ANALISI 3 - L22: PROPRIETÀ DEL CALCOLO DELLE DISTRIBUZIONI

Quando una distribuzione T corrisponde ad una funzione localmente integrabile f essa è definita dalla relazione

$$\langle T, \phi \rangle = \int f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}.$$

Possiamo di fatto identificare la distribuzione T con la funzione f. Una funzione localmente integrabile dipende da una variabile reale, mentre una distribuzione è un funzionale definito su uno spazio di funzioni test. Con un abuso di notazione indicheremo a volte una qualsiasi distribuzione T con la scrittura "$T(x)$", come se fosse una funzione che dipende dalla variabile x, in realtà la "x" indica la variabile indipendente da cui dipendono le funzioni test, la scelta della lettera è puramente arbitraria,

$$\langle T, \phi \rangle = \langle T(x), \phi(x) \rangle = \langle T(y), \phi(y) \rangle, \qquad \phi \in \mathcal{D}, \quad T \in \mathcal{D}'.$$

Vediamo come possiamo estendere operazioni che agiscono su funzioni ordinarie (funzioni test o localmente integrabili) allo spazio delle funzioni generalizzate (distribuzioni).

1. Operazioni algebriche con distribuzioni

La prima osservazione è che lo spazio $\mathcal{D}'$ delle distribuzioni è uno spazio vettoriale. Dunque sono ben definite combinazioni lineari di distribuzioni: se $S, T \in \mathcal{D}'$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ abbiamo che $\lambda S + \mu T$ è la distribuzione definita per linearità da

$$\langle \lambda S + \mu T, \phi \rangle := \lambda \langle S, \phi \rangle + \mu \langle T, \phi \rangle, \quad \phi \in \mathcal{D}.$$

1.1. Moltiplicazione per una funzione liscia.

Lemma 1.1. *Siano ψ e ϕ due funzioni C^∞. Il prodotto $\psi\phi$ è una funzione C^∞ e per ogni $j \in \mathbb{N}_0$ abbiamo che la derivata $\partial^j(\psi\phi)$ si può scrivere come una combinazione lineare di prodotti della forma $(\partial^{j_1}\psi)(\partial^{j_2}\phi)$ con $j_1, j_2 \in N_0$ e $j_1 + j_2 = j$.*

Dimostrazione. Quando $j = 1$, per la regola di Leibniz della derivata del prodotto abbiamo

$$\partial(\psi\phi) = \psi(\partial\phi) + (\partial\psi)\phi.$$

In generale

$$\partial^{j+1}(\psi\phi) = \partial^j\big(\psi(\partial\phi)\big) + \partial^j\big((\partial\psi)\phi\big),$$

e il risultato si ottiene facilmente procedendo per induzione. □

Data una funzione liscia $\psi \in C^\infty$, se f è una funzione localmente integrabile e ϕ è una funzione test, abbiamo che ψf è ancora una funzione localmente integrabile e $\psi\phi$ è ancora una funzione test,

$$\psi \in C^\infty, f \in L^1_{\mathrm{loc}}, \psi \in \mathcal{D} \implies \psi f \in L^1_{\mathrm{loc}}, \psi\phi \in \mathcal{D}.$$

Per la proprietà associativa del prodotto abbiamo

$$\langle \psi f, \phi \rangle = \int (\psi f)\phi \,\mathrm{d}x = \int f(\psi\phi)\,\mathrm{d}x = \langle f, \psi\phi \rangle.$$

Date: ultimo aggiornamento, 7 gennaio 2021.

Quest'ultima formula ci suggerisce come definire il prodotto ψT per ogni distribuzione T e ogni funzione liscia ψ, ponendo semplicemente

$$\langle \psi T, \phi \rangle := \langle T, \psi\phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}.$$

