

**ANALISI 3 - L06:**  
**SPAZI  $L^p$**

Come nella precedente lezione consideriamo un generico spazio di misura  $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ .

1. EQUIVALENZA DI FUNZIONI CHE COINCIDONO QUASI OVUNQUE

Abbiamo visto che quando  $1 \leq p < \infty$  la quantità

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu_x \right)^{1/p},$$

definisce una semi-norma sullo spazio vettoriale  $\mathcal{L}^p(\Omega)$  formato dalle funzioni misurabili  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  per le quali l'integrale  $\int_{\Omega} |f|^p d\mu$  converge a un valore finito. Anche nel caso  $p = \infty$  la quantità

$$\|f\|_{\infty} = \|f\|_{L^{\infty}(\Omega)} = \text{ess sup}_{x \in \Omega} |f(x)|,$$

definisce una semi-norma sullo spazio vettoriale  $\mathcal{L}^{\infty}(\Omega)$  formato dalle funzioni misurabili  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  che sono essenzialmente limitate.

Quello che manca a  $\|\cdot\|_p$  per essere una norma è il fatto che  $\|f\|_p = 0$  non implica necessariamente che  $f$  sia la funzione nulla. Ad esempio, se  $E$  è un sottoinsieme non vuoto di  $\Omega$  con misura nulla,  $\mu(E) = 0$ , allora la funzione caratteristica  $\chi_E$  dell'insieme  $E$  non è identicamente nulla, ma ha norma nulla  $\|\chi_E\|_p = \mu(E)^{1/p} = 0$ .

**Lemma 1.1.** *Sia  $1 \leq p \leq \infty$ . Data  $f \in \mathcal{L}^p$ , se  $\|f\|_p = 0$  allora  $f(x) = 0$  quasi ovunque.*

*Dimostrazione.* Dobbiamo far vedere che  $\|f\|_p = 0$  implica che l'insieme di sopralivello  $E_f(0) := \{x \in \Omega: |f| > 0\}$  è un insieme di misura nulla. Quando  $p = \infty$  ciò segue immediatamente dalla definizione di norma  $L^{\infty}$ . Quando  $p < \infty$ , per la disuguaglianza di Chebyshev abbiamo

$$\mu(E_f(t)) \leq \left( \frac{1}{t} \|f\|_p \right)^p = 0,$$

per ogni insieme di sopralivello  $E_f(t) := \{x \in \Omega: |f| > t\}$  con  $t > 0$ . Siccome  $E_f(0) = \cup_{n \in \mathbb{N}} E_f(1/n)$ , anch'esso ha misura nulla essendo unione numerabile di insiemi di misura nulla.  $\square$

Ogni quantità costruita valutando le funzioni solo attraverso la misura dei suoi sopralivelli (come accade per le norme  $L^p$ ), non riesce a distinguere quello che succede ad una funzione se viene modificata su insiemi di misura nulla. Due funzioni che coincidono quasi ovunque hanno sopralivelli con la stessa misura, e per quanto riguarda la misura esse sono indistinguibili e ha senso considerarle equivalenti.

**Definizione 1.2.** Date due funzioni misurabili  $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , diciamo che  $f \stackrel{\mu}{\equiv} g$  quando esse coincidono quasi ovunque su  $\Omega$  rispetto alla misura  $\mu$ , ovvero quando esiste un insieme  $E$  di misura nulla,  $\mu(E) = 0$ , tale che  $f(x) = g(x)$  per ogni  $x \in \Omega \setminus E$ .

**Proposizione 1.3.** *La relazione  $\stackrel{\mu}{\equiv}$  è una relazione di equivalenza compatibile con la struttura lineare dello spazio vettoriale delle funzioni misurabili, nel senso che se  $f_1 \stackrel{\mu}{\equiv} f_2$  e  $g_1 \stackrel{\mu}{\equiv} g_2$  allora  $f_1 + g_1 \stackrel{\mu}{\equiv} f_2 + g_2$  e  $\lambda f_1 \stackrel{\mu}{\equiv} \lambda f_2$ , per ogni  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Inoltre*

*Date:* ultimo aggiornamento, 15 ottobre 2020.

se  $f \stackrel{\mu}{\equiv} g$  allora, per ogni  $p \in ]0, \infty]$ , abbiamo che  $f \in \mathcal{L}^p$  se e solo se  $g \in \mathcal{L}^p$ , ed inoltre  $\|f\|_p = \|g\|_p$ .

