

## ANALISI 3 - L12: BASI ORTONORMALI

In uno spazio vettoriale  $V$ , una base algebrica (base di Hamel) è un sottoinsieme  $B$  formato da vettori *linearmente indipendenti* tali che ogni vettore di  $V$  può essere scritto come combinazione lineare di un numero *finito* di elementi di  $B$ , ovvero

$$V = \text{span } B := \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k b_k : n \in \mathbb{N}, \lambda_k \in \mathbb{C}, b_k \in B, \forall k = 1, \dots, n \right\}.$$

Questo concetto di base utilizza solo le proprietà algebriche di spazio vettoriale. Ogni spazio vettoriale possiede una base algebrica, e due basi di uno stesso spazio vettoriale hanno sempre la stessa cardinalità.

In uno spazio vettoriale dotato di topologia, come ad esempio uno spazio normato, sotto opportune condizioni di convergenza, possiamo definire combinazioni lineari anche per una infinità numerabile di vettori. Tramite un'operazione di passaggio al limite sappiamo che possiamo dare senso alla somma di un'infinità numerabile di vettori. Tenendo conto di ciò possiamo modificare il concetto di base a quello di un insieme  $B$  di vettori linearmente indipendenti le cui combinazioni lineari finite *approssimino* ogni elemento dello spazio  $V$ ,

$$V = \overline{\text{span } B}.$$

Abbiamo inoltre visto nella lezione scorsa che negli spazi dotati di prodotto scalare la condizione di ortogonalità, che è più forte della lineare indipendenza, per gli elementi di una base permette di semplificare notevolmente il calcolo dei coefficienti tramite proiezioni ortogonali. È quindi desiderabile avere basi composte da vettori ortogonali, o ancora meglio ortonormali. Con basi ortonormali potremo decomporre ogni vettore come somma di componenti elementari; in spazi di dimensione infinite avremo allora a che fare con somme formate da infinite componenti.

### 1. SOMME DI FAMIGLIE DI VETTORI

Siano  $A$  e  $B$  due qualsiasi insiemi. Data una funzione  $f: A \rightarrow B$ , indichiamo con  $f_\alpha = f(\alpha)$  i valori della funzione al variare di  $\alpha \in A$  e diremo che  $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$  è una *famiglia* di valori di  $B$  indicizzata su  $A$ . Ad esempio una successione  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a valori in  $B$  non è altro che una funzione da  $\mathbb{N}$  a  $B$ .

È possibile definire la somma di una famiglia infinita (eventualmente non numerabile) di vettori? Le uniche somme che sappiamo veramente calcolare algebricamente sono le somme con un numero finito di termini, somme di infiniti termini possiamo ottenerle solo tramite operazioni di limite o di approssimazione. Per una successione numerica  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , con  $x_n \in \mathbb{C}$ , sappiamo che possiamo definire la somma della serie  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  tramite il limite, quando esiste, delle sue somme parziali,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k,$$

ovvero, abbiamo che  $s_\star = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$  quando per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tale che

$$\left| s_\star - \sum_{k=1}^n x_k \right| < \varepsilon,$$

per ogni  $n \geq N_\varepsilon$ . Questa definizione di somma è strettamente collegata all'ordine con cui vengono considerati gli addendi; quando la serie non è assolutamente convergente, riarrangiando l'ordine dei termini è possibile ottenere qualsiasi valore per la somma. Quando la successione ha valori reali non negativi,  $x_n \geq 0$ , il limite che definisce la serie esiste sempre (finito o infinito), non dipende dall'ordine con cui sono arrangiati i termini, e coincide con l'estremo superiore delle somme finite che si possono ottenere dai termini della successione,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = \sup \left\{ \sum_{k \in J} x_k : J \text{ è un sottoinsieme finito di } \mathbb{N} \right\}.$$

Possiamo fare la stessa cosa per definire la somma di una qualsiasi famiglia di termini non negativi.

**Definizione 1.1** (Somme di famiglie di numeri reali non negativi). Sia  $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$  una famiglia di valori reali non negativi. Definiamo la *somma* di *tutti* i valori  $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$  come l'estremo superiore di tutte le possibili somme fatte con un numero finito di tali valori,

$$(1) \quad \sum_{\alpha \in A} x_\alpha := \sup \left\{ \sum_{\alpha \in J} x_\alpha : J \text{ è un sottoinsieme } \textit{finito} \text{ di } A \right\}.$$

Quando tale estremo superiore ha valore finito si dice che la somma è *convergente*, se invece ha valore infinito la somma si dice *divergente*.