Si vede facilmente che questa relazione definisce un funzionale lineare su $\mathcal{D}$. Verifichiamo che ψT è un funzionale continuo. Consideriamo una successione $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni test che converge a 0 in $\mathcal{D}$. Esisterà dunque un compatto K che contiene tutti i supporti delle ϕ_n, e quindi conterrà anche tutti i supporti dei prodotti $\psi\phi_n$. Sul compatto K la funzionne ψ e tutte le sue derivate sono funzioni limitate e dunque utilizzando il lemma 1.1 ogni derivata di $\psi\phi_n$ si può controllare con un numero finito di derivate di ϕ_n,

$$\left|\partial^j(\psi\phi_n)\right| \leqslant C \sum_{\substack{j_1,j_2 \geqslant 0 \\ j_1+j_2=j}} \left|\partial^{j_1}\psi\right| \left|\partial^{j_2}\phi_n\right| \leqslant \widetilde{C} \max_{0\leqslant j_2 \leqslant j} \left|\partial^{j_2}\phi_n\right|.$$

Siccome la successione delle derivate $(\partial^{j_2}\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a 0 per ogni j_2, ne segue che anche la successione delle derivate $(\partial^j(\psi\phi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a 0 per ogni j. Dunque la successione $(\psi\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a zero in $\mathcal{D}$. Per la continuità di T abbiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \langle \psi T, \phi_n \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T, \psi\phi_n \rangle = 0,$$

e quindi ψT è continua.

Esempio 1.2. Se moltiplichiamo la delta di Dirac $T := \delta$ con la funzione $\psi(x) := x$ otteniamo

$$\langle x\delta, \phi(x) \rangle = \langle \delta(x), x\phi(x) \rangle = 0\phi(0) = 0.$$

Dunque $x\delta$ è la distribuzioine identicamente nulla.

Esempio 1.3. Se moltiplichiamo la distribuzione $T(x) := \text{p.v.}\frac{1}{x}$ con la funzione $\psi(x) := x$ otteniamo

$$\begin{aligned}\langle x\,\text{p.v.}\frac{1}{x}, \phi \rangle = \langle \text{p.v.}\frac{1}{x}, x\phi(x) \rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{1}{x} \cdot x\phi(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \phi(x)\,\mathrm{d}x = \int \phi(x)\,\mathrm{d}x = \langle 1, \phi \rangle.\end{aligned}$$

Dunque $x\,\text{p.v.}\frac{1}{x}$ è la distribuzione che corrisponde alla funzione costante 1.

1.2. **Cambi di variabili lineari affini.** Possiamo operare nello spazio delle distribuzioni delle trasformazioni che agiscono esattamente come dei cambi della variabile indipendente. Osservando la loro azione su funzioni localmente integrabili e funzioni test possiamo poi replicare lo stesso meccanismo per distribuzioni:

Traslazioni: Per ogni $p \in \mathbb{R}$ sia $\tau_p(x) = x + p$ la traslazione di passo p. Data una funzione $f \in L^1_{\text{loc}}$, la sua traslata di passo p è la funzione

$$f(x+p) = (f \circ \tau_p)(x).$$

Chiamiamo τ_p anche l'operatore che ad f associa la sua traslata $f \circ \tau_p$,

$$\tau_p \colon L^1_{\text{loc}} \to L^1_{\text{loc}}, \quad \tau_p[f] := f \circ \tau_p.$$

L'azione della traslata su funzioni test è data da

$$\langle \tau_p[f], \phi \rangle = \int f(x+p)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \int f(y)\phi(y-p)\,\mathrm{d}y = \langle f, \phi \circ \tau_{-p} \rangle.$$

Definiamo allora la *traslata* di passo p di una distribuzione $T \in \mathcal{D}'$ come la distribuzione

$$\langle \tau_p[T], \phi \rangle := \langle T, \phi \circ \tau_{-p} \rangle.$$

Si verifica facilmente che $\tau_p[T]$ è ancora una distribuzione in $\mathcal{D}'$. La notazione $\tau_p[T]$ per la traslata è un po' pedante e nella pratica preferiamo indicarla con $T(x+p)$, dove è sottinteso che x è la variabile indipendente usata per le funzioni test, mentre p è il passo (fissato) della traslazione, scriveremo quindi

$$\langle T(x+p), \phi(x)\rangle = \langle T(x), \phi(x-p)\rangle.$$

Omotetie: Per ogni $\lambda > 0$ sia $\sigma_\lambda(x) = \lambda x$ l'omotetia (riscalamento) di fattore λ. Data una funzione $f \in L^1_{\text{loc}}$, la sua riscalata di fattore λ è la funzione

$$f(\lambda x) = (f \circ \sigma_\lambda)(x).$$

Chiamiamo σ_λ anche l'operatore che ad f associa la sua riscalata $f \circ \sigma_\lambda$,

$$\sigma_\lambda \colon L^1_{\text{loc}} \to L^1_{\text{loc}}, \quad \sigma_\lambda[f] := f \circ \sigma_\lambda.$$

