

ANALISI 3 - L14: POLINOMI TRIGONOMETRICI

I polinomi sono funzioni molto regolari, facili da calcolare e da manipolare. Per questo è desiderabile poter riuscire ad approssimare funzioni qualsiasi con funzioni polinomiali. Quando si ha a che fare con funzioni che manifestano una periodicità, i polinomi standard risultano essere poco adatti a generare buone approssimazioni: un polinomio (in una variabile) di grado d che assume lo stesso valore più di d volte deve necessariamente essere costante, mentre funzioni periodiche assumono tutti i loro valori infinite volte. Un polinomio in più variabili può comunque generare una funzione periodica quando i suoi valori vengono letti lungo una curva chiusa opportunamente parametrizzata. Leggendo polinomi definiti sul piano cartesiano lungo la circonferenza unitaria si generano i polinomi trigonometrici che sono funzioni periodiche regolari semplici da calcolare e manipolare e con essi possiamo cercare di approssimare generiche funzioni periodiche.

1. POLINOMI, DAL PIANO ALLA CIRCONFERENZA UNITARIA

1.1. Funzioni periodiche. Una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ si dice *periodica* di *periodo* $T > 0$ quando

$$f(x + T) = f(x)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Tutta l'informazione riguardante f è contenuta in ogni sua restrizione ad un intervallo di lunghezza pari al periodo. In particolare, se f è localmente integrabile allora

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_b^{b+T} f(t) dt$$

per ogni $a, b \in \mathbb{R}$.

Inoltre, data una funzione $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ definita su un intervallo di lunghezza $T = b - a > 0$, esiste un'unica funzione periodica \tilde{g} definita su tutto \mathbb{R} che sia periodica con periodo T che coincida con g su $[a, b[$, essa si ottiene ponendo

$$\tilde{g}(t) := g\left(t - \left\lfloor \frac{t-a}{T} \right\rfloor T\right).$$

Se g è continua su $[a, b]$ tale prolungamento \tilde{g} risulta essere continuo su tutto \mathbb{R} se e solo se $g(a) = g(b)$; nel caso in cui $g(a) \neq g(b)$ il prolungamento periodico presenterà delle discontinuità di tipo salto nei punti di ascissa $a + kT$, con $k \in \mathbb{Z}$. Se g è di classe C^1 su $[a, b]$ tale prolungamento \tilde{g} risulta essere di classe C^1 se e solo se $g(a) = g(b)$ e $g'(a) = g'(b)$; nel caso in cui $g(a) = g(b)$ ma $g'(a) \neq g'(b)$ il prolungamento periodico presenterà dei punti angolosi nei punti di ascissa $a + kT$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Le funzioni periodiche hanno un comportamento di carattere ciclico che possiamo associare ad un moto circolare. Sia $U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ la circonferenza unitaria nel piano cartesiano \mathbb{R}^2 . Possiamo parametrizzare U tramite un punto che la percorre in senso antiorario con moto circolare uniforme,

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow U, \quad \varphi(t) = (\cos t, \sin t).$$

La funzione φ è periodica con periodo 2π . Data una funzione $F(x, y)$ definita su un dominio del piano cartesiano \mathbb{R}^2 contenente U , la composizione $f := F \circ \varphi$ genera

una funzione periodica che riproduce su ogni periodo i valori che F assume lungo la circonferenza U ,

$$f(t) = F(\cos t, \sin t).$$

Per avere una notazione più compatta possiamo identificare \mathbb{R}^2 con il piano complesso \mathbb{C} , ponendo $(x, y) = x + iy$. Abbiamo allora che la circonferenza unitaria è data dall'insieme

$$U = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \bar{z} = \frac{1}{z} \right\}.$$

Inoltre, utilizzando la notazione esponenziale, possiamo scrivere

$$\varphi(t) = \cos t + i \sin t = e^{it}, \quad f(t) = F(e^{it}).$$

1.2. Restrizione di polinomi dal piano alla circonferenza unitaria. Se indichiamo un punto del piano con il numero complesso $z = x + iy$, e il suo coniugato con $\bar{z} = x - iy$, allora $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ e $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$. Ogni monomio $x^a y^b$ si esprime, tramite la formula di Newton per le potenze del un binomio, come un polinomio (omogeneo) in z e \bar{z} di grado $a + b$. Ogni polinomio $Q(x, y)$ di grado n nelle due variabili reali x e y può essere visto allora come un polinomio di grado n nelle variabili z e \bar{z} ,