Per inciso, osserviamo che, nel contesto della teoria astratta della misura, la somma definita in (1) non è altro che l'integrale della funzione  $x$  rispetto alla misura del contare  $\sharp$  su  $A$ ,

$$\sum_{\alpha \in A} x_\alpha = \int_A x(\alpha) d\sharp_\alpha.$$

Per avere somme convergenti è necessario che non ci siano "troppi" termini non nulli da sommare. Di fatto, se si ignorano i termini nulli, ogni somma convergente di termini non negativi si può ricondurre ad una somma di una quantità al più numerabile di termini, dunque ad una somma finita o ad una serie.

**Lemma 1.2.** *Quando la somma a termini non negativi  $\sum_{\alpha \in A} x_\alpha$  è convergente allora l'insieme  $A_\star$ , formato dagli indici  $\alpha \in A$  per cui  $x_\alpha > 0$ , è al più numerabile.*

*Dimostrazione.* Sia  $s_\star := \sum_{\alpha \in A} x_\alpha < \infty$ . Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  consideriamo l'insieme  $A_n$  formato dagli indici  $\alpha \in A$  per cui  $x_\alpha \geq \frac{1}{n}$ . Supponiamo che  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  siano  $k$  indici distinti appartenenti a  $A_n$ , allora abbiamo

$$s_\star \geq \sum_{j=1}^k x_{\alpha_j} \geq \frac{k}{n},$$

e dunque deve essere  $k \leq ns_\star < \infty$ . Questo significa che l'insieme  $A_n$  ha cardinalità finita. Siccome  $A_\star = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  allora  $A_\star$  ha cardinalità al più numerabile, essendo unione numerabile di insiemi finiti.  $\square$

Diamo ora una definizione per dare senso a somme di famiglie di vettori in uno spazio normato che non dipenda da un particolare ordine tra gli addendi.

**Definizione 1.3** (Somme incondizionatamente convergenti di famiglie di vettori). Sia  $(v_\alpha)_{\alpha \in A}$  una famiglia di vettori in uno spazio normato. Diciamo che la somma  $\sum_{\alpha \in A} v_\alpha$  di tutti i vettori  $(v_\alpha)_{\alpha \in A}$  converge incondizionatamente al vettore  $v_*$  quando per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un sottoinsieme finito  $J_\varepsilon \subseteq A$  tale che per ogni sottoinsieme finito  $J \subseteq A$  tale che  $J_\varepsilon \subseteq J$  si ha

$$\left\| v_* - \sum_{\alpha \in J} v_\alpha \right\| < \varepsilon.$$

Quando una famiglia di vettori possiede una somma incondizionatamente convergente tale il valore di tale somma è unico.

Possiamo generalizzare il criterio di convergenza di Cauchy per le serie anche al caso di somme di famiglie di vettori.

**Definizione 1.4.** Sia  $(v_\alpha)_{\alpha \in A}$  una famiglia di vettori in uno spazio di normato. Diciamo che la somma  $\sum_{\alpha \in A} v_\alpha$  è *incondizionatamente di Cauchy* quando per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un sottoinsieme finito  $J_\varepsilon \subseteq A$  tale che per ogni sottoinsieme finito  $K \subseteq A \setminus J_\varepsilon$  si ha

$$\left\| \sum_{\alpha \in K} v_\alpha \right\| < \varepsilon.$$

**Proposizione 1.5.** *In uno spazio di normato ogni somma incondizionatamente convergente è incondizionatamente di Cauchy. In uno spazio di Banach ogni somma incondizionatamente di Cauchy è incondizionatamente convergente.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che la somma  $\sum_{\alpha \in A} v_\alpha$  converga incondizionatamente al vettore  $v_*$ . Dato  $\varepsilon > 0$ , per la definizione di convergenza, esiste un insieme di indici finito  $J_\varepsilon$  tale che

$$\left\| v_* - \sum_{\alpha \in J} v_\alpha \right\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

per ogni insieme finito di indici  $J$  che contiene  $J_\varepsilon$ . Sia  $K$  un sottoinsieme finito di  $A \setminus J_\varepsilon$ , se consideriamo  $J = J_\varepsilon \cup K$ , per la disuguaglianza triangolare, abbiamo che

$$\left\| \sum_{\alpha \in K} v_\alpha \right\| = \left\| \sum_{\alpha \in J} v_\alpha - \sum_{\alpha \in J_\varepsilon} v_\alpha \right\| \leq \left\| v_* - \sum_{\alpha \in J} v_\alpha \right\| + \left\| v_* - \sum_{\alpha \in J_\varepsilon} v_\alpha \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dunque la somma è incondizionatamente di Cauchy.