*Dimostrazione.* La dimostrazione non è difficile. Alcune proprietà sono immediate, altre seguono dal fatto che l'unione di due insiemi di misura nulla è ancora un insieme di misura nulla. Per quanto riguarda la norma  $L^p$  con  $p < \infty$ , se  $f(x) = g(x)$  per ogni  $x \notin E$ , dove  $E$  è un insieme di misura nulla, abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f|^p \, d\mu &= \int_{\Omega \setminus E} |f|^p \, d\mu + \int_E |f|^p \, d\mu = \int_{\Omega \setminus E} |f|^p \, d\mu = \\ &= \int_{\Omega \setminus E} |g|^p \, d\mu = \int_{\Omega \setminus E} |g|^p \, d\mu + \int_E |g|^p \, d\mu = \int_{\Omega} |g|^p \, d\mu. \end{aligned}$$

Lasciamo il resto dei dettagli come esercizio per il lettore.  $\square$

Per rendere  $\|\cdot\|_p$  una norma a tutti gli effetti possiamo identificare tra loro funzioni che coincidono quasi ovunque, passando al quoziente dello spazio  $\mathcal{L}^p$  rispetto alla relazione di equivalenza  $\stackrel{\mu}{\equiv}$ . Indichiamo con  $[f]_{\stackrel{\mu}{\equiv}}$  la classe delle funzioni equivalenti a  $f$  rispetto alla relazione  $\stackrel{\mu}{\equiv}$ ,

$$[f]_{\stackrel{\mu}{\equiv}} = \left\{ g: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ misurabile: } f \stackrel{\mu}{\equiv} g \right\}.$$

**Definizione 1.4.** Sia  $p \in [1, \infty]$ . Definiamo lo spazio  $L^p$  come il quoziente di  $\mathcal{L}^p$  rispetto alla relazione  $\stackrel{\mu}{\equiv}$ ,

$$L^p(\Omega) = \frac{\mathcal{L}^p(\Omega)}{\stackrel{\mu}{\equiv}} = \left\{ [f]_{\stackrel{\mu}{\equiv}} : f \in \mathcal{L}^p(\Omega) \right\}.$$

Gli elementi dello spazio  $L^p$  sono dunque classi di equivalenza di funzioni  $\mathcal{L}^p$  che coincidono quasi ovunque. Su tale quoziente possiamo definire la norma  $L^p$  ponendo

$$\left\| [f]_{\stackrel{\mu}{\equiv}} \right\|_p = \|f\|_p,$$

tale definizione non dipende dalla scelta della funzione  $f$  come rappresentante della classe di equivalenza.

Osserviamo che l'elemento nullo in  $L^p$  è la classe  $[0]_{\stackrel{\mu}{\equiv}}$  composta dalle funzioni che si annullano quasi ovunque, e dunque ora abbiamo finalmente che

$$\left\| [f]_{\stackrel{\mu}{\equiv}} \right\|_p = 0 \iff [f]_{\stackrel{\mu}{\equiv}} = [0]_{\stackrel{\mu}{\equiv}}.$$

Come conseguenza di quanto visto finora abbiamo che

**Proposizione 1.5.** Per ogni  $p \in [1, +\infty]$  lo spazio  $L^p(\Omega)$  è uno spazio normato.

*Osservazione 1.6.* Nel caso in cui rispetto alla misura  $\mu$  gli insiemi formati da un punto solo hanno misura nulla,  $\mu(\{x\}) = 0$ , come avviene ad esempio per la misura di Lebesgue, allora fissato un qualsiasi punto  $x_{\star} \in \Omega$ , ogni classe  $[f]_{\stackrel{\mu}{\equiv}}$  contiene funzioni che nel punto  $x_{\star}$  possono assumere qualsiasi valore, in quanto modificando una funzione in un punto otteniamo sempre un'altra funzione equivalente. Questo significa che considerando la classe di equivalenza  $[f]_{\stackrel{\mu}{\equiv}}$  si perde il concetto di valore puntuale della funzione  $f$ . Non ha più senso parlare del valore di  $[f]_{\stackrel{\mu}{\equiv}}$  nel punto  $x_{\star}$ . Nonostante ciò, quando parleremo di funzioni  $L^p$ , per semplificare la scrittura continueremo a scrivere  $f$  o  $f(x)$  invece di scrivere  $[f]_{\stackrel{\mu}{\equiv}}$ , o  $[f(x)]_{\stackrel{\mu}{\equiv}}$ . Dovremo cercare di ricordarci che, mentre quantità del tipo  $\int_{\Omega} G(f(x)) \, d\mu_x$ , o  $\mu(E_f(t))$ , hanno un valore ben definito e indipendente dalla scelta del rappresentante della classe, il valore puntuale  $f(x)$  in un punto specifico  $x$  di  $\Omega$  non è più ben definito.

