ANALISI 3 - L01:
SPAZI VETTORIALI NORMATI

Nel seguito indicheremo con $\mathbb{K}$ il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ oppure il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$, e lo chiameremo *campo degli scalari*; per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ indichiamo con $|\lambda|$ il valore assoluto del numero reale λ quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, oppure il modulo del numero complesso λ quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1. Norma

Una norma su uno spazio vettoriale ci fornisce uno strumento per misurare la lunghezza dei vettori, in una maniera che sia compatibile con la struttura lineare. Tramite essa possiamo quindi misurare distanze e dotare lo spazio di una struttura metrica e topologica.

Definizione 1.1. Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. Una *norma* su V è una applicazione $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ che verifica le seguenti proprietà:

1) per ogni vettore $v \in V$ si ha $\|v\| \geqslant 0$;
2) $\|v\| = 0$ se e solo se $v = 0$;
3) per ogni scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ e ogni vettore $v \in V$ si ha $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$;
4) per ogni coppia di vettori $u, v \in V$ vale la *disuguaglianza triangolare*

$$\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\| .$$

Uno spazio vettoriale V dotato di norma $\|\cdot\|$ si dice *spazio normato* e lo indichiamo con la coppia $(V, \|\cdot\|)$.

Nel caso in cui siano verificate tutte le proprietà tranne la 2) allora si parla di seminorma.

Definizione 1.2. Una *seminorma* su V è una applicazione $p \colon V \to \mathbb{R}$ che verifica le seguenti proprietà:

1') per ogni vettore $v \in V$ si ha $p(v) \geqslant 0$;
3') per ogni scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ e ogni vettore $v \in V$ si ha $p(\lambda v) = |\lambda| \cdot p(v)$;
4') per ogni coppia di vettori $u, v \in V$ vale la *disuguaglianza triangolare*

$$p(u + v) \leqslant p(u) + p(v).$$

Possiamo definire anche il concetto di quasi-norma indebolendo le richieste della condizione 4').

Definizione 1.3. Una *quasi-norma* su V è una applicazione $q \colon V \to \mathbb{R}$ che verifica le seguenti proprietà:

1") per ogni vettore $v \in V$ si ha $q(v) \geqslant 0$;
3") per ogni scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ e ogni vettore $v \in V$ si ha $q(\lambda v) = |\lambda| \cdot q(v)$;
4") esiste una costante $K > 1$ tale che per ogni coppia di vettori $u, v \in V$ vale la *disuguaglianza quasi-triangolare*

$$q(u + v) \leqslant K \left(q(u) + q(v) \right) .$$

Date: ultimo aggiornamento, 28 settembre 2020.

Come prime conseguenze immediate delle proprietà della norma abbiamo che

$$\|-v\| = \|v\|$$

per ogni vettore $v \in V$, infatti

$$\|-v\| = \|(-1)v\| = |-1| \cdot \|v\| = \|v\|\,;$$

ed inoltre dalla disuguaglianza triangolare segue la *disuguaglianza triangolare rovesciata*: per ogni coppia di vettori $u, v \in V$ si ha

$$\big|\|u\| - \|v\|\big| \leqslant \|u - v\|\,. \tag{1}$$

Infatti, per la disuguaglianza triangolare, abbiamo

$$\begin{aligned} \|u\| &= \|(u - v) + v\| \leqslant \|u - v\| + \|v\| \implies \|u\| - \|v\| \leqslant \|u - v\|\,, \\ \|v\| &= \|-(u - v) + u\| \leqslant \|u - v\| + \|u\| \implies \|v\| - \|u\| \leqslant \|u - v\|\,. \end{aligned}$$

Esempio 1.4. Sia $d \in \mathbb{N}$. Sullo spazio vettoriale di dimensione finita $\mathbb{K}^d$ (ovvero $\mathbb{R}^d$ oppure $\mathbb{C}^d$) si possono definire diverse norme, tra le più comuni abbiamo:

- norma della massa:

$$\|v\|_1 := \sum_{j=1}^{d} |v_j|\,; \tag{2}$$

- norma euclidea:

$$\|v\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^{d} |v_j|^2}; \tag{3}$$

- norma del massimo:

$$\|v\|_\infty := \max_{j=1,\dots d} |v_j|\,; \tag{4}$$

dove $v = (v_1, \dots, v_d) \in \mathbb{K}^d$. Verificare che queste quantità possiedono effettivamente le proprietà che definiscono una norma è un esercizio semplice che lasciamo al lettore, l'unico punto che richiede qualche attenzione è la disuguaglianza triangolare per la norma euclidea, ma la cui verifica è gia stata vista nei precedenti corsi di analisi.