Viceversa, supponiamo che la somma sia incondizionatamente di Cauchy in uno spazio di Banach. Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  esiste un insieme finito di indici  $J_n$  tale che

$$\left\| \sum_{\alpha \in K} v_\alpha \right\| < \frac{1}{n},$$

per ogni insieme finito di indici  $K$  con  $K \subseteq A \setminus J_n$ . Sia  $w_n := \sum_{\alpha \in J_n} v_\alpha$ . Ogni  $J_n$  può essere rimpiazzato da un qualsiasi insieme finito che lo contenga, quindi sostituendo ogni  $J_n$  con  $J'_n := \cup_{k=1}^n J_k$ , possiamo assumere che  $J_n \subseteq J_{n+1}$ . In questo modo, per  $m > n$  abbiamo

$$\|w_m - w_n\| = \left\| \sum_{\alpha \in J_m \setminus J_n} v_\alpha \right\| < \frac{1}{n}.$$

Questo prova che  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è una successione di Cauchy, e quindi, per la completezza dello spazio di Banach, è una successione convergente. Mostriamo ora che il limite  $v_*$  a cui converge  $(w_n)$  è anche il valore della somma di tutta la famiglia  $(v_\alpha)_{\alpha \in A}$ .

Infatti, per ogni  $\varepsilon > 0$ , scegliendo  $n > 2/\varepsilon$ , per ogni insieme finito di indici  $J$  che contiene  $J_n$ , abbiamo che

$$\begin{aligned} \left\| v_\star - \sum_{\alpha \in J} v_\alpha \right\| &\leq \|v_\star - w_n\| + \left\| \sum_{\alpha \in J} v_\alpha - w_n \right\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|w_m - w_n\| + \left\| \sum_{\alpha \in J \setminus J_n} v_\alpha \right\| = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{\alpha \in J_m \setminus J_n} v_\alpha \right\| + \left\| \sum_{\alpha \in J \setminus J_n} v_\alpha \right\| < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

**Definizione 1.6** (Somme assolutamente convergenti di famiglie di vettori). Sia  $(v_\alpha)_{\alpha \in A}$  una famiglia di vettori in uno spazio di normato. Diciamo che la *somma*  $\sum_{\alpha \in A} v_\alpha$  *converge assolutamente* quando la somma a termini negativi  $\sum_{\alpha \in A} \|v_\alpha\|$  converge a un valore finito.

**Proposizione 1.7.** *Ogni somma assolutamente convergente è una somma incondizionatamente di Cauchy.*

*Dimostrazione.* Sia  $s_\star := \sum_{\alpha \in A} \|v_\alpha\| < \infty$ . Per ogni  $\varepsilon > 0$  esisterà un insieme finito di indici  $J_\varepsilon$  tale che

$$s_\star - \varepsilon < \sum_{\alpha \in J_\varepsilon} \|v_\alpha\|.$$

Per ogni insieme finito di indici  $K$  contenuto in  $A \setminus J_\varepsilon$ , abbiamo

$$\left\| \sum_{\alpha \in K} v_\alpha \right\| \leq \sum_{\alpha \in K} \|v_\alpha\| = \left( \sum_{\alpha \in K \cup J_\varepsilon} \|v_\alpha\| \right) - \left( \sum_{\alpha \in J_\varepsilon} \|v_\alpha\| \right) < s_\star - (s_\star - \varepsilon) = \varepsilon.$$

□

Segue dalle proposizioni 1.5 e 1.7 che ogni somma assolutamente convergente in uno spazio di Banach è incondizionatamente convergente.

Per somme di valori scalari è vero anche il viceversa, somme incondizionatamente convergenti di numeri complessi sono anche assolutamente convergenti. In uno spazio di Banach di dimensione infinita invece possono esistere somme incondizionatamente convergenti ma non assolutamente convergenti, ad esempio si consideri la successione  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  di successioni  $v_n := \frac{1}{n} e_n$  in  $\ell^2$ , dove  $e_n$  è la successione canonica con tutte le coordinate nulle tranne l' $n$ -esima uguale a 1, abbiamo che

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n = \left( \frac{1}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \|v_n\|_{\ell^2} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Anche per le somme incondizionatamente convergenti non si possono avere troppi termini non nulli da sommare, e quindi ci si può sempre ricondurre al caso numerabile.