$$P(z, \bar{z}) := Q\left(\frac{1}{2}(z + \bar{z}), \frac{1}{2i}(z - \bar{z})\right);$$

si tratta di una combinazione lineare di termini monomiali della forma $z^a \bar{z}^b$ con esponenti interi $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a + b \leq n$. Se poi andiamo a leggere i valori del polinomio P lungo la circonferenza unitaria, ponendo $z = e^{it}$, ed essendo $\bar{z} = z^{-1}$, per i vari termini monomiali abbiamo

$$z^a \bar{z}^b = z^{a-b} = e^{i(a-b)t}.$$

Ecco che la funzione periodica $p(t) := P(e^{it}, e^{-it})$ risulta essere una combinazione lineare di termini della forma

$$e^{ikt} = (\cos t + i \sin t)^k = \cos(kt) + i \sin(kt),$$

con k intero che può variare da $-n$ a n .

1.3. Polinomi trigonometrici.

Definizione 1.1. Sia $n \in \mathbb{N}_0$. Chiamiamo *polinomio trigonometrico* di grado n ogni funzione da \mathbb{R} a \mathbb{C} della forma

$$(1) \quad p(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt},$$

con coefficienti $c_k \in \mathbb{C}$ per $k = -n, \dots, n$.

Osservazione 1.2. Per le formule di Eulero abbiamo che

$$e^{i0t} = 1, \quad e^{ikt} = \cos(kt) + i \sin(kt), \quad e^{-ikt} = \cos(kt) - i \sin(kt), \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Dunque, sostituendo, otteniamo che i polinomi trigonometrici possono anche essere scritti nella forma

$$(2) \quad p(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kt) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(kt),$$

con coefficienti $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{C}$ per $k = 1, \dots, n$.

Osservazione 1.3. Si ricava facilmente il legame tra i coefficienti c_k della forma complessa (1) e i coefficienti a_k, b_k della forma reale (2) del polinomio trigonometrico p . Per ogni $k \geq 0$ abbiamo infatti che

$$c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt} = (c_k + c_{-k}) \cos(kt) + i(c_k - c_{-k}) \sin(kt) = a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt),$$

da cui ricaviamo che

$$\begin{aligned} a_0 &= 2c_0, & (b_0 &= 0), & c_0 &= \frac{1}{2}a_0, \\ a_k &= c_k + c_{-k}, & c_k &= \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \\ b_k &= i(c_k - c_{-k}), & c_{-k} &= \frac{1}{2}(a_k + ib_k). \end{aligned}$$

Esempio 1.4. Al polinomio di terzo grado in x e y

$$Q(x, y) = 1 - 2y + ix^2 - xy^2,$$

corrisponde il polinomio di terzo grado in z e \bar{z}

$$\begin{aligned} P(z, \bar{z}) &= 1 - \frac{2}{2i}(z - \bar{z}) + \frac{1}{4}i(z + \bar{z})^2 + \frac{1}{8}(z + \bar{z})(z - \bar{z})^2 = \\ &= 1 + iz - i\bar{z} + \frac{1}{4}iz^2 + \frac{1}{2}iz\bar{z} + \frac{1}{4}i\bar{z}^2 + \frac{1}{8}z^3 - \frac{1}{8}z^2\bar{z} - \frac{1}{8}z\bar{z}^2 + \frac{1}{8}\bar{z}^3. \end{aligned}$$

Letto lungo la circonferenza trigonometrica, con $z = e^{it}$ e la sostituzione $\bar{z} = 1/z$, si riduce a

$$\begin{aligned} P(z, z^{-1}) &= 1 + iz - iz^{-1} + \frac{1}{4}iz^2 + \frac{1}{2}i + \frac{1}{4}iz^{-2} + \frac{1}{8}z^3 - \frac{1}{8}z - \frac{1}{8}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-3} = \\ &= \frac{1}{8}z^{-3} + \frac{1}{4}iz^{-2} + \left(-\frac{1}{8} - i\right)z^{-1} + \left(1 + \frac{1}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{8} + i\right)z + \frac{1}{4}iz^2 + \frac{1}{8}z^3, \end{aligned}$$

che corrisponde al polinomio trigonometrico di terzo grado in forma complessa,

$$\begin{aligned} p(t) &= P(e^{it}, e^{-it}) = \\ &= \frac{1}{8}e^{-3it} + \frac{1}{4}ie^{-2it} + \left(-\frac{1}{8} - i\right)e^{-it} + \left(1 + \frac{1}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{8} + i\right)e^{it} + \frac{1}{4}ie^{2it} + \frac{1}{8}e^{3it}, \end{aligned}$$

e che in forma reale diventa

$$p(t) = \left(1 + \frac{1}{2}i\right) - \frac{1}{4}\cos(t) + \frac{1}{2}i\cos(2t) + \frac{1}{4}\cos(3t) - 2\sin(t).$$