L'azione della riscalata su funzioni test è data da

$$\langle \sigma_\lambda[f], \phi\rangle = \int f(\lambda x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \int f(y)\phi\Big(\frac{1}{\lambda}y\Big)\frac{1}{\lambda}\,\mathrm{d}y = \langle f, \frac{1}{\lambda}\phi \circ \sigma_{1/\lambda}\rangle.$$

Definiamo allora la *riscalata* di fattore λ di una distribuzione $T \in \mathcal{D}'$ come la distribuzione

$$\langle \sigma_\lambda[T], \phi\rangle := \langle T, \frac{1}{\lambda}\phi \circ \sigma_{1/\lambda}\rangle.$$

Si verifica facilmente che $\sigma_\lambda[T]$ è ancora una distribuzione in $\mathcal{D}'$. La notazione $\tau_p[T]$ per la traslata è un po' pedante e nella pratica si preferiamo indicarla con $T(\lambda x)$, dove è sottinteso che x è la variabile indipendente usata per le funzioni test, mentre λ è il fattore (fissato) di riscalamento, scriveremo quindi

$$\langle T(\lambda x), \phi(x)\rangle = \langle T(x), \frac{1}{\lambda}\phi\left(\frac{1}{\lambda}x\right)\rangle.$$

Rovesciamento: Data una funzione $f \in L^1_{\text{loc}}$, la sua rovesciata è la funzione

$$f_R(x) = f(-x).$$

L'azione della rovesciata f_R su funzioni test è data da

$$\langle f_R, \phi\rangle = \int f(-x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \int f(y)\phi(-y)\,\mathrm{d}y = \langle f, \phi_R\rangle.$$

Definiamo allora la *rovesciata* T_R di una distribuzione $T \in \mathcal{D}'$ come la distribuzione

$$\langle T_R, \phi\rangle := \langle T, \phi_R\rangle.$$

Si verifica facilmente che T_R è ancora una distribuzione in $\mathcal{D}'$. Nella pratica scriveremo $T_R(x) = T(-x)$,

$$\langle T(-x), \phi(x)\rangle = \langle T(x), \phi(-x)\rangle.$$

Coniugio: Data una funzione $f \in L^1_{\text{loc}}$, la sua coniugata è la funzione

$$\overline{f}(x) := \overline{f(x)}.$$

L'azione della coniugata su funzioni test è data da

$$\langle \overline{f}, \phi\rangle = \int \overline{f(x)}\phi(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int f(x)\overline{\phi(x)}\,\mathrm{d}x} = \overline{\langle f, \overline{\phi}\rangle}.$$

Definiamo allora la *coniugata* $\overline{T}$ di una distribuzione $T \in \mathcal{D}'$ come la distribuzione

$$\langle \overline{T}, \phi\rangle := \overline{\langle T, \overline{\phi}\rangle}.$$

Si verifica facilmente che $\overline{T}$ è ancora una distribuzione in $\mathcal{D}'$.

Esempio 1.4. La delta di Dirac concentrata nel punto p non è altro che una traslata della delta di Dirac concentrata nell'origine:

$$\langle \delta_p, \phi\rangle = \phi(p) = \phi(0+p) = \langle \delta_0(x), \phi(x+p)\rangle = \langle \delta_0(x-p), \phi(x)\rangle,$$

dunque $\delta_p = \tau_{-p}[\delta_0]$, ovvero $\delta_p(x) = \delta_0(x-p)$.

Calcoliamo la riscalata della delta di Dirac concentrata nell'origine:

$$\langle \delta(\lambda x), \phi(x)\rangle = \langle \delta(x), \frac{1}{\lambda}\phi\Big(\frac{1}{\lambda}x\Big)\rangle = \frac{1}{\lambda}\phi\Big(\frac{0}{\lambda}\Big) = \frac{1}{\lambda}\langle \delta, \phi\rangle.$$

Dunque abbiamo $\delta(\lambda x) = \frac{1}{\lambda}\delta(x)$.