Pertanto, d'ora in poi, nel contesto degli spazi  $L^p$  quando scriveremo che  $f = g$ , sottointenderemo che  $f \stackrel{\mu}{=} g$ , ovvero  $[f] \stackrel{\mu}{=} [g]$ . In particolare scrivendo che  $f = 0$  in  $L^p$  intendiamo dire  $f \stackrel{\mu}{=} 0$ ; in questo modo, per il lemma 1.1, avremo che  $\|f\|_p = 0$  implica  $f = 0$  in  $L^p$ .

## 2. COMPLETEZZA DEGLI SPAZI $L^p$

Una proprietà importante che rendono gli spazi  $L^p$  molto utili per le applicazioni è il fatto di essere completi.

**Teorema 2.1.** *Per ogni  $p \in [1, \infty]$  lo spazio  $L^p(\Omega)$  è uno spazio di Banach.*

Prepariamo il terreno per la dimostrazione di questo teorema tramite alcuni lemmi.

Il primo lemma ci dice che per far vedere che una successione di Cauchy converge è sufficiente dimostrare che una sua sottosuccessione converge.

**Lemma 2.2.** *Sia  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di Cauchy in uno spazio metrico  $(M, \text{dist}(\cdot, \cdot))$ ; se essa possiede una sottosuccessione  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  convergente ad un punto  $x_\star \in M$  allora tutta la successione  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge ad  $x_\star$*

*Dimostrazione.* Sia  $\varepsilon > 0$ . Siccome  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è di Cauchy allora

$$\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n(\varepsilon) : \text{dist}(x_n, x_m) < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Siccome  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  converge a  $x_\star$  allora

$$\exists k(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k \geq k(\varepsilon) : \text{dist}(x_{n_k}, x_\star) < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Inoltre  $n_k \rightarrow \infty$  per  $k \rightarrow \infty$  e dunque

$$\exists \tilde{k}(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k \geq \tilde{k}(\varepsilon) : n_k \geq n(\varepsilon).$$

Quando  $n \geq n(\varepsilon)$ , scegliamo  $k \geq \max\{k(\varepsilon), \tilde{k}(\varepsilon)\}$ , e per la disuguaglianza triangolare, otteniamo

$$\text{dist}(x_n, x_\star) \leq \text{dist}(x_n, x_{n_k}) + \text{dist}(x_{n_k}, x_\star) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Questo prova che  $(x_n)$  converge a  $x_\star$ . □

**Lemma 2.3.** *Data una successione di Cauchy  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in uno spazio metrico  $(M, \text{dist}(\cdot, \cdot))$ , è possibile estrarre da essa una sottosuccessione  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  tale che la serie numerica*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{dist}(x_{n_{k+1}}, x_{n_k})$$

*risulta essere convergente.*

*Dimostrazione.* Siccome  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è di Cauchy allora

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n(\varepsilon) : \text{dist}(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Utilizziamo questa condizione con valori di  $\varepsilon = 2^{-k}$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . Scegliamo in modo induttivo

$$n_1 := n\left(\frac{1}{2}\right), n_2 := \max\left\{n_1 + 1, n\left(\frac{1}{2^2}\right)\right\}, \dots, n_{k+1} := \max\left\{n_k + 1, n\left(\frac{1}{2^k}\right)\right\}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

La successione  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  risulta essere una successione di indici strettamente crescente, e siccome  $n_{k+1} > n_k \geq n(2^{-k})$  abbiamo che  $\text{dist}(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < 2^{-k}$  per ogni  $k$ . Dunque,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{dist}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1.$$

□

Richiamiamo inoltre due importanti risultati di convergenza per gli integrali: il teorema della convergenza monotona di Beppo Levi e il teorema della convergenza dominata di Lebesgue.

**Teorema 2.4** (Convergenza monotona). *Sia  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione non decrescente di funzioni misurabili  $g_n: \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ , quindi con  $0 \leq g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$  per quasi ogni  $x \in \Omega$  e ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Sia  $g: \Omega \rightarrow [0, +\infty]$  il limite puntuale di tale successione*

$$g(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n(x), \quad \text{per quasi ogni } x \in \Omega.$$

Allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n \, d\mu = \int_{\Omega} g \, d\mu.$$

**Teorema 2.5** (Convergenza dominata). *Sia  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni misurabili  $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  tale che esiste il limite puntuale*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad \text{per quasi ogni } x \in \Omega.$$

*Supponiamo inoltre che esista una funzione integrabile  $g \in L^1(\Omega)$  che domina la successione  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , nel senso che  $|f_n(x)| \leq g(x)$  per quasi ogni  $x \in \Omega$ . Allora*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu = \int_{\Omega} f \, d\mu.$$

La dimostrazione di questi importanti risultati di convergenza è stata dimostrata, nel caso della misura di Lebesgue, nell'insegnamento di Analisi Matematica 2 del secondo anno.