Esempio 1.5. La funzione $(\cos t)^4$ è un polinomio trigonometrico. Infatti

$$\begin{aligned} (\cos t)^4 &= \frac{1}{16}(e^{it} + e^{-it})^4 = \frac{1}{16} \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} e^{kit} e^{-(4-k)it} = \\ &= \frac{1}{16}e^{-4it} + \frac{1}{4}e^{-2it} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4}e^{2it} + \frac{1}{16}e^{4it} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{8}\cos(4t). \end{aligned}$$

1.4. Sistema ortonormale trigonometrico. I polinomi trigonometrici sono sempre funzioni continue e periodiche con periodo 2π . Se li consideriamo su un solo periodo, possiamo pensarli come elementi dello spazio di Hilbert $L^2([-\pi, \pi])$ su quale è definito il prodotto scalare $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)} dt$.

Definizione 1.6. Per ogni $k \in \mathbb{Z}$ e $t \in \mathbb{R}$, definiamo le funzioni

$$(3) \quad E_k(t) := e^{ikt}, \quad C_k(t) := \cos(kt), \quad S_k(t) := \sin(kt).$$

Chiamiamo queste funzioni *armoniche elementari*. Con esse formiamo due famiglie di funzioni periodiche

$$\Xi := (E_k)_{k \in \mathbb{Z}}, \quad \Theta := (C_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \cup (S_k)_{k \in \mathbb{N}},$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} E_k &= C_k + iS_k, & E_{-k} &= C_k - iS_k, \\ C_k &= \operatorname{Re} E_k = \frac{1}{2}(E_k + E_{-k}), & S_k &= \operatorname{Im} E_k = \frac{1}{2i}(E_k - E_{-k}). \end{aligned}$$

L'insieme V_n dei polinomi trigonometrici di grado minore o uguale a n forma un sottospazio vettoriale (complesso) di dimensione finita generato da armoniche elementari,

$$(4) \quad V_n := \operatorname{span} \{E_k : k = -n, \dots, n\} = \operatorname{span} \{C_0, C_1, \dots, C_n, S_1, \dots, S_n\}.$$

Proposizione 1.7. *Le famiglie Ξ e Θ sono formate da funzioni a due a due ortogonali in $L^2([-\pi, \pi])$*

Dimostrazione. La verifica è semplice in quanto ogni prodotto scalare da controllare si riconduce ad un integrale di una funzione in cui la primitiva è periodica e continua, e quindi l'integrale è nullo. Se $j, k \in \mathbb{Z}$ con $j \neq k$,

$$\langle E_j, E_k \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ijt} e^{-ikt} dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)t} dt = \left[\frac{e^{i(j-k)t}}{i(j-k)} \right]_{t=-\pi}^{t=\pi} = 0.$$

Se $k \in \mathbb{N}$ abbiamo

$$\begin{aligned} \langle C_0, C_k \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) dt = \left[\frac{\sin(kt)}{k} \right]_{t=-\pi}^{\pi} = 0; \\ \langle C_0, S_k \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt) dt = \left[-\frac{\cos(kt)}{k} \right]_{t=-\pi}^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

Se $j, k \in \mathbb{N}$ con $j \neq k$, abbiamo $j+k > 0$ e $j-k \neq 0$, usando le formule di Werner otteniamo

$$\begin{aligned} \langle C_j, C_k \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(jt) \cos(kt) dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((j+k)t) dt + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((j-k)t) dt = 0; \\ \langle S_j, S_k \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(jt) \sin(kt) dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((j+k)t) dt - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((j-k)t) dt = 0. \end{aligned}$$

Se $j, k \in \mathbb{N}$, sempre usando le formule di Werner,

$$\langle C_j, S_k \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(jt) \sin(kt) dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin((j+k)t) dt - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin((j-k)t) dt = 0.$$

□

Osservazione 1.8. L'ortogonalità implica la lineare indipendenza delle funzioni nelle famiglie Ξ e Θ . In particolare segue che il sottospazio V_n dei polinomi trigonometrici di grado minore o uguale a n ha dimensione $2n+1$. Ogni polinomio $p \in V_n$ può essere scritto in modo unico come combinazione di armoniche elementari in notazione esponenziale,

$$p = \sum_{k=-n}^n c_k E_k,$$

oppure come combinazione di armoniche elementari in notazione trigonometrica,

$$p = \frac{1}{2} a_0 C_0 + \sum_{k=1}^n (a_k C_k + b_k S_k).$$

Il legame tra i coefficienti a_k , b_k e c_k è quello descritto nell'osservazione 1.3.