Osservazione 1.5. Possiamo combinare insieme queste operazioni e ottenere cambi di variabili di tipo lineare affine per ogni distribuzione. Siano $\lambda \neq 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, data una distribuzione $T \in \mathcal{D}'$, possiamo definire la distribuzione $T(\lambda x+\mu)$ combinando riscalmenti e traslazioni: prima di essere data in pasto alla T la variabile x subisce un riscalamento e una traslazione, dunque

$$T(\lambda x + \mu) = \sigma_\lambda\big[\tau_\mu[T]\big],$$

ovvero

$$\langle T(\lambda x+\mu), \phi(x)\rangle = \langle T(y+\mu), \frac{1}{\lambda}\phi\Big(\frac{y}{\lambda}\Big)\rangle = \langle T(x), \frac{1}{\lambda}phi\Big(\frac{x-\mu}{\lambda}\Big)\rangle.$$

Esempio 1.6. Determiniamo la distribuzione p.v.$\frac{1}{2x-3}$.

$$\langle \text{p.v.}\frac{1}{2x-3}, \phi(x)\rangle = \langle \text{p.v.}\frac{1}{y}, \frac{1}{2}\phi\Big(\frac{y+3}{2}\Big)\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|y|>\varepsilon} \frac{1}{y}\cdot\frac{1}{2}\phi\Big(\frac{y+3}{2}\Big)\,\mathrm{d}y =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|2x-3|>\varepsilon} \frac{1}{2x-3}\cdot\phi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|x-\frac{3}{2}|>\varepsilon}\frac{1}{x-\frac{3}{2}}\cdot\phi(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Derivate di distribuzioni

Consideriamo una funzione f di classe C^1. In quanto funzioni continue abbiamo $f, f' \in L^1_{\text{loc}}$. Data una funzione test $\phi \in \mathcal{D}$ anche la sua derivata è una funzione test e integrando per parti troviamo che

$$\langle f', \phi\rangle = \int f'(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = -\int f(x)\phi'(x)\,\mathrm{d}x = -\langle f, \phi'\rangle.$$

Questa formula ci suggerisce la naturale definizione per la derivata di una distribuzione.

Definizione 2.1. Data una distribuzione $T \in \mathcal{D}'$, la sua *derivata* T' (nel senso delle distribuzioni) è la distribuzione definita da

$$\langle T', \phi\rangle = -\langle T, \phi'\rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}.$$

La linearità di T' segue immediatamente dalla linearità di T e dalla linearità dell'operazione di derivata su $\mathcal{D}$. La continuità di T' segue facilmente dalla continuità di T e dal fatto che se $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di funzioni test che converge a zero allora anche $(\phi_n')_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di funzioni test che converge a zero.

Osservazione 2.2. Tutte le distribuzioni sono derivabili! Anche quelle che corrispondono a funzioni localmente integrabili ma non derivabili nel senso classico. Anche le distribuzioni che non corrispondono ad alcuna funzione localmente integrabile. Quando sia una distribuzione che la sua derivata corrispondono a funzioni localmente integrabili allora la derivata distribuzionale coincide con la derivata debole.

Esempio 2.3. La derivata della delta di Dirac è la distribuzione

$$\langle \delta', \phi\rangle = -\langle \delta, \phi'\rangle = -\phi'(0).$$

Esempio 2.4. Calcoliamo la derivata distribuzionale della funzione gradino di Heaviside definita da

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ 1, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Per ogni $\phi \in \mathcal{D}$ abbiamo

$$\langle H', \phi \rangle = -\langle H, \phi' \rangle = -\int_0^{+\infty} \phi'(x)\,\mathrm{d}x = \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle.$$

Dunque la derivata del gradino è una delta di Dirac, $H' = \delta$. Osserviamo che $H \in L^1_{\mathrm{loc}}$, mentre H' è una distribuzione che non corrisponde a nessuna funzione.