Esempio 1.5. Possiamo dare un esempio di spazio normato di dimensione infinita considerando lo spazio vettoriale $C[0, 1]$ delle funzioni continue definite sull'intervallo $[0, 1]$. Che sia di dimensione infinita lo si verifica facilmente, ad esempio osservando che le funzioni $f_n(x) := x^n$, al variare di $n \in \mathbb{N}$, formano una famiglia infinita di elementi linearmente indipendenti in $C[0, 1]$. Anche su $C[0, 1]$ si possono definire diverse norme analoghe a quello dell'esempio precedente:

- norma della massa:

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\, \mathrm{d}t; \tag{5}$$

- norma quadratica:

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2\, \mathrm{d}t}; \tag{6}$$

- norma del massimo:

$$\|f\|_\infty := \max_{t \in [0,1]} |f(t)|\,; \tag{7}$$

con $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ funzione continua. Verificare che queste quantità possiedono effettivamente le proprietà che definiscono una norma è un esercizio semplice che lasciamo al lettore, l'unico punto che richiede qualche attenzione è la disuguaglianza triangolare per la norma quadratica, ma la cui verifica sarà oggetto delle prossime lezioni.

2. Struttura metrica e topologica

Ogni norma definisce in modo canonico una struttura metrica. Per definire la *distanza* tra due punti indotta dalla norma basta porre

$$d(u,v) := \|u - v\|\,,$$

per ogni coppia di vettori $u, v \in V$. Tale funzione d rende V uno *spazio metrico*, infatti si verifica facilmente che:

- $d(u,v) = d(v,u)$;
- $d(u,v) \geqslant 0$;
- $d(u,v) = 0$ se e solo se $u = v$;
- $d(u,w) \leqslant d(u,v) + d(v,w)$;

per ogni scelta di vettori $u, v, w \in V$.

Ogni spazio normato, essendo uno spazio metrico, è anche uno *spazio topologico*. Usando la distanza data dalla norma possiamo definire le palle metriche. La *palla aperta* $B(v,r)$ di centro $v \in V$ e raggio $r > 0$ è data da

$$B(v,r) := \{u \in V\colon\ \|u - v\| < r\}\,.$$

La palla $B(0,1)$ con centro nell'origine 0 di V e raggio 1 è detta *palla unitaria* di V.

Un punto v si dice *interno* all'insieme A quando esiste un raggio $r > 0$ tale che la palla $B(v,r)$ è tutta contenuta in A. Un sottoinsieme A dello spazio normato V si dice *aperto* quando ogni suo punto è interno. Un sottoinsieme C dello spazio normato V si dice *chiuso* quando il suo complementare è aperto. La famiglia degli aperti di V determina la topologia su V.

Anche la nozione di convergenza per successioni può essere scritta utilizzando la norma: una successione di vettori $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al vettore limite $v_\star$ quando ogni palla di centro $v_\star$ contiene definitivamente i punti della successione, ovvero

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant n_\varepsilon, \|v_n - v_\star\| < \varepsilon,$$

ciò equivale anche al limite $\lim_{n\to\infty} \|v_n - v_\star\| = 0$, in tal caso scriveremo anche che $\lim_{n\to\infty} v_n = v_\star$ in V, oppure che $v_n \to v_\star$ in norma per $n \to \infty$.

Una successione di vettori $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice *successione di Cauchy* quando

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \geqslant n_\varepsilon, \|v_n - v_m\| < \varepsilon.$$

Come in ogni spazio metrico, anche negli spazi normati abbiamo che:

Lemma 2.1. *Un sottoinsieme C di uno spazio normato V è chiuso se e solo se C contiene ogni suo punto limite, ovvero per ogni successione $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di punti di C convergente ad un punto $v_\star \in V$ si ha che $v_\star \in C$.*

Lasciamo la dimostrazione del lemma come esercizio.