**Lemma 1.8.** *Sia  $(v_\alpha)_{\alpha \in A}$  una famiglia di vettori in uno spazio di normato. Quando la somma  $\sum_{\alpha \in A} v_\alpha$  è incondizionatamente convergente allora l'insieme  $A_\star$ , formato dagli indici  $\alpha \in A$  per cui  $v_\alpha \neq 0$ , è al più numerabile.*

*Dimostrazione.* Sia  $v_\star := \sum_{\alpha \in A} v_\alpha$ . Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  consideriamo l'insieme  $A_n$  formato dagli indici  $\alpha \in A$  per cui  $\|v_\alpha\| \geq \frac{1}{n}$ . Sappiamo che esiste un sottoinsieme finito  $J_n \subseteq A$  tale che per ogni sottoinsieme finito  $J$  contenente  $J_n$  si ha

$$\left\| v_\star - \sum_{\alpha \in J} v_\alpha \right\| < \frac{1}{2n}.$$

Per ogni  $\beta \notin J_n$ , per la disuguaglianza triangolare, abbiamo

$$\|v_\beta\| = \left\| \sum_{\alpha \in J_n \cup \{\beta\}} v_\alpha - \sum_{\alpha \in J_n} v_\alpha \right\| \leq \left\| v_\star - \sum_{\alpha \in J_n \cup \{\beta\}} v_\alpha \right\| + \left\| v_\star - \sum_{\alpha \in J_n} v_\alpha \right\| < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n},$$

e dunque  $\beta \notin A_n$ . Ne segue che  $A_n \subseteq J_n$  e dunque  $A_n$  ha cardinalità finita. Siccome  $A_\star = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  allora  $A_\star$  ha cardinalità al più numerabile, essendo unione numerabile di insiemi finiti.  $\square$

In particolare, per ogni somma incondizionatamente convergente  $\sum_{\alpha \in A} v_\alpha$  esiste una successione non decrescente di insiemi finiti di indici  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , con  $J_n \subseteq J_{n+1} \subseteq A$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , tale che la successione delle somme parziali (finite) corrispondenti ai  $J_n$  converge alla somma totale

$$(2) \quad \sum_{\alpha \in A} v_\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\alpha \in J_n} v_\alpha.$$

Nel caso di somme incondizionatamente convergenti di vettori in uno spazio prehilbertiano, per la continuità del prodotto interno, abbiamo che

$$(3) \quad \left\langle \sum_{\alpha \in A} v_\alpha, \sum_{\beta \in B} w_\beta \right\rangle = \sum_{(\alpha, \beta) \in A \times B} \langle v_\alpha, w_\beta \rangle.$$

## 2. SISTEMI ORTONORMALI COMPLETI

Nel caso di famiglie di vettori ortogonali in uno spazio di Hilbert possiamo dare una condizione necessaria e sufficiente per la convergenza incondizionata della loro somma.

**Lemma 2.1.** *Sia  $(h_\alpha)_{\alpha \in A}$  una famiglia di vettori a due a due ortogonali in uno spazio di Hilbert  $H$ . Allora la somma  $\sum_{\alpha \in A} h_\alpha$  converge incondizionatamente se e solo se  $\sum_{\alpha \in A} \|h_\alpha\|^2 < \infty$ , e in tal caso abbiamo*

$$(4) \quad \left\| \sum_{\alpha \in A} h_\alpha \right\|^2 = \sum_{\alpha \in A} \|h_\alpha\|^2.$$

*Dimostrazione.* Sia  $J$  un insieme finito di indici. Per l'ipotesi di ortogonalità e per il teorema di Pitagora,

$$\left\| \sum_{\alpha \in J} h_\alpha \right\|^2 = \sum_{\alpha \in J} \|h_\alpha\|^2.$$

Da queste identità segue che la condizione che la somma  $\sum_{\alpha \in A} h_\alpha$  sia incondizionatamente di Cauchy in  $H$  coincide con la condizione che la somma  $\sum_{\alpha \in A} \|h_\alpha\|^2$  sia incondizionatamente di Cauchy in  $\mathbb{R}$ . Dunque una converge incondizionatamente se e solo l'altra converge incondizionatamente. L'identità (4) segue approssimando le somme con limiti di successioni di somme finite come in (2) e utilizzando la continuità della norma.  $\square$

I risultati che abbiamo ricavato nella scorsa lezione per sistemi ortonormali finiti e proiezioni ortogonali su sottospazi di dimensione finita possono ora essere estesi al caso generale.

**Teorema 2.2** (Disuguaglianza di Bessel, caso generale). *Sia  $S$  un sistema ortonormale in uno spazio di Hilbert  $H$  (ovvero per ogni  $h, h' \in S$  abbiamo  $\langle h, h' \rangle = 0$  se  $h' \neq h$  e  $\langle h, h' \rangle = 1$  se  $h' = h$ ). Sia  $V$  il più piccolo sottospazio chiuso che contiene  $S$ , ovvero  $V = \overline{\text{span } S}$ . Allora per ogni  $x \in H$  abbiamo che :*

(i) *vale la disuguaglianza di Bessel*

$$(5) \quad \sum_{h \in S} |\langle x, h \rangle|^2 \leq \|x\|^2;$$

(ii) *tutti i prodotti  $\langle x, h \rangle$  sono nulli tranne che per una quantità al più numerabile di elementi  $h \in S$ .*