Si calcola facilmente la norma in $L^2([-\pi, \pi])$ delle funzioni armoniche elementari definite in (3):

$$\|E_k\|_{L^2} = \sqrt{2\pi}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Rinormalizzando le funzioni del sistema ortogonale Ξ otteniamo il sistema ortonormale trigonometrico $\widehat{\Xi} = (\widehat{E}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ formato dalle funzioni armoniche elementari normalizzate definite da

$$\widehat{E}_k(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vedremo nella prossima lezione come questo sistema ortonormale costituisca una base (numerabile) per lo spazio $L^2([-\pi, \pi])$.

2. APPROSSIMAZIONI IN L^2 CON POLINOMI TRIGONOMETRICI

Il sistema finito di armoniche elementari normalizzate $\{\widehat{E}_k: k = -n, \dots, n\}$ costituisce una base ortonormale per il sottospazio V_n dei polinomi trigonometrici di grado minore o uguale a n . Con esso possiamo facilmente scrivere una formula per la proiezione ortogonale su V_n in L^2 . Data una funzione $f \in L^2([-\pi, \pi])$, utilizzando le formule che abbiamo ricavato nella lezione 11, abbiamo che la proiezione ortogonale di f su V_n è data dal polinomio trigonometrico

$$p := P_{V_n} f = \sum_{k=-n}^n \langle f, \widehat{E}_k \rangle \widehat{E}_k,$$

ovvero

$$(5) \quad p(t) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}_k e^{ikt},$$

dove i coefficienti di Fourier \widehat{f}_k sono dati da

$$(6) \quad \widehat{f}_k := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle f, \widehat{E}_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle f, E_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-iks} ds.$$

Il polinomio trigonometrico p definito in (5) è quello, tra tutti i polinomi trigonometrici di grado minore o uguale a n , che ha minima distanza, in norma L^2 , dalla funzione f .

Per la disuguaglianza di Bessel abbiamo inoltre che

$$(7) \quad \|f\|_{L^2}^2 \geq \sum_{k=-n}^n |\langle f, \widehat{E}_k \rangle|^2 = 2\pi \sum_{k=-n}^n |\widehat{f}_k|^2.$$

2.1. Nuclei di Dirichlet. Riscriviamo la formula (5) sottoforma di un unico integrale,

$$(8) \quad p(t) = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-iks} ds e^{ikt} = \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ik(t-s)} dt = \\ = \int_{-\pi}^{\pi} f(s) D_n(t-s) dt,$$

dove con D_n indichiamo i cosiddetti *nuclei di Dirichlet*, si tratta di particolari polinomi trigonometrici definiti da

$$(9) \quad D_n(t) := \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ikt}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0.$$

Siccome $e^{ikt} = (e^{it})^k$, la somma che definisce i nuclei di Dirichlet non è altro che la somma di $2n+1$ termini di una progressione geometrica di ragione $q := e^{it}$; possiamo

quindi calcolare una formula esplicita per D_n : quando $0 < |t| \leq \pi$ abbiamo $q \neq 1$ e dunque

$$\begin{aligned} D_n(t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n q^k = \frac{1}{2\pi} \cdot q^{-n} \cdot \frac{q^{2n+1} - 1}{q - 1} = \frac{1}{2\pi} \frac{q^{n+\frac{1}{2}} - q^{-n-\frac{1}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{-i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{i\frac{1}{2}t} - e^{-i\frac{1}{2}t}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{1}{2}t)}; \end{aligned}$$

mentre per $t = 0$ abbiamo $q = 1$ e

$$D_n(0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n 1 = \frac{2n+1}{2\pi}.$$