Osservazione 2.2. La norma di uno spazio normato è sempre una funzione continua, anzi è una funzione Lipschitziana, come si può facilmente dedurre dalla disuguaglianza triangolare rovesciata (1).

Definizione 2.3. Un sottoinsieme C di uno spazio vettoriale si dice *convesso* quando per ogni coppia di punti di C il segmento che li congiunge è tutto contenuto in C, ovvero quando per ogni $u, v \in C$ e per ogni $\theta \in [0,1]$ si ha che

$$u + \theta(v - u) = (1-\theta)u + \theta v \in C.$$

Un sottoinsieme C di uno spazio vettoriale topologico si dice *strettamente convesso* quando per ogni coppia di punti di C tutti i punti del segmento che li congiunge che non siano gli estremi sono punti interni a C, ovvero quando per ogni $u, v \in C$ e per ogni $\theta \in]0,1[$ si ha che $(1-\theta)u + \theta v$ è interno a C.

Proposizione 2.4. *Le palle di uno spazio normato sono convesse.*

Dimostrazione. Sia V uno spazio normato. Sia $B := B(p, r)$ la palla di centro $p \in V$ e raggio $r > 0$. Dati $u, v \in B$ e $\theta \in [0,1]$ poniamo $q := (1-\theta)u + \theta v$. Abbiamo

$$q - p = (1-\theta)(u-p) + \theta(v-p),$$

e applicando la disuguaglianza triangolare otteniamo

$$\|q-p\| \leqslant (1-\theta)\|u-p\| + \theta\|v-p\| < (1-\theta)r + \theta r = r,$$

dunque $q \in B$. □

3. Spazi di Banach

Definizione 3.1. Uno spazio normato si dice *spazio di Banach* quando è uno spazio metrico completo, ovvero quando ogni sua successione di Cauchy è convergente.

Gli spazi vettoriali di dimensione finita $\mathbb{R}^d$, o $\mathbb{C}^d$, dotati della norma euclidea, sono spazi di Banach per ogni $d \in \mathbb{N}$.

Esempio 3.2. Lo spazio $C[0,1]$ dotato della norma del massimo (7) è uno spazio di Banach, e la convergenza in tale spazio normato non è altro che la convergenza uniforme delle funzioni continue definite su $[0,1]$.

Più in generale abbiamo:

Teorema 3.3. *Sia Ω uno spazio topologico. Lo spazio vettoriale $BC(\Omega)$ delle funzioni continue e limitate su Ω a valori reali (o complessi) dotato della* norma uniforme *definita da*

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in\Omega} |f(x)|, \quad \forall f \in BC(\Omega), \tag{8}$$

è uno spazio di Banach.

Dimostrazione. Che (8) definisca una norma si dimostra nello stesso modo in cui si dimostra che la norma del massimo è una norma e lo lasciamo come esercizio.

Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $BC(\Omega)$. Per ogni $x \in \Omega$ la successione $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$, in quanto

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty,$$

per ogni $n, m \in \mathbb{N}$. Siccome $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) è completo ne segue che esiste il limite puntuale

$$f_\star(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

per ogni $x \in \Omega$.

La convergenza puntuale in questo caso è anche uniforme. Infatti, dato $\varepsilon > 0$, sappiamo che esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ (indipendente da x) tale che

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon,$$

per ogni $n, m \geqslant n_\varepsilon$ e per ogni $x \in \Omega$. Passando al limite per $m \to \infty$ otteniamo che

$$|f_n(x) - f_\star(x)| \leqslant \varepsilon,$$

per ogni $n \geqslant n_\varepsilon$ e per ogni $x \in \Omega$; ovvero

$$\sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f_\star(x)| \leqslant \varepsilon,$$

per ogni $n \geqslant n_\varepsilon$. Dunque,

$$0 = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f_\star(x)| = \lim_{n\to\infty} \|f_n - f_\star\|_\infty .$$

Ne segue che f è continua in quanto limite uniforme di funzioni continue e la successione (f_n) converge a $f_\star$ in $BC(\Omega)$. □

Osservazione 3.4. Consideriamo il caso in cui $\Omega = K$ sia uno spazio compatto. Per il teorema di Weierstrass, ogni funzione continua su K è anche limitata e ammette massimo. Quindi in tal caso il teorema 3.3 ci assicura che $C(K)$ con la norma del massimo, che coincide con la norma uniforme, è uno spazio di Banach.

