -1 - 1 + y''(1) + z''(1) = 0 \\ 2 + 2 + 2y''(1) - 2z''(1) = 0 \end{cases}$$

da cui si ha $y''(1) = 0$ e $z''(1) = 2$. Allora $\varphi''(1) = (0,0,2)$, $\varphi'(1) \wedge \varphi''(1) = (-2,-2,0)$. Possiamo quindi concludere che

$$k(1) = \frac{\sqrt{4+4}}{(\sqrt{2})^3} = 1, \quad \overrightarrow{b}(1) = \frac{(-1,-1,0}{\sqrt{2}}, \overrightarrow{n} = \overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{t} = (0,0,1)$$

4. Sia $\omega\ : \mathcal{R}^3 \to (\mathcal{R}^3)^*$ la forma differenzale:

$$\omega(x,y,z) = (yz - y)dx + (xz - x + z)dy + (xy + y + 2z)dz$$

Dire se ω è esatta e, in caso affermativo, trovarne una primitiva.

Risulta

$$\frac{\partial a_1}{\partial y} = z - 1, \quad \frac{\partial a_2}{\partial x} = z - 1$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial z} = y, \quad \frac{\partial a_3}{\partial x} = y$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial z} = x + 1, \quad \frac{\partial a_3}{\partial y} = x + 1$$

La forma differenzale risulta quindi chiusa e pertanto è anche esatta essendo $\mathcal{R}^3$ un dominio stellato. Integrando la prima componente, ottengo: $f(x,y,z) = xyz - xy + g(y,z)$. Derivando rispetto ad y: $f_y = xz - x + g_y = xz - x + z$, quindi $g(y,z) = yz + h(z)$. Derivando infine rispetto a z: $f_z = xy + y + h' = xy + y + 2z$, allora $h(z) = z^2$. In conclusione, una primitiva è: $f(x,y,z,) = xyz - xy + yz + z^2$.

5. Sia $\mathcal{S}$ la parte di cilindro $\mathcal{C} = \{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3,\ x^2 + y^2 = R^2\}$ compresa tra il piano $z = 0$ e l'elica $\mathcal{E} = \{(R\cos t,\ R\sin t,\ t),\ t \in [0,\ 2\pi]\}$. Calcolare l'area di $\mathcal{S}$.

   Una parametrizzazione di $\mathcal{S}$ è

$$\varphi(t,s) = (R\cos t,\ R\sin t,\ s)\,, \quad t \in [0, 2\pi],\ s \in [0, t]$$

   e quindi

$$\varphi_t(t,s) = (-R\sin t,\ R\cos t,\ 0)\,, \quad \varphi_s(t,s) = (0,0,1)\,,$$

   Pertanto

$$Area(\mathcal{S}) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^t R\ ds \right) = R\ 2\,\pi^2 = \frac{(2\pi R)(2\pi)}{2}$$

   Notiamo che la superficie $\mathcal{S}$ è equivalente ad un triangolo la cui base misuare $2\,\pi\,R$ e la cui altezza $2\,\pi$.