Integrando termine a termine la somma in (9) troviamo che

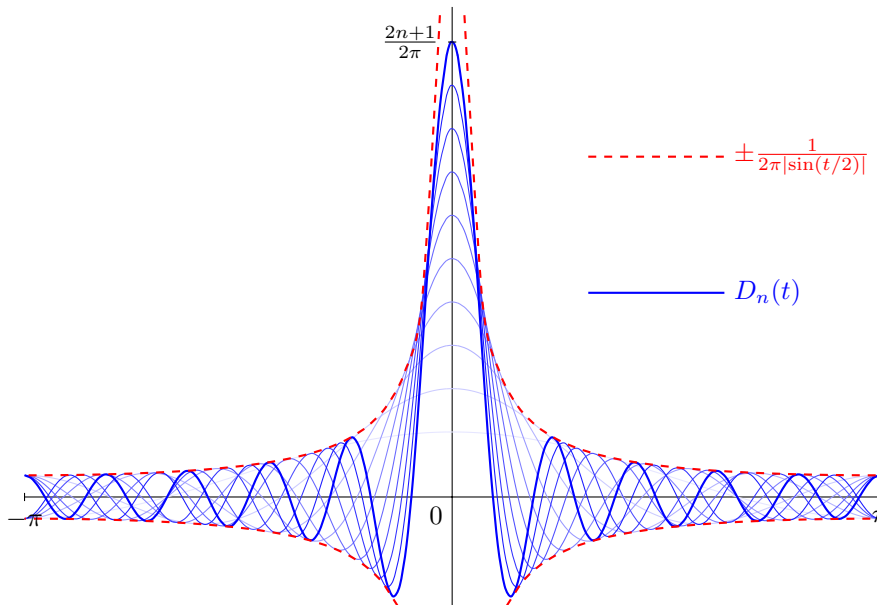
$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \langle E_0, E_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle E_0, E_0 \rangle = 1,$$

per ogni $n \in \mathbb{N}_0$. Se integriamo D_n in valore assoluto invece otteniamo una sequenza divergente di valori,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{1}{2}t)} \right| dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin((n+\frac{1}{2})t)|}{\sin(\frac{1}{2}t)} dt > \\ &> \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin((n+\frac{1}{2})t)|}{t} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx > \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx > \\ &> \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x| dx = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Siccome la serie armonica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ è divergente, per confronto otteniamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|D_n\|_{L^1} = +\infty.$$



2.2. Convolutioni di funzioni periodiche. Osserviamo che l'ultimo integrale in (8) non è altro che un integrale di convoluzione. Possiamo modificare la definizione di convoluzione che abbiamo visto per funzioni definite su \mathbb{R} in modo da adattarla per funzioni periodiche.

Definizione 2.1. Siano $f, g \in L^2([-\pi, \pi])$. Considerando il loro prolungamento periodico, possiamo pensare f e g definite su tutto \mathbb{R} come funzioni periodiche di periodo 2π . La convoluzione (periodica con periodo 2π) di f con g è definita allora tramite l'integrale

$$f * g(t) := \int_{-\pi}^{\pi} f(s)g(t-s) ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Quando f e g sono funzioni L^2 la loro convoluzione è sempre ben definita ed inoltre è una funzione continua e periodica (e quindi $f * g$ sta in L^2). Segue dalla disuguaglianza di Hölder che

$$|f * g(t)| \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}.$$

Nel contesto delle lezioni sulla serie di Fourier con il simbolo di convoluzione $*$ intenderemo sempre la convoluzione periodica, anche se il simbolo è lo stesso che abbiamo usato per la convoluzione su \mathbb{R} nelle precedenti lezioni;

Si verifica facilmente che la convoluzione periodica è commutativa, associativa, e lineare in entrambi i suoi argomenti:

$$f * g = g * f, \quad (f * g) * h = f * (g * h), \quad (f + \lambda g) * h = (f * h) + \lambda(g * h),$$

per ogni $f, g, h \in L^2$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

Proposizione 2.2. La convoluzione di una funzione in $L^2([-\pi, \pi])$ con un polinomio trigonometrico è ancora un polinomio trigonometrico,

Dimostrazione. Per la legge esponenziale abbiamo che

$$E_k(t-s) = e^{ik(t-s)} = e^{-iks} e^{ikt} = \overline{E_k(s)} E_k(t),$$

da cui segue che $f * E_k = \langle f, E_k \rangle E_k = 2\pi \widehat{f}_k E_k$. Dato un polinomio trigonometrico $p = \sum_{k=-n}^n c_k E_k \in V_n$, per linearità abbiamo

$$f * p = \sum_{k=-n}^n c_k (f * E_k) = \sum_{k=-n}^n (2\pi c_k \widehat{f}_k) E_k \in V_n.$$

□

Tornando alla formula (8) per la proiezione ortogonale su V_n , ora può essere scritta sottoforma di convoluzione con i nuclei di Dirichlet,

$$P_{V_n} f = f * D_n.$$

3. SERIE DI FOURIER

I coefficienti di Fourier \widehat{f}_k , definiti in (6), non dipendono dalla scelta del grado n di approssimazione, e la formula (5), che descrive la proiezione ortogonale di f su V_n , può essere considerata come una somma parziale di una serie di funzioni.