*Dimostrazione del teorema 2.1 nel caso  $1 \leq p < +\infty$ .* Sia  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di Cauchy in  $L^p$ . Per il lemma 2.3 esisterà una sottosuccessione  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  tale che la serie numerica  $S := \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p$  converge. Con questa sottosuccessione andiamo a costruire una successione monotona ausiliaria  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ponendo

$$g_k(x) := \sum_{j=1}^k |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)|, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Si tratta di una successione non decrescente di funzioni non negative,  $0 \leq g_k \leq g_{k+1}$ ; inoltre sono tutte funzioni  $L^p$  e, per la disuguaglianza triangolare e per come è stata scelta la sottosuccessione  $(f_{n_k})$ , abbiamo

$$\|g_k\|_p \leq \sum_{j=1}^k \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p \leq S.$$

Le funzioni  $g_k$  non sono altro che le somme parziali di una serie di funzioni il cui limite puntuale è dato dalla funzione che si ottiene come somma della serie,

$$(1) \quad g(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = \sum_{j=1}^{\infty} |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)|.$$

Tale limite è una funzione che assume valori in  $[0, +\infty]$ , assume valori finiti nei punti in cui la serie converge, e assume valore  $+\infty$  nei punti in cui la serie diverge. (Il fatto che una successione converga *in norma*  $L^p$  non implica necessariamente che essa converga *puntualmente*.) Per la monotonia di  $(g_k)$  abbiamo anche che  $0 \leq g_k^p \leq g_{k+1}^p$ , per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . Per la continuità della funzione potenza  $t \mapsto t^p$ , vale il limite puntuale  $g^p = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k^p$ . Applicando il teorema della convergenza monotona di Beppo Levi otteniamo che

$$\int g^p \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int g_k^p \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k\|_p^p \leq S^p.$$

Deduciamo in particolare che  $g(x)$  è finita quasi ovunque, altrimenti se  $g(x)$  valesse  $+\infty$  su un insieme di misura positiva l'integrale  $\int g^p \, d\mu$  dovrebbe divergere. Dunque la serie in (1) converge per quasi ogni  $x \in \Omega$ ; ciò implica la convergenza puntuale quasi ovunque della serie senza i valori assoluti, pertanto possiamo definire (quasi ovunque) la funzione

$$\begin{aligned} f_\star(x) &:= f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} (f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)) = \\ &= f_{n_1}(x) + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k (f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)) = \\ &= f_{n_1}(x) + \lim_{k \rightarrow \infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_1}(x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_{k+1}}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x). \end{aligned}$$

Otteniamo così che la sottosuccessione  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  converge puntualmente quasi ovunque alla funzione  $f_\star$ . La funzione  $f_\star$  è una funzione di  $L^p$  in quanto per la disuguaglianza triangolare abbiamo

$$\|f_\star\|_p \leq \|f_{n_1}\|_p + \sum_{j=1}^{\infty} \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p = \|f_{n_1}\|_p + S.$$

Vogliamo dimostrare che la sottosuccessione  $(f_{n_k})$  converge in  $L^p$  alla funzione  $f_\star$ . (Il fatto una successione di funzioni in  $L^p$  converga *puntualmente* ad una funzione di  $L^p$  non implica necessariamente che essa converga *in norma*.) La convergenza puntuale quasi ovunque implica che per quasi ogni  $x$  vale il limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f_{n_k}(x) - f_\star(x)|^p = 0.$$

Siccome  $f_{n_k} = f_{n_1} + \sum_{j=1}^{k-1} (f_{n_{j+1}} - f_{n_j})$  abbiamo che  $f_\star - f_{n_k} = \sum_{j=k}^{\infty} (f_{n_{j+1}} - f_{n_j})$ . Dunque otteniamo grazie a (1) il controllo dominato

$$|f_{n_k}(x) - f_\star(x)|^p \leq \left( \sum_{j=k}^{\infty} |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)| \right)^p \leq g(x)^p,$$

con la funzione  $g^p \in L^1$ , in quanto sappiamo che  $g \in L^p$ . Siamo allora nelle condizioni per poter applicare il teorema della convergenza dominata di Lebesgue alla successione  $|f_{n_k} - f_\star|^p$ ; otteniamo così

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_{n_k} - f_\star|^p \, d\mu = 0,$$

ovvero  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{n_k} - f_\star\|_p = 0$ . Dunque la sottosuccessione  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  converge alla funzione  $f_\star$  in norma  $L^p$ . Per il lemma 2.2 ciò è sufficiente per concludere che tutta la successione di Cauchy  $(f_n)$  converge a  $f_\star$  in  $L^p$ .  $\square$

Osserviamo che nel mezzo della dimostrazione abbiamo ottenuto un risultato interessante: ovvero che la sottosuccessione  $(f_{n_k})$  converge puntualmente quasi ovunque alla funzione limite  $f_\star$ . Formalizziamo questa cosa nella seguente proposizione.