(iii) *la somma  $\sum_{h \in S} \langle x, h \rangle h$  converge incondizionatamente alla proiezione ortogonale  $P_V(x)$ .*

*Dimostrazione.* La disuguaglianza (5) segue dalla sua versione per sistemi ortonormali finiti che abbiamo ottenuto nella lezione scorsa: se  $h_1, \dots, h_n$  sono  $n$  vettori distinti di  $S$  allora

$$\sum_{k=1}^n |\langle x, h_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

L'affermazione (ii) segue dalla disuguaglianza di Bessel (5) per via del lemma 1.2. Dimostriamo ora (iii). Il fatto che la somma  $\sum_{h \in S} \langle x, h \rangle h$  converga incondizionatamente segue anch'esso dalla disuguaglianza di Bessel (5) per via del lemma 2.1 osservando che  $(\langle x, h \rangle h)_{h \in S}$  è una famiglia di vettori a due a due ortogonali e che  $\|\langle x, h \rangle h\| = |\langle x, h \rangle|$ . Sia  $p = \sum_{h \in S} \langle x, h \rangle h$ , essendo  $p$  uguale a un limite di combinazioni lineari di elementi di  $S$  abbiamo che  $p \in V$ . Per ogni  $h' \in S$ , per la continuità del prodotto interno e per l'ortonormalità di  $S$ , abbiamo

$$\langle p, h' \rangle = \sum_{h \in S} \langle x, h \rangle \langle h, h' \rangle = \langle x, h' \rangle.$$

Dunque  $\langle x - p, h' \rangle = 0$  per ogni  $h' \in S$  ovvero  $x - p \in S^\perp = V^\perp$ . Quindi per la proprietà caratteristica delle proiezioni abbiamo che  $p = P_V(x)$  è la proiezione ortogonale di  $x$  su  $V$ .  $\square$

Abbiamo così ottenuto una formula generale per calcolare la proiezione ortogonale su un sottospazio chiuso  $V$  di uno spazio di Hilbert: se  $S$  è un sistema ortonormale che genera un sottospazio denso in  $V$  allora la proiezione ortogonale su  $V$  è data da

$$(6) \quad P_V(x) = \sum_{h \in S} \langle x, h \rangle h.$$

Nel caso in cui  $V = \overline{\text{span } S}$  non coincida con tutto lo spazio di Hilbert  $H$ , allora esiste un vettore non nullo  $x \in H \setminus V$ . Per il punto (iii) il vettore  $w := x - P_V(x)$  è ortogonale a  $V$  e non è nullo, normalizzandolo otteniamo un vettore  $u = \frac{1}{\|w\|} w$  di norma 1 e ortogonale ai vettori di  $S$ . L'insieme  $S' = S \cup \{u\}$  è quindi ancora un sistema ortonormale che contiene propriamente  $S$ .

**Teorema 2.3.** *Sia  $S$  un sistema ortonormale nello spazio di Hilbert  $H$ . Le seguenti affermazioni sono tra loro equivalenti:*

- (a)  $S$  è massimale rispetto all'inclusione tra i sistemi ortonormali in  $H$ ;
- (b)  $S^\perp = \{0\}$ ;
- (c)  $\text{span}(S)$  è denso in  $H$ ;
- (d) (serie di Fourier astratta) per ogni  $x \in H$  abbiamo

$$x = \sum_{h \in S} \langle x, h \rangle h;$$

- (e) (identità di Parseval) per ogni  $x, y \in H$  abbiamo

$$\langle x, y \rangle = \sum_{h \in S} \langle x, h \rangle \overline{\langle y, h \rangle};$$

- (f) (identità di Plancherel) Per ogni  $x \in H$  abbiamo

$$\|x\|^2 = \sum_{h \in S} |\langle x, h \rangle|^2.$$

*Dimostrazione.* Vediamo che (a) implica (b). Se  $S$  è massimale non esistono vettori unitari ortogonali a  $S$  e quindi  $S^\perp$  non può contenere vettori non nulli.

Vediamo che (b) implica (c). Siccome sappiamo che vale la decomposizione ortogonale  $H = \overline{\text{span}(S)} \oplus S^\perp$ , se  $S^\perp$  contiene solo il vettore nullo allora deve essere  $\overline{\text{span}(S)} = H$ .