Definizione 3.1. Data una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ periodica con periodo 2π e localmente integrabile, è ben definita la successione $(\widehat{f}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ dei coefficienti di Fourier di f , dove

$$\widehat{f}_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-iks} ds.$$

Chiamiamo *serie di Fourier* associata alla funzione f la serie di funzioni

$$(10) \quad S[f](t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_k e^{ikt}.$$

Osservazione 3.2. Chiedere che una funzione periodica sia localmente integrabile equivale a chiedere che la funzione sia di classe L^1 su un intervallo di lunghezza pari ad un periodo. Nel nostro caso dunque i coefficienti di Fourier sono ben definiti per ogni $f \in L^1([-\pi, \pi])$.

La formula (10) al momento è puramente formale, il fatto che la somma converga effettivamente ad una funzione $S[f]$ ben definita dipende dalle proprietà di integrabilità e regolarità della funzione f . Ci occuperemo delle proprietà di convergenza nelle prossime lezioni. Per il momento esaminiamo qualche esempio di calcolo della successione dei coefficienti.

Osservazione 3.3. La serie (10) è una somma numerabile di armoniche elementari in forma esponenziale (quelle della famiglia Ξ). Utilizzando le relazioni tra i coefficienti descritte nell'osservazione 1.3 possiamo riscrivere la serie come somma numerabile di armoniche elementari in forma trigonometrica (quelle della famiglia Θ),

$$S[f](t) := \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k \in \mathbb{N}} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)),$$

dove i coefficienti a_k e b_k sono dati da:

$$\begin{aligned} a_0 &:= 2\widehat{f}_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \, ds, \\ a_k &:= \widehat{f}_k + \widehat{f}_{-k} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos(ks) \, ds, \\ b_k &:= i\widehat{f}_k - i\widehat{f}_{-k} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin(ks) \, ds. \end{aligned}$$

Osservazione 3.4. Se f è una funzione a valori reali allora i coefficienti a_k e b_k sono anch'essi reali e quindi la forma trigonometrica permette di esprimere la serie di Fourier in termini di quantità tutte reali.

Osservazione 3.5. Se f è una funzione pari, $f(-t) = f(t)$, allora l'integrando $f(s) \sin(ks)$ è una funzione dispari e dunque l'integrale che definisce i coefficienti b_k si annulla. In questo caso la serie di Fourier si riduce a

$$S[f](t) := \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \cos(kt),$$

dove i coefficienti sono dati da

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(s) \cos(ks) \, ds.$$

Se f è una funzione dispari, $f(-t) = -f(t)$, allora l'integrando $f(s) \cos(ks)$ è una funzione dispari e dunque l'integrale che definisce i coefficienti a_k si annulla. In questo caso la serie di Fourier si riduce a

$$S[f](t) := \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k \sin(kt),$$

dove i coefficienti sono dati da

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(s) \sin(ks) \, ds.$$

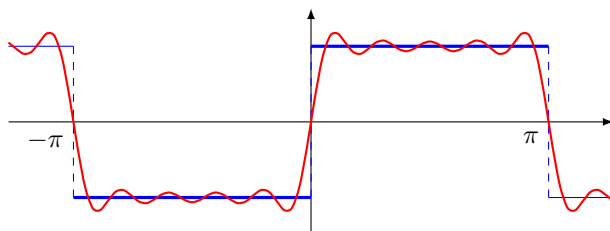
Esempio 3.6 (Onda quadra). Consideriamo la funzione 2π -periodica f che coincide con $f(t) = \operatorname{sgn}(t)$ per $t \in]-\pi, \pi[$. Siccome si tratta di una funzione dispari avremo $a_k = 0$ e

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi 1 \cdot \sin(ks) \, ds = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - (-1)^k}{k} = \begin{cases} \frac{4}{\pi k}, & \text{se } k \text{ è dispari,} \\ 0, & \text{se } k \text{ è pari.} \end{cases}$$