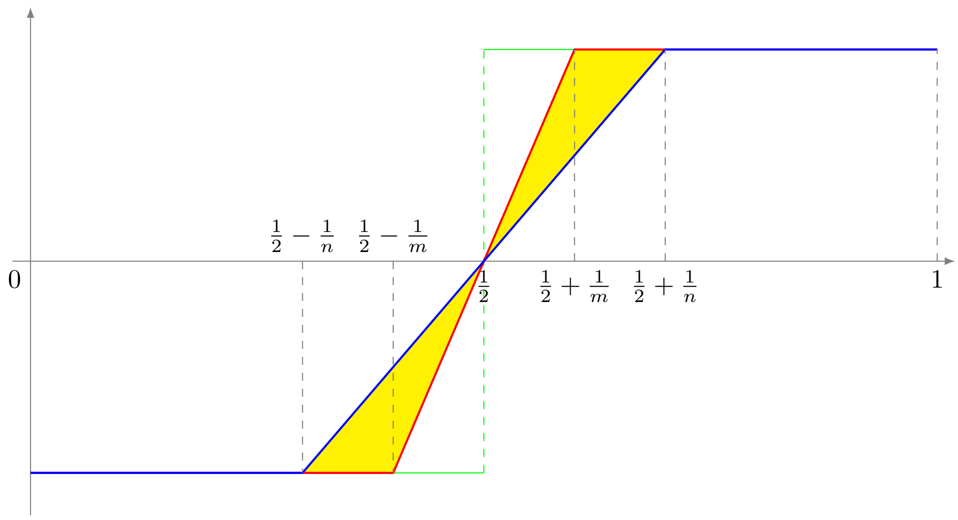
Esempio 3.5. Lo spazio $C[0,1]$ dotato della norma della massa (5) invece non è completo, infatti la successione di funzioni (f_n) definita da

$$f_n(x) := \begin{cases} -1, & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right], \\ n\left(x - \frac{1}{2}\right), & \text{se } x \in \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right], \\ +1, & \text{se } x \in \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1\right], \end{cases}$$

è di Cauchy, infatti

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)| \,\mathrm{d}x = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|,$$

ma il suo limite puntuale $f(x) = \operatorname{sgn}(x - 1/2)$ non appartiene a $C[0,1]$.



Per qualsiasi funzione $f_\star \in C[0,1]$, siccome $|f_n - f_\star| \leqslant 1 + |f_\star|$, applicando il teorema della convergenza dominata di Lebesgue otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \|f_n - f_\star\|_1 &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(x) - f_\star(x)| \,\mathrm{d}x = \\ &= \int_0^1 \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f_\star(x)| \,\mathrm{d}x = \int_0^1 |\operatorname{sgn}(x - 1/2) - f_\star(x)| \,\mathrm{d}x = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} |-1 - f_\star(x)| \,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 |1 - f_\star(x)| \,\mathrm{d}x = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \big(|1 + f_\star(x)| + |1 - f_\star(1 - x)|\big) \,\mathrm{d}x > 0, \end{aligned}$$

dove l'ultimo integrale è sicuramente strettamente positivo in quanto la funzione

$$g(x) := |1 + f_\star(x)| + |1 - f_\star(1-x)|\,,$$

è una funzione continua non negativa e strettamente positiva in un intorno di $\frac{1}{2}$, essendo

$$g(1/2) := |1 + f_\star(1/2)| + |1 - f_\star(1/2)| \geqslant 2.$$

Quindi non si può avere $f_n \to f_\star$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$ per nessuna $f_\star \in C[0,1]$.

Osservazione 3.6. Il confronto tra gli esempi 3.2 e 3.5 ci fa capire come scelte diverse per la norma che si decide di usare su un certo spazio vettoriale possono portare a proprietà topologiche dello spazio completamente diverse.

4. Confronto fra norme di uno stesso spazio

Definizione 4.1. Siano $\|\cdot\|_\flat$ e $\|\cdot\|_\sharp$ due norme sullo stesso spazio vettoriale V. Diciamo che la norma $\|\cdot\|_\sharp$ *domina* la norma $\|\cdot\|_\flat$ quando esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\|v\|_\flat \leqslant C\,\|v\|_\sharp\,, \tag{9}$$

per ogni vettore $v \in V$. Le due norme si dicono *equivalenti* quando ciascuna domina l'altra, ovvero quando esistono due costanti $A, B > 0$ tali che:

$$A\,\|v\|_\flat \leqslant \|v\|_\sharp \leqslant B\,\|v\|_\flat\,, \tag{10}$$

per ogni vettore $v \in V$.