**Proposizione 2.6.** *Sia  $1 \leq p < \infty$ . Se la successione di funzioni  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $L^p$  converge in norma  $L^p$  alla funzione  $f_*$  allora esiste una sottosuccessione  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  che converge a  $f_*$  puntualmente quasi ovunque.*

Completiamo la dimostrazione del teorema di completezza considerando il caso  $p = \infty$ , che segue un percorso diverso da quello visto per il caso  $p < \infty$ .

*Dimostrazione del teorema 2.1 nel caso  $p = \infty$ .* Sia  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di Cauchy in  $L^\infty$ ; ciò significa che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un  $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $n, m \geq n(\varepsilon)$  si ha  $\|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$ , ovvero per ogni  $n, m \geq n(\varepsilon)$  esiste un insieme  $E_{n,m}$  di misura nulla tale che per ogni  $x \in \Omega \setminus E_{n,m}$  si ha

$$(2) \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

Se uniamo tutti questi insiemi di misura nulla, che sono una quantità numerabile, otteniamo ancora un insieme di misura nulla  $E = \cup_{n,m \geq n(\varepsilon)} E_{n,m}$ . Per ogni  $x \in \Omega \setminus E$  vale la condizione (2) quando  $n, m \geq n(\varepsilon)$ ; questo significa che la successione numerica  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  è una successione di Cauchy in  $\mathbb{C}$ , che è completo. Dunque esiste il limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  per ogni  $x \in \Omega \setminus E$ , e ricordiamo che  $\mu(E) = 0$ . Questo ci permette di definire puntualmente quasi ovunque la funzione

$$f_*(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Passando al limite in (2) per  $m \rightarrow \infty$  troviamo che per ogni  $x \in \Omega \setminus E$  e ogni  $n \geq n(\varepsilon)$  vale

$$|f_n(x) - f_*(x)| \leq \varepsilon,$$

e dunque  $\|f_n - f_*\|_\infty \leq \varepsilon$  per ogni  $n \geq n(\varepsilon)$ . Di conseguenza abbiamo che  $f_* \in L^\infty$  in quanto  $f_* = f_n - (f_n - f_*)$  è la differenza di due funzioni  $L^\infty$ , ed inoltre  $f_n \rightarrow f_*$  in norma  $L^\infty$ .  $\square$

### 3. DUALITÀ IN $L^p$

La disuguaglianza di Hölder che abbiamo dimostrato nella precedente lezione implica che quando  $(p, q)$  è una coppia di esponenti coniugati,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , vale la stima

$$(3) \quad \left| \int fg \, d\mu \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q, \quad \forall f \in L^p, g \in L^q.$$

Questo risultato ci permette di stabilire una sorta di dualità tra gli spazi coniugati  $L^p$  e  $L^q$ . Data una funzione  $g \in L^q$  consideriamo il funzionale lineare  $\phi_g: L^p \rightarrow \mathbb{C}$  definito da

$$(4) \quad \phi_g(f) := \int fg \, d\mu, \quad \forall f \in L^p.$$

La stima (3) ci assicura che  $\phi_g$  è continuo e dunque che  $\phi_g$  appartiene allo spazio duale di  $L^p$ , abbiamo infatti che

$$(5) \quad \|\phi_g\|_{(L^p)'} := \sup_{\substack{f \in L^p \\ f \neq 0}} \frac{|\phi_g(f)|}{\|f\|_p} = \sup_{\substack{f \in L^p \\ f \neq 0}} \frac{|\int fg \, d\mu|}{\|f\|_p} \leq \|g\|_q.$$

Inoltre, se scegliamo  $f_* := |g|^{q-2} \bar{g}$ , abbiamo  $|f_*| = |g|^{q-1}$ , e siccome per esponenti coniugati vale  $(q-1)p = q$  ricaviamo

$$\|f_*\|_p = \left\| |g|^{q-1} \right\|_p = \|g\|_q^{q-1}.$$

Inoltre

$$\phi_g(f_*) = \int |g|^{q-2} \bar{g} g \, d\mu = \int |g|^q \, d\mu = \|g\|_q^q.$$