Vediamo che (c) implica (d). Se  $\overline{\text{span } S} = H$ , la formula (6) per le proiezioni ortogonali ci dice che

$$x = P_H(x) = \sum_{h \in S} \langle x, h \rangle h, \quad \forall x \in H.$$

Vediamo che (d) implica (e). Applichiamo la formula (3) alle somme

$$x = \sum_{h \in S} \langle x, h \rangle h, \quad y = \sum_{h' \in S} \langle y, h' \rangle h',$$

e otteniamo

$$\langle x, y \rangle = \sum_{h, h' \in S} \langle \langle x, h \rangle h, \langle y, h' \rangle h' \rangle = \sum_{h, h' \in S} \langle x, h \rangle \overline{\langle y, h' \rangle} \langle h, h' \rangle = \sum_{h \in S} \langle x, h \rangle \overline{\langle y, h \rangle}.$$

Si vede immediatamente che (e) implica (f) prendendo  $y = x$ .

Vediamo che (f) implica (a). Se  $x$  è un vettore ortogonale ad  $S$  allora  $\langle x, h \rangle = 0$  per ogni  $h \in S$  e quindi (f) implica che  $\|x\| = 0$  e dunque  $x = 0$ . Non essendo vettori non nulli ortogonali ad  $S$  ne segue che  $S$  è massimale tra i sistemi ortonormali.  $\square$

**Definizione 2.4.** Un sistema ortonormale  $S$  che soddisfa le condizioni (tra loro equivalenti) descritte nel teorema 2.3 si dice *base ortonormale*, o anche *sistema ortonormale completo*, per lo spazio di Hilbert  $H$ .

**Teorema 2.5.** Ogni spazio di Hilbert possiede una base ortonormale.

*Dimostrazione.* Consideriamo la famiglia  $\Omega$  di tutti i sistemi ortonormali di  $H$  (parzialmente) ordinata rispetto alla relazione di inclusione. Se  $\tilde{\Omega}$  è un sottoinsieme di  $\Omega$  totalmente ordinato allora  $\tilde{S} := \cup_{S \in \tilde{\Omega}} S$  è ancora un elemento di  $\Omega$  maggiorante di  $\tilde{\Omega}$ . Per il lemma di Zorn esiste quindi un elemento massimale in  $\Omega$ , ovvero una base ortonormale di  $H$ .  $\square$

### 3. STRUTTURA $\ell^2$ DEGLI SPAZI DI HILBERT

**Teorema 3.1.** Se  $A$  e  $B$  sono due basi ortonormali dello stesso spazio di Hilbert  $H$  allora  $A$  e  $B$  hanno la stessa cardinalità.

Dato un insieme  $E$  indichiamo con  $\#E$  la sua cardinalità.

*Dimostrazione.* Se  $A$  è un insieme finito allora  $H$  è uno spazio vettoriale di dimensione finita e quindi  $H = \text{span}(A) = \text{span}(B)$ , e dunque  $A$  e  $B$  hanno la stessa cardinalità essendo anche basi in senso algebrico.

Supponiamo quindi che sia  $A$  che  $B$  siano insiemi infiniti. Per ogni  $a \in A$ , definiamo  $B_a := \{b \in B : \langle a, b \rangle \neq 0\}$ . Abbiamo che  $B \subseteq \cup_{a \in A} B_a$ , infatti se fosse  $\langle a, b \rangle = 0$  per ogni  $a \in A$  allora avremmo  $b \in A^\perp$  e dunque dovrebbe essere  $b = 0$ . Ogni insieme  $B_a$  è al più numerabile. Per le regole di calcolo dei numeri cardinali abbiamo

$$\#B \leq \#(\cup_{a \in A} B_a) \leq \#(A \times \mathbb{N}) = \#A.$$

Invertendo il ruolo di  $A$  e  $B$  si ottiene anche che  $\#A \leq \#B$ .  $\square$

Esistono spazi di Hilbert con basi di qualsiasi cardinalità. Anzi, qualsiasi insieme può essere considerato la base di qualche spazio di Hilbert.

**Esempio 3.2.** Sia  $S$  un insieme (qualunque). Indichiamo con  $\mathbb{C}^S$  l'insieme delle applicazioni da  $S$  a  $\mathbb{C}$ . Lo spazio

$$\ell^2(S) := \left\{ x \in \mathbb{C}^S : \sum_{h \in S} |x(h)|^2 < +\infty \right\}$$

dotato del prodotto scalare

$$\langle x, y \rangle := \sum_{h \in S} x(h) \overline{y(h)},$$

e della corrispondente norma  $\|x\| := \left( \sum_{h \in S} |x(h)|^2 \right)^{1/2}$ , è uno spazio di Hilbert. Possiamo identificare l'insieme  $S$  con il sottoinsieme  $\tilde{S} = \{e_s \in \mathbb{C}^S : s \in S\}$ , dove per ogni  $s \in S$  poniamo  $e_s(t) = 0$  per ogni  $t \neq s$ , e  $e_s(s) = 1$ . L'insieme  $\tilde{S}$  è una base ortonormale per  $\ell^2(S)$  con la stessa cardinalità di  $S$ .