Lemma 4.2. *Se la norma $\|\cdot\|_\sharp$ domina la norma $\|\cdot\|_\flat$ allora ogni palla aperta $B_\flat(p,r)$ definita con la metrica $\flat$ contiene la palla aperta $B_\sharp(p, r/C)$ definita con la metrica $\sharp$, dove C è la costante che compare nella stima* (9) *della definizione 4.1.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dal fatto che se $\|x-p\|_\sharp < r/C$, allora

$$\|x-p\|_\flat \leqslant C\,\|x-p\|_\sharp < r.$$

□

Proposizione 4.3. *Se la norma $\|\cdot\|_\sharp$ domina la norma $\|\cdot\|_\flat$ allora gli aperti nella topologia $\flat$ di $\left(V, \|\cdot\|_\flat\right)$ sono aperti anche nella topologia $\sharp$ di $\left(V, \|\cdot\|_\sharp\right)$.*

Dimostrazione. Sia A un sottoinsieme di V. Per il lemma precedente, se p è un punto interno ad A rispetto alla topologia $\flat$, allora p è un punto interno ad A anche rispetto alla topologia $\sharp$. Dunque se A è aperto rispetto a $\flat$, tutti i suoi punti sono interni nella topologia $\flat$, e quindi sono interni anche rispetto alla topologia $\sharp$ e quindi A è aperto anche rispetto a $\sharp$. □

Proposizione 4.4. *Due norme equivalenti definiscono la stessa topologia.*

Dimostrazione. Basta applicare la proposizione precedente nei due sensi. □

La condizione (10) può anche essere scritta come

$$A \leqslant \frac{\|v\|_\sharp}{\|v\|_\flat} \leqslant B, \tag{11}$$

per ogni vettore $v \in V$ con $v \neq 0$. Le costanti ottimali che determinano l'equivalenza sono date dal valore massimo per A e dal valore minimo per B per i quali (11) rimane valida, ovvero

$$A_{\max} := \inf_{v\neq 0} \frac{\|v\|_\sharp}{\|v\|_\flat}, \quad B_{\min} := \sup_{v\neq 0} \frac{\|v\|_\sharp}{\|v\|_\flat}.$$

Esempio 4.5. Considera le norme (2), (3), (4) definite su $\mathbb{K}^d$ nell'esempio 1.4. Si verifica facilmente che

$$\|v\|_\infty \leqslant \|v\|_1 \leqslant d\,\|v\|_\infty\,,$$

e che

$$\|v\|_\infty^2 \leqslant \|v\|_2^2 \leqslant d\,\|v\|_\infty^2\,,$$

per ogni $v \in \mathbb{K}^d$. Ne segue che le tre norme sono tra loro equivalenti.

Osservazione 4.6. In particolare, per quanto visto nell'esempio 4.5 abbiamo che su $\mathbb{K}^d$ le nozioni di insieme aperto, insieme chiuso, insieme limitato, insieme compatto, coincidono per ciascuna delle tre norme definite nell'esempio 1.4.

5. Esercizi

5.1. **Norme e spazi normati.**

Esercizio 5.1. Dimostra che le norme definite nell'esempio 1.4 godono effettivamente di tutte le proprietà di una norma.

Esercizio 5.2. Indichiamo con (x, y, z) un generico vettore di $\mathbb{R}^3$. Determina quali delle seguenti funzioni definiscono una norma, o una seminorma, o un quasi-norma, su $\mathbb{R}^3$.

$$N_1(x,y,z) := x+y+z; \qquad N_2(x,y,z) := |x+y|+|x-y|+|z|\,;$$

$$N_3(x,y,z) := |x-y|+|x-z|+|y-z|\,; \qquad N_4(x,y,z) := |x|+\sqrt{y^2+z^2};$$

$$N_5(x,y,z) := \min\{|x|\,,|y|\,,|z|\}\,; \qquad N_6(x,y,z) := \arctan\{|x|\,,|y|\,,|z|\}\,;$$

$$N_7(x,y,z) := \sqrt{x^2+y^4+z^6}; \qquad N_8(x,y,z) := \sqrt{x^2+2y^2+3z^2};$$

$$N_9(x,y,z) := \left(\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}+\sqrt{|z|}\right)^2; \qquad N_{10}(x,y,z) := |x+y+z|\,.$$

Esercizio 5.3. Dimostra che le norme definite nell'esempio 1.5 godono effettivamente di tutte le proprietà di una norma.