Questo ci permette di stimare dal basso la norma operatoriale di  $\phi_g$ :

$$(6) \quad \|\phi_g\|_{(L^p)'} \geq \frac{|\phi_g(f_\star)|}{\|f_\star\|_p} = \frac{\|g\|_q^q}{\|g\|_q^{q-1}} = \|g\|_q.$$

Le due stime (5) e (6) implicano che

$$\|\phi_g\|_{(L^p)'} = \|g\|_q$$

L'applicazione lineare  $\phi: L^q \rightarrow (L^p)'$  che alla funzione  $g$  associa il funzionale lineare continuo  $\phi_g$  è dunque una applicazione lineare continua; è anche iniettiva in quanto preserva le distanze. Essa permette di immergere lo spazio  $L^q$  nel duale di  $L^p$  quando  $p$  e  $q$  sono esponenti coniugati. Si può dimostrare che per  $1 \leq p < \infty$  l'applicazione  $\phi$  è anche suriettiva, ovvero che tutti i funzionali lineari e continui su  $L^p$  sono della forma (4) per una funzione in  $L^q$ . Questo ci permette di realizzare l'identificazione  $(L^p)' = L^q$  tramite la dualità  $(f, g) \mapsto \int fg \, d\mu$ . In particolare abbiamo  $(L^1)' = L^\infty$  e  $(L^2)' = L^2$ . (Ma attenzione, non vale per  $(L^\infty)'$  che non coincide con  $L^1$ ). Tale risultato va sotto il nome di teorema di rappresentazione di Riesz per il duale di  $L^p$  e la sua dimostrazione richiede sofisticati strumenti di teoria della misura che esulano dagli scopi di questo corso. Noi ci limitiamo a dimostrare invece il seguente risultato di dualità per le norme  $L^p$ .

**Proposizione 3.1.** *Siano  $p, q \in [1, +\infty]$  esponenti coniugati,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Allora per ogni  $f \in L^p$  abbiamo che*

$$\|f\|_p = \sup_{\substack{g \in L^q \\ g \neq 0}} \frac{|\int fg \, d\mu|}{\|g\|_q}.$$

La dimostrazione si basa sulla disuguaglianza di Hölder e si muove lungo una linea analoga a quella seguita per il calcolo della norma di  $\phi_g$ .

*Dimostrazione.* Per (3) abbiamo che

$$\sup_{\substack{g \in L^q \\ g \neq 0}} \frac{|\int fg \, d\mu|}{\|g\|_q} \leq \|f\|_p.$$

Scegliendo  $g_\star = |f|^{p-2} \bar{f}$  abbiamo  $\|g_\star\|_q = \|f\|_p^{p-1}$  e  $\int fg_\star \, d\mu = \|f\|_p^p$ , e dunque

$$\sup_{\substack{g \in L^q \\ g \neq 0}} \frac{|\int fg \, d\mu|}{\|g\|_q} \geq \frac{|\int fg_\star \, d\mu|}{\|g_\star\|_q} = \frac{\|f\|_p^p}{\|f\|_p^{p-1}} = \|f\|_p.$$

□

#### 4. DIVERSE NOZIONI DI CONVERGENZA PER SUCCESSIONI DI FUNZIONI

Nella dimostrazione del teorema di completezza, teorema 2.1, abbiamo incontrato due concetti distinti di convergenza per successioni di funzioni: la convergenza puntuale quasi ovunque, e la convergenza in norma  $L^p$  e abbiamo accennato al fatto che nessuno dei due concetti implica l'altro. Vediamo di chiarire questa cosa con alcuni esempi allargando il discorso anche ad ulteriori concetti di convergenza che possiamo definire per funzioni  $L^p$ .

**Definizione 4.1.** Sia  $p \in [1, +\infty]$  e sia  $p'$  l'esponente coniugato di  $p$ ; Sia  $f_\star$  una funzione misurabile su  $\Omega$ . Sia  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni misurabili su  $\Omega$ . Diciamo che:

- $(f_n)$  converge *puntualmente quasi ovunque* a  $f_\star$  quando vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f_\star(x), \quad \text{per quasi ogni } x \in \Omega;$$

- $(f_n)$  converge in norma  $L^p$  a  $f_*$  quando  $f_*, f_n \in L^p$  e vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_*\|_p = 0;$$

- $(f_n)$  converge debolmente in  $L^p$  a  $f_*$  quando  $f_*, f_n \in L^p$  e vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n g \, d\mu = \int f_* g \, d\mu, \quad \text{per ogni } g \in L^{p'};$$

- $(f_n)$  converge in misura a  $f_*$  quando per ogni  $t > 0$  vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in \Omega: |f_n(x) - f_*(x)| > t\}) = 0.$$

La convergenza in norma  $L^p$  implica la convergenza debole in  $L^p$ . Infatti per la disuguaglianza di Hölder abbiamo

$$\left| \int f_n g \, d\mu - \int f_* g \, d\mu \right| \leq \int |f_n - f_*| \cdot |g| \, d\mu \leq \|f_n - f_*\|_p \|g\|_{p'},$$

quando  $f_n$  converge in norma la quantità destra tende a zero e dunque anche la quantità a sinistra, per ogni  $g \in L^{p'}$ .