La serie di Fourier associata risulta essere

$$S[f](t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k \text{ dispari}} \frac{1}{k} \sin(kt) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin((2m-1)t)}{2m-1}.$$

In figura ecco il grafico dell'onda quadra f e della sua proiezione su V_9 :



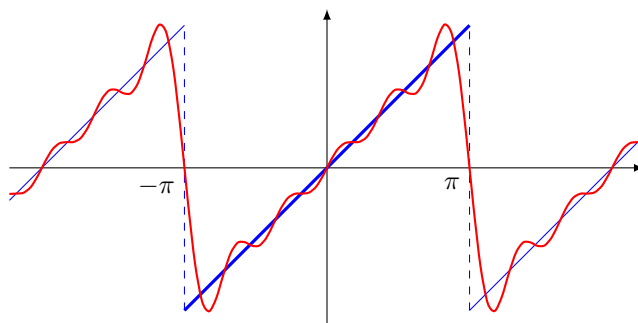
Esempio 3.7 (Onda a dente di sega). Consideriamo la funzione 2π -periodica f che coincide con $f(t) = t$ per $t \in]-\pi, \pi[$. Siccome si tratta di una funzione dispari avremo anche questa volta $a_k = 0$, mentre integrando per parti si ottiene

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi s \cdot \sin(ks) \, ds = \dots = (-1)^{k+1} \frac{2}{k}.$$

La serie di Fourier associata risulta essere

$$S[f](t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin(kt).$$

In figura ecco il grafico dell'onda a dente di sega f e della sua proiezione su V_5 :



Esempio 3.8 (Onda triangolare). Consideriamo la funzione 2π -periodica f che coincide con $f(t) = |t|$ per $t \in]-\pi, \pi[$. Siccome si tratta di una funzione pari questa volta avremo $b_k = 0$, mentre

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi s \, ds = \pi,$$

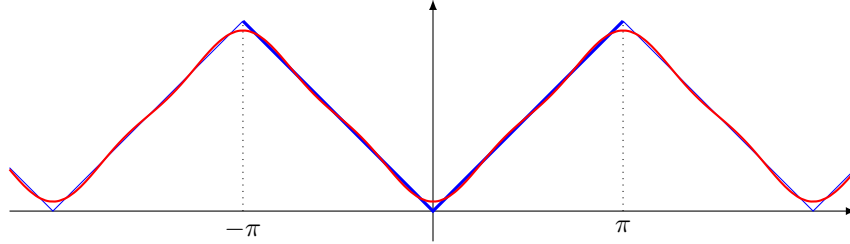
e per $k \in \mathbb{N}$ integrando per parti si ottiene

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi s \cdot \cos(ks) \, ds = \dots = -\frac{2(1 - (-1)^k)}{\pi k^2} = \begin{cases} -\frac{4}{\pi k^2}, & \text{se } k \text{ è dispari,} \\ 0, & \text{se } k \text{ è pari.} \end{cases}$$

La serie di Fourier associata risulta essere

$$S[f](t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k \text{ dispari}} \frac{1}{k^2} \cos(kt) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos((2m-1)t)}{(2m-1)^2}.$$

In figura ecco il grafico dell'onda triangolare f e della sua proiezione su V_3 :



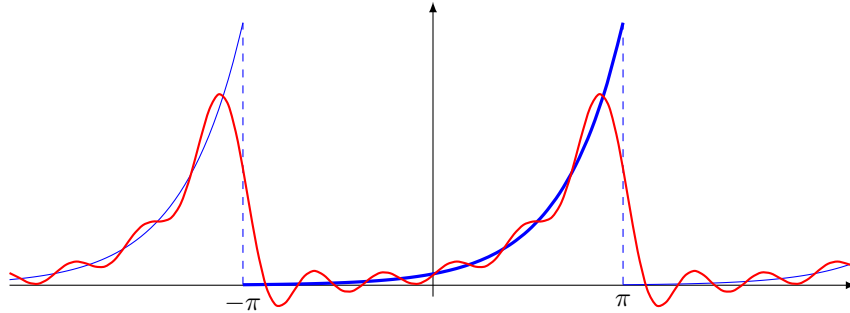
Osservazione 3.9. Consideriamo la funzione 2π -periodica f che coincide con $f(t) = e^t$ per $t \in]-\pi, \pi[$. Calcoliamo i suoi coefficienti di Fourier,