Esercizio 5.4. Determina quali delle seguenti formule definiscono una norma, o una seminorma, o una quasi-norma, sullo spazio $C^1[0,1]$ delle funzioni derivabili su $[0,1]$ con derivata continua.

$$N_1(f) := \max_{t\in[0,1]} |f(t)|\,; \qquad N_2(f) := \max_{t\in[0,1]} |f'(t)|\,;$$

$$N_3(f) := \max_{t\in[0,1]} |f(t)+f'(t)|\,; \qquad N_4(f) := \max_{t\in[0,1]} \left(|f(t)|+|f'(t)|\right);$$

$$N_5(f) := \max_{t\in[0,1]} |f(t)| + \max_{t\in[0,1]} |f'(t)|\,; \qquad N_6(f) := \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t;$$

$$N_7(f) := \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t; \qquad N_8(f) := \left|\int_0^1 \left(f(t)+f'(t)\right)\mathrm{d}t\right|;$$

$$N_9(f) := |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t; \qquad N_{10}(f) := |f(0)|+|f'(1/2)|+|f(1)|\,.$$

Esercizio 5.5 (Passaggio da struttura complessa a struttura reale). Siccome il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ è un sotto campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$, ogni spazio vettoriale V su $\mathbb{C}$ può anche essere considerato come uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, basta restringere l'operazione di moltiplicazione di un vettore per uno scalare ai soli scalari reali.

(1) Se un insieme di vettori B è una base di V come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ allora dimostra che l'insieme di vettori $\widetilde{B} := B \cup \mathrm{i}B$, dove $\mathrm{i}B$ è l'insieme formato dai vettori di B moltiplicati per l'unità immaginaria, forma una base di V come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

(2) Verifica che se V ha dimensione finita allora $\dim_{\mathbb{R}} V = 2\dim_{\mathbb{C}} V$.
(3) Verifica che ogni norma su V considerato come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ continua ad essere una norma su V considerato come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Esercizio 5.6 (Passaggio da struttura reale a struttura complessa). Sia $(V, \|\cdot\|_{\mathbb{R}})$ uno spazio vettoriale normato reale. Possiamo definire il ***complessificato*** di V come lo spazio vettoriale normato complesso $(V_{\mathbb{C}}, \|\cdot\|_{\mathbb{C}})$ formato da coppie di vettori di V, che indicheremo simbolicamente con $(u, v) =: u + \mathrm{i}v$,

$$V_{\mathbb{C}} := \{u + \mathrm{i}v \colon u, v \in V\},$$

dove la struttura lineare è definita dall'operazione di somma

$$(u_1 + \mathrm{i}v_1) + (u_2 + \mathrm{i}v_2) := (u_1 + u_2) + \mathrm{i}(v_1 + v_2), \quad \forall\, u_1 + \mathrm{i}v_1, u_2 + \mathrm{i}v_2 \in V_{\mathbb{C}}, \tag{12}$$

e di prodotto per scalare complesso

$$(\lambda + \mathrm{i}\mu)(u + \mathrm{i}v) := (\lambda u - \mu v) + \mathrm{i}(\mu u + \lambda v), \quad \forall\, u + \mathrm{i}v \in V_{\mathbb{C}},\ \lambda + \mathrm{i}\mu \in \mathbb{C}, \tag{13}$$

e la norma è definita come

$$\|u + \mathrm{i}v\|_{\mathbb{C}} := \sup_{t \in [-\pi, \pi]} \|\cos(t)u - \sin(t)v\|_{\mathbb{R}}, \quad \forall\, u + \mathrm{i}v \in V_{\mathbb{C}}. \tag{14}$$

(1) Verifica che le operazioni (12) e (13) definiscono una struttura di spazio vettoriale complesso su $V_{\mathbb{C}}$.
(2) Verifica che (14) definisce effettivamente una norma su $V_{\mathbb{C}}$.
(3) Verifica che la norma su $V_{\mathbb{C}}$ gode anche delle seguenti proprietà:

$$\|u + \mathrm{i}0\|_{\mathbb{C}} = \|u\|_{\mathbb{R}}, \quad \|u + \mathrm{i}v\|_{\mathbb{C}} = \|u - \mathrm{i}v\|_{\mathbb{C}}, \quad \forall\, u, v \in V.$$

Esercizio 5.7. Dimostra che la norma definita in (8) nell'enunciato del teorema 3.3 è effettivamente una norma.