Non vale il viceversa.

**Esempio 4.2.** Consideriamo la successione  $f_n(x) := \chi_{[n, n+1[}(x)$  di funzioni caratteristiche degli intervalli  $[n, n+1[$  definite per  $x \in \mathbb{R}$ . Sia  $1 < p < \infty$ , data una qualsiasi funzione  $g \in L^{p'}(\mathbb{R})$ , applicando Hölder abbiamo

$$\left| \int f_n(x) g(x) \, dx \right| \leq \int_n^{n+1} |g(x)| \, dx \leq \left( \int_n^{n+1} |g|^{p'} \, dx \right)^{1/p'} \leq \left( \int_n^\infty |g|^{p'} \, dx \right)^{1/p'}.$$

L'ultimo integrale tende a 0 per  $n \rightarrow \infty$  in quanto  $|g|^{p'}$  ha integrale convergente su  $\mathbb{R}$  e dunque  $f_n$  tende a 0 debolmente in  $L^p(\mathbb{R})$ .

Invece,  $\|f_n\|_{L^p(\mathbb{R})} = 1$  per ogni  $n$  e quindi  $(f_n)$  non converge a 0 in norma  $L^p$ .

Osserviamo che la successione  $f_n(x)$  converge puntualmente a 0 per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Quest'esempio mostra anche che la convergenza puntuale non implica necessariamente la convergenza in norma.

Non si ha convergenza in misura, in quanto per  $0 < t < 1$  si ha

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}: |f_n(x)| > t\}) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vediamo un esempio di una successione che converge in norma ma non converge puntualmente quasi ovunque.

**Esempio 4.3.** Ogni numero naturale  $n \in \mathbb{N}$  può essere decomposto in modo unico nella forma

$$n = 2^k + j,$$

dove  $j$  e  $k$  sono due interi tali che con  $0 \leq j < 2^k$  e  $k \geq 0$ . Ad esempio, se  $n = 2020$ , abbiamo

$$1024 \leq 2020 < 2048 \implies 2020 = 1024 + 996 = 2^{10} + 996 \implies k = 10, j = 996.$$

Consideriamo la successione di funzioni  $(f_n)$  definite sull'intervallo  $[0, 1[$  da

$$f_n(x) := \chi_{[j2^{-k}, (j+1)2^{-k}[}(x), \quad \text{dove } n = 2^k + j \text{ con } 0 \leq j < 2^k.$$

Si tratta della funzione caratteristica dell'intervallo  $[j2^{-k}, (j+1)2^{-k}[$ , che è un intervallo di lunghezza  $2^{-k}$ . Osserviamo inoltre che al variare di  $j$  tra 0 e  $2^k - 1$  tali intervalli formano una partizione dell'intervallo  $[0, 1[$ .

Abbiamo  $\|f_n\|_p = 2^{-k/p}$ , e siccome  $k \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$  abbiamo che  $f_n \rightarrow 0$  in norma  $L^p$  per ogni  $p < \infty$ .

Invece si ha che  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  non esiste per nessun  $x \in [0, 1[$ , infatti per ogni  $k \geq 1$  esiste sempre un indice  $j_*$  con  $0 \leq j_* < 2^k$  per il quale si ha che  $f_{2^k + j_*}(x) = 1$ ,



mentre per tutti gli altri indici  $j \neq j_*$  con  $0 \leq j < 2^k$  si ha che  $f_{2^k+j}(x) = 0$ , e dunque la successione  $f_n(x)$  al variare di  $n$  assume infinite volte il valore 1 e infinite volte il valore 0 senza mai convergere ad uno dei due.

Tale successione converge anche debolmente in  $L^p$  essendo convergente in norma.

Converge anche in misura, in quanto per  $0 < t < 1$  abbiamo

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}: |f_n(x)| > t\}) = 2^{-k} \rightarrow 0, \text{ per } n \rightarrow \infty.$$

## 5. ESERCIZI

### 5.1. Equivalenza di funzioni che coincidono quasi ovunque.

*Esercizio 5.1.* Spiega perché se  $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  sono due funzioni misurabili tali che  $f(x) = g(x)$  quasi ovunque allora  $\mu(E_f(t)) = \mu(E_g(t))$  per ogni  $t \geq 0$ .