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^s e^{-iks} ds = \left[\frac{e^{(1-ik)s}}{2\pi(1-ik)} \right]_{s=-\pi}^{s=\pi} = \frac{1}{2\pi(1-ik)} \left(e^{(1-ik)\pi} - e^{-(1-ik)\pi} \right) = (-1)^k \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \cdot \frac{1+ik}{1+k^2}.$$

La serie di Fourier associata è data da

$$\begin{aligned} S[f](t) &= \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \frac{1+ik}{1+k^2} e^{ikt} = \\ &= \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{1+k^2} (\cos(kt) - k \sin(kt)) \right). \end{aligned}$$

In figura ecco il grafico di f e della sua proiezione su V_5 :



4. ESERCIZI

4.1. Polinomi nel piano e sulla circonferenza unitaria.

Esercizio 4.1. Determina, sia in forma complessa che in forma reale, i polinomi trigonometrici corrispondenti ai seguenti polinomi in due variabili:

$$P_1(x, y) = (1 + 2i)x + (3 - 4i)y;$$

$$P_2(x, y) = 1 + y + x^2;$$

$$P_3(x, y) = x^3 - iy^3;$$

$$P_4(x, y) = 16ix^3y.$$

Esercizio 4.2. Scrivi in forma estesa complessa e in forma estesa reale i seguenti polinomi trigonometrici:

$$p_1(t) = (\sin t)(\cos t);$$

$$p_2(t) = \cos(3t)e^{-2it};$$

$$p_3(t) = (1 + \sin t)^4.$$

Esercizio 4.3. Dimostra che le funzioni periodiche $t \mapsto e^{ikt}$ sono tra loro linearmente indipendenti al variare di $k \in \mathbb{Z}$ senza utilizzare l'ortogonalità.

Esercizio 4.4. Dimostra che ogni polinomio trigonometrico $p \in V_n$ della forma (2) con coefficienti reali, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, può essere scritto in modo unico nella forma

$$p(t) = \sum_{k=0}^n A_k \cos(kt + \phi_k),$$

con coefficienti $A_k \geq 0$ e $\phi_k \in]-\pi, \pi]$. Determina quale relazione intercorre tra i coefficienti a_k, b_k e i coefficienti A_k, ϕ_k .

4.2. Approssimazioni in L^2 con polinomi trigonometrici.

Esercizio 4.5. Spiega perché la convoluzione periodica di due funzioni di $L^2([\pi, \pi])$ è una funzione continua e periodica.

Esercizio 4.6. Calcola la convoluzione periodica $f * g$ nei seguenti casi:

(1) $f(t) = (\sin t)^2, g(t) = (\cos t)^4;$

(2) f è l'onda quadra dell'esempio 3.6 e g è l'onda a dente di sega dell'esempio 3.7.

Esercizio 4.7. Determina la miglior approssimazione in $L^2([-\pi, \pi])$ con un polinomio trigonometrico di grado 2 per la funzione $\cosh(t)$.

4.3. Serie di Fourier.

Esercizio 4.8. Cosa puoi dire della serie di Fourier associata ad un polinomio trigonometrico?

Esercizio 4.9. Sia $f(t)$ una funzione 2π -periodica e localmente integrabile e sia $g(t) = f(t - t_*)$ la traslazione di f di passo t_* . Determina il legame che intercorre tra i coefficienti di Fourier di f e i coefficienti di Fourier di g , sia nella notazione esponenziale, che nella notazione trigonometrica.

Nei seguenti esercizi ti viene chiesto di calcolare i termini della serie di Fourier di alcune funzioni. Dopo aver fatto i conti, con l'aiuto di un calcolatore elettronico, disegna i grafici delle funzioni e sovrapponi su essi i grafici della somma dei primi termini della serie, osserva anche cosa succede all'aumentare dei termini.

Esercizio 4.10. Calcola la serie di Fourier della funzione 2π -periodica che coincide con $(t)_+$ (parte positiva di t) per $|t| \leq \pi$.

Esercizio 4.11. Calcola la serie di Fourier della funzione 2π -periodica che coincide con $\pi^2 - t^2$ per $|t| \leq \pi$.

Esercizio 4.12. Sia $0 < \lambda < 1$. Calcola la serie di Fourier della funzione 2π -periodica che coincide con $\sin(\lambda t)$ per $|t| \leq \pi$. (Attenzione si tratta di una funzione con discontinuità in $\pm\pi$.)