Nel caso in cui  $S = \mathbb{N}$  ritroviamo lo spazio  $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$  delle successioni di quadrato sommabile.

**Definizione 3.3.** Due spazi di Hilbert  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$  e  $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$  si dicono *isomorfi* quando esiste un'applicazione  $\phi: X \rightarrow Y$  lineare e biettiva tale che

$$(7) \quad \langle a, b \rangle_X = \langle \phi(a), \phi(b) \rangle_Y, \quad \forall a, b \in X.$$

Per via delle formule di polarizzazione, la condizione (7) equivale a richiedere che  $\phi$  sia un'isometria che preserva le norme indotte dai prodotti scalari,

$$\|a\|_X = \|\phi(a)\|_Y, \quad \forall a \in X.$$

Due spazi di Hilbert isomorfi possiedono di fatto la stessa struttura, e tramite l'isomorfismo  $\phi$  i punti di uno spazio possono essere identificati con i corrispondenti punti dell'altro spazio.

Se  $A$  e  $B$  sono due insiemi con la stessa cardinalità, a partire da una biezione tra  $A$  e  $B$  è facile costruire un isomorfismo tra gli spazi di Hilbert  $\ell^2(A)$  e  $\ell^2(B)$ .

Se  $S$  è una base ortonormale per lo spazio di Hilbert  $H$ , il teorema 2.3 ci dice che l'applicazione lineare  $\Phi$  che ad un elemento  $x$  di  $H$  associa la famiglia dei *coefficienti di Fourier*

$$\Phi(x) := (\langle x, h \rangle)_{h \in S}$$

è un isomorfismo tra  $H$  e  $\ell^2(S)$ .

Dunque tutti gli spazi di Hilbert hanno una struttura del tipo  $\ell^2(S)$  per qualche insieme  $S$ .

Attenzione! Dato un intervallo  $[a, b]$  con  $a < b$ , lo spazio  $\ell^2([a, b])$  del tipo che abbiamo considerato in questo paragrafo non è isometrico allo spazio  $L^2([a, b])$  delle funzioni su  $[a, b]$  di quadrato integrabile che abbiamo definito quando abbiamo parlato degli spazi  $L^p$ . Le basi del primo sono non numerabili in quanto ogni base ha la stessa cardinalità di  $[a, b]$ , mentre per il secondo mostriamo ora che esistono basi numerabili.

Consideriamo in  $L^2([a, b])$  lo spazio  $\mathcal{P}$  formato dalle funzioni polinomiali. Possiamo considerare  $\mathcal{P}$  come il sottospazio generato dalla famiglia numerabile di funzioni monomiali

$$(8) \quad 1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$$

Tali monomi non formano un sistema ortonormale, ma tramite il procedimendo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt possiamo costruire una sequenza numerabile di polinomi ortonormali che generano tutto  $\mathcal{P}$ . Si ottiene una sequenza di polinomi che non sono altro che delle versioni traslate e riscalate dei polinomi di Legendre. Siccome, come vedremo nel seguente teorema, i polinomi formano un insieme denso in  $L^2([a, b])$ , per il teorema 2.3 risulta che tale sequenza costituisce una base numerabile per  $L^2([a, b])$ . Dunque  $L^2([a, b])$  risulta essere isomorfo a  $\ell^2$ .

**Proposizione 3.4.** *Lo spazio  $\mathcal{P}$  delle funzioni polinomiali è denso in  $L^2([a, b])$*

La seguente dimostrazione è interessante in quanto utilizza molti dei concetti che abbiamo visto nelle scorse lezioni a proposito degli spazi  $L^p$  e delle convoluzioni.



*Dimostrazione.* Per  $\varepsilon > 0$  consideriamo la famiglia di funzioni gaussiane

$$\gamma_\varepsilon(x) := \pi^{-1/2} \varepsilon^{-1} e^{-(x/\varepsilon)^2}.$$

Si tratta di funzioni integrabili riscalate in modo che

$$\gamma_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} \gamma_1(x/\varepsilon), \quad \int \gamma_\varepsilon(x) dx = 1.$$

Per quanto visto nella lezione 8 a proposito delle approssimazioni dell'identità tramite convoluzioni, data una funzione  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , abbiamo che la convoluzione  $\gamma_\varepsilon * f$  converge alla funzione  $f$  in norma  $L^2$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Se utilizziamo l'espansione in serie di Taylor per la funzione esponenziale

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!},$$

troviamo che

$$\gamma_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{\varepsilon^{2k+1} k!},$$