*Esercizio 5.2.* Completa la dimostrazione della proposizione 1.3.

### 5.2. Completezza degli spazi $L^p$ .

*Esercizio 5.3.* Sia  $p \geq 1$ . Dimostra che lo spazio  $\ell^p$ , formato dalle successioni  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tali che  $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$  e dotato della norma

$$\|(x_n)_n\|_p := \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p},$$

è uno spazio di Banach.

*Esercizio 5.4.* Sia  $H := \{f \in L^2(\mathbb{R}): xf \in L^2(\mathbb{R})\}$ .

- (1) Verifica che  $H \subset L^1(\mathbb{R})$ .
- (2) Verifica che  $\|f\|_H := \left( \int_{-\infty}^{+\infty} (1+x^2) |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$  definisce una norma su  $H$ .
- (3) Dimostra che  $(H, \|\cdot\|_H)$  è uno spazio di Banach.
- (4) Calcola la norma dell'applicazione (di immersione)  $J: H \rightarrow L^1$ ,  $Jf := f$ .

*Esercizio 5.5.* Siano  $1 \leq p < q \leq \infty$ . Considera lo spazio  $V := L^p(\mathbb{R}) \cap L^q(\mathbb{R})$ .

- (1) Dimostra che  $\|f\|_V := \|f\|_p + \|f\|_q$  definisce una norma su  $V$ .
- (2) Dimostra che  $V$  è uno spazio di Banach.

*Esercizio 5.6.* Siano  $1 \leq p < q \leq \infty$ . Considera lo spazio  $W := L^p(\mathbb{R}) + L^q(\mathbb{R})$  definito come lo spazio delle funzioni misurabili che possono essere decomposte nella forma  $f = f_1 + f_2$ , con  $f_1 \in L^p(\mathbb{R})$  e  $f_2 \in L^q(\mathbb{R})$ .

- (1) Dimostra che

$$\|f\|_W := \inf \left\{ \|f_1\|_p + \|f_2\|_q : f = f_1 + f_2, f_1 \in L^p(\mathbb{R}), f_2 \in L^q(\mathbb{R}) \right\}$$

definisce una norma su  $W$ .

- (2) Dimostra che  $W$  è uno spazio di Banach.

### 5.3. Dualità in $L^p$ .

*Esercizio 5.7.* Determina per quali  $p \geq 1$  e per quali  $\alpha > 0$  si ha che l'operatore

$$Tf := \int_0^1 \frac{f(x)}{x^\alpha} dx$$

è ben definito come funzionale lineare e continuo da  $L^p(0,1)$  a  $\mathbb{C}$  e calcola la sua norma operatoriale.

*Esercizio 5.8.* Determina per quali  $p \in [1, +\infty]$  si ha che il funzionale definito da

$$Tf := \int_0^1 (f(x^2) - f(1-x^2)) dx$$

risulta essere ben definito, lineare e continuo da  $L^p(0,1)$  a  $\mathbb{C}$  e determina la sua norma operatoriale.

#### 5.4. Diverse nozioni di convergenza per successioni di funzioni.

*Esercizio 5.9.* Spiega perché la convergenza in norma  $L^\infty$  implica la convergenza puntuale quasi ovunque.

*Esercizio 5.10.* Spiega perché se la successione  $(f_n)$  converge puntualmente quasi ovunque ad una funzione  $f_*$  e converge in norma  $L^p$  ad una funzione  $g_*$  allora deve necessariamente essere  $f_* = g_*$  quasi ovunque.

*Esercizio 5.11.* Sia  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni in  $L^p$  e sia  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni in  $L^q$  con  $p$  e  $q$  esponenti coniugati. Dimostra che se  $(f_n)$  converge debolmente a  $f_*$  in  $L^p$  e  $(g_n)$  converge a  $g_*$  in norma  $L^q$  allora  $(f_n g_n)$  converge a  $f_* g_*$  in norma  $L^1$ .

*Esercizio 5.12.* Per ciascuna delle seguenti successioni di funzioni definite su  $\mathbb{R}$  determina se convergono o meno secondo le seguenti diverse nozioni di convergenza: puntualmente quasi ovunque, in norma  $L^\infty$ , in norma  $L^p$  con  $p \in [1, +\infty[$ , debolmente in  $L^p$  con  $p \in [1, +\infty[$ , in misura (di Lebesgue).

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \chi_{[0,n]}(x), & f_n(x) &= \sqrt{n} \chi_{[0, \frac{1}{n}]}(x), \\ f_n(x) &= \sqrt{n} e^{-n^2 x^2}, & f_n(x) &= \sqrt{n} \chi_{[n, n + \frac{1}{n}]}. \end{aligned}$$