Esercizio 5.8 (Norma sullo spazio prodotto). Siano $(V, \|\cdot\|_V)$ e $(W, \|\cdot\|_W)$ due spazi vettoriali normati sul campo K. Definisci nel modo più naturale possibile una struttura di spazio normato per lo spazio prodotto $V \times W$.

5.2. **Proprietà metriche e topologiche.**

Esercizio 5.9. Sia d una metrica sullo spazio vettoriale V tale che

$$d(\lambda u, \lambda v) = |\lambda|\, d(u, v), \qquad d(u + w, v + w) = d(u, v),$$

per ogni $u, v, w \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Dimostra che d è la distanza indotta da una norma su V.

Esercizio 5.10. Dimostra il lemma 2.1. (Si tratta di una dimostrazione che dovresti aver già visto nell'insegnamento in cui hai studiato la topologia degli spazi metrici.)

Esercizio 5.11. Disegna nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ le palle $B(0, 1)$ relative alle norme descritte nell'esempio (1.4) (caso $d = 2$) e determina quali sono strettamente convesse.

Esercizio 5.12 (Funzionale di Minkowski). Sia C un sottoinsieme di uno spazio normato reale $(V, \|\cdot\|)$ con le seguenti proprietà:

(1) C è convesso;
(2) C è simmetrico rispetto all'origine, ovvero se $v \in C$ allora $-v \in C$;
(3) C contiene vettori in tutte le direzioni (rispetto all'origine), ma non contiene tutti i vettori di una certa direzione, ovvero per ogni $v \in V$, con $v \neq 0$, esistono $\lambda, \mu > 0$ tale che $\lambda v \in C$ e $\mu v \notin C$..

Definiamo la funzione $\mathcal{N}_C \colon V \to \mathbb{R}$ ponendo

$$\mathcal{N}_C(v) := \inf \left\{ t > 0 \colon \frac{1}{t} v \in C \right\}.$$

- Dimostra che $\mathcal{N}_C$ è una norma su V.
- Dimostra che la palla unitaria costruita con la norma $\mathcal{N}_C$ è contenuta nella chiusura di C e contiene tutti i punti interni di C.

Esercizio 5.13. Sia $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in uno spazio normato tale che

$$\|v_{n+1} - v_n\| \leqslant 2^{-n}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dimostra che si tratta di una successione di Cauchy.

5.3. **Spazi di Banach.**

Esercizio 5.14 (Serie in spazi di Banach). Sia $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in uno spazio Banach tale che la serie delle norme è convergente, $\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\| < +\infty$. Dimostra che la successione delle somme $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ delle somme parziali vettoriali,

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} v_k,$$

è una successione convergente. Il valore del limite delle somme parziali definisce la somma della serie vettoriale

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n := \lim_{n\to\infty} s_n.$$

5.4. **Confronto tra norme di una stesso spazio.**

Esercizio 5.15. Verifica che la nozione di equivalenza tra norme della definizione 4.1 è effettivamente una relazione di equivalenza, ovvero che si tratta di una relazione riflessiva, simmetrica, transitiva.

Esercizio 5.16. Determina tutte le costanti ottimali che stabiliscono le varie equivalenze tra ogni coppia di norme tra le tre norme su $\mathbb{K}^d$ considerate nell'esempio 4.5.

Esercizio 5.17. Dimostra che le tre norme (5), (6) e (7) definite su $C[0,1]$ nell'esempio 1.5 non sono equivalenti tra loro. Dimostra che la norma (7) domina le altre due.

Esercizio 5.18 (Viceversa della proposizione 4.4). Dimostra che se due norme su uno stesso spazio vettoriale inducono la stessa topologia allora sono equivalenti.