Tale serie di potenze converge totalmente su ogni compatto, in particolare converge uniformemente su tutti gli intervalli chiusi e limitati. Le somme parziali di questa serie sono i polinomi

$$p_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{\varepsilon^{2k+1} k!}.$$

Per funzioni continue, la convergenza uniforme coincide con la convergenza in norma  $L^\infty$ , e su un intervallo limitato implica anche la convergenza in norma  $L^1$ , in quanto la norma  $L^\infty$  domina la norma  $L^1$ . Sia ora  $f$  una funzione di  $L^2([a, b])$ , possiamo pensarla definita su tutto  $\mathbb{R}$  ponendo  $f(x) = 0$  quando  $x \notin [a, b]$ . La convoluzione  $p_k * f$  definisce una funzione continua su  $[a, b]$ ,

$$(9) \quad p_k * f(x) = \int_a^b f(y) p_k(x-y) dy, \quad x \in [a, b].$$

Quando  $x, y \in [a, b]$  abbiamo che  $x-y \in [a-b, b-a]$ , e siccome  $p_k$  converge a  $\gamma_\varepsilon$  in norma  $L^1$  su  $[a-b, b-a]$  per  $k \rightarrow \infty$ , per le stime di Young abbiamo che  $p_k * f$  converge a  $\gamma_\varepsilon * f$  in norma  $L^2$  su  $[a, b]$  per  $k \rightarrow \infty$ , in quanto

$$\|p_k * f - \gamma_\varepsilon * f\|_{L^2([a, b])} \leq \|p_k - \gamma_\varepsilon\|_{L^1([a-b, b-a])} \|f\|_{L^2([a, b])}.$$

Per ogni  $x \in [a, b]$  la convoluzione (9) si può scrivere come

$$p_k * f(x) = \langle f, q \rangle_{L^2([a, b])},$$

dove  $q$  è il polinomio  $q(y) := p_k(x-y)$ . Supponiamo ora che la funzione  $f$  sia ortogonale in  $L^2([a, b])$  al sottospazio  $\mathcal{P}$  formato dalle funzioni polinomiali, ciò significa che il prodotto scalare di  $f$  in  $L^2([a, b])$  con un qualsiasi polinomio è sempre nullo, in particolare avremo che  $p_k * f$  è la funzione nulla per ogni  $k$ . Siccome  $p_k * f$  converge a  $\gamma_\varepsilon * f$  in norma  $L^2$  per  $k \rightarrow \infty$ , avremo anche che  $\gamma_\varepsilon * f$  è la funzione nulla, e questo per ogni  $\varepsilon > 0$ . Nel limite per  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , abbiamo che  $\gamma_\varepsilon * f$  converge a  $f$  in norma  $L^2$  e dunque anche  $f$  risulta nulla. Ciò significa che l'ortogonale di  $\mathcal{P}$  in  $L^2([a, b])$  è il sottospazio nullo, e di conseguenza  $\mathcal{P}$  è denso in  $L^2([a, b])$ .  $\square$

## 4. ESERCIZI

## 4.1. Somme di famiglie di vettori.

*Esercizio 4.1.* Dimostra che quando una famiglia di vettori possiede una somma incondizionatamente convergente il valore di tale somma è unico.

*Esercizio 4.2.* Dimostra che quando una somma a termini non negativi converge ad un valore finito allora tale somma è anche incondizionatamente convergente.

*Esercizio 4.3.* Dimostra che per una somma incondizionatamente convergente vale la disuguaglianza

$$\left\| \sum_{\alpha \in A} v_{\alpha} \right\| \leq \sum_{\alpha \in A} \|v_{\alpha}\|.$$

4.2. Struttura  $\ell^2$  degli spazi di Hilbert.

*Esercizio 4.4.* Dimostra tutte le affermazioni contenute nell'esempio 3.2.

*Esercizio 4.5.* Se  $A$  e  $B$  sono due insiemi con la stessa cardinalità, partendo da una biezione tra  $A$  e  $B$  costruisci un isomorfismo tra gli spazi di Hilbert  $\ell^2(A)$  e  $\ell^2(B)$ .

*Esercizio 4.6.* Verifica che le funzioni monomiali (8) sono linearmente indipendenti in  $L^2([a, b])$ .

*Esercizio 4.7.* Costruisci un isomorfismo tra  $L^2(e^{-x^2} dx)$  e  $L^2([-1, 1])$ . [Prova a cercarlo nella forma di una trasformazione che porta una funzione  $f(x)$  nella funzione  $F(t) := A(t)f(\psi(t))$  per opportune funzioni  $A(t)$  e  $\psi(t)$  da determinare e indipendenti da  $f$ .] Spiega perché  $L^2(e^{-x^2} dx)$  possiede una base numerabile.