Esempio 2.5. Calcoliamo la derivata della funzione $f(x) := \log|x| \in L^1_{\mathrm{loc}}$. Per ogni $\phi \in \mathcal{D}$ abbiamo

$$\langle f', \phi \rangle = -\langle \log|x|, \phi'(x) \rangle = -\int \log|x|\ \phi'(x)\,\mathrm{d}x = -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \log|x|\ \phi'(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \log(-x)\,\phi'(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \log(x)\,\phi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Integrando per parti abbiamo

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \log(-x)\,\phi'(x)\,\mathrm{d}x = (\log\varepsilon)\,\phi(-\varepsilon) - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\phi(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \log(x)\,\phi'(x)\,\mathrm{d}x = -(\log\varepsilon)\,\phi(\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{x}\phi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Siccome $\phi(-\varepsilon) - \phi(\varepsilon) \approx -2\phi'(0)\varepsilon$ per $\varepsilon \to 0^+$, abbiamo che

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} (\log\varepsilon)\,\phi(-\varepsilon) - (\log\varepsilon)\,\phi(\varepsilon) = -2\phi'(0) \lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon \log\varepsilon = 0.$$

Sommando i contributi dei due integrali ricaviamo che

$$\langle f', \phi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{1}{x}\phi(x)\,\mathrm{d}x = \langle \mathrm{p.v.}\frac{1}{x}, \phi(x) \rangle.$$

Dunque la derivata della funzione $\log|x|$ è la distribuzione $\mathrm{p.v.}\frac{1}{x}$.

La regola di Leibniz per la derivata del prodotto continua a valere anche nel caso di un prodotto tra una funzione liscia e una distribuzione.

Proposizione 2.6. *Sia $\psi \in C^\infty$ e $T \in \mathcal{D}'$. Allora*

$$(\psi T)' = \psi' T + \psi T'.$$

Dimostrazione. Si tratta di ua semplice verifica. Sia $\phi \in \mathcal{D}$. Osserviamo che

$$\langle (\psi T)', \phi \rangle = -\langle \psi T, \phi' \rangle = \langle T, -\psi\phi' \rangle.$$

D'altra parte,

$$\langle \psi' T + \psi T', \phi \rangle = \langle T, \psi'\phi \rangle + \langle T', \psi\phi \rangle = \langle T, \psi'\phi \rangle - \langle T, (\psi\phi)' \rangle =$$
$$= \langle T, \psi'\phi - (\psi\phi)' \rangle = \langle T, -\psi\phi' \rangle.$$

□

Esempio 2.7. Abbiamo visto che il prodotto $x\delta$ coincide con la distribuzione nulla. Per la regola di Leibniz avremo allora che

$$0 = (x\delta)' = 1\delta + x\delta'.$$

Ricaviamo così che $x\delta' = -\delta$. Potevamo ottenere lo stesso risultato anche in un atro modo:

$$\begin{aligned} 0 = \langle x\delta', \phi\rangle = \langle \delta', x\phi\rangle = -\langle \delta, (x\phi)'\rangle = -\langle \delta, \phi + x\phi'\rangle = \\ = -\left(\phi(0) + 0\phi'(0)\right) = -\phi(0) = \langle -\delta, \phi\rangle. \end{aligned}$$

Data una funzione test $\phi(x)$ anche la sua derivata $\phi'(x)$ e la funzione $x\phi(x)$ sono ancora funzioni test, ma non tutte le funzioni test sono la derivata di una funzione test, e non tutte le funzioni test sono della forma $x\phi$ con ϕ funzione test. Il seguente lemma ci fornisce una utile caratterizzaione di queste condizioni.

Lemma 2.8. *Sia $\phi \in \mathcal{D}$. Allora:*

(A) *esiste $\psi \in \mathcal{D}$ tale che $\phi = \psi'$ se e solo se $\int \phi = 0$;*
(B) *esiste $\psi \in \mathcal{D}$ tale che $\phi = x\psi$ se e solo se $\phi(0) = 0$.*

Dimostrazione. Vediamo il punto (A). Se $\phi = \psi'$ allora

$$\int \phi = \int \psi' = \psi(+\infty) - \psi(-\infty) = 0 - 0 = 0.$$

Viceversa, se $\int \phi = 0$ la funzione integrale $\psi(x) := \int_{-\infty}^{x} \phi(y)\ dy$, per il teorema fondamentale del calcolo, è primitiva di ϕ, e dunque $\phi = \psi'$. Essendo ϕ una funzione C^∞ anche ψ risulta essere C^∞. Rimane da verificare che ψ ha supporto compatto. Se $\operatorname{supp}\phi \subseteq [a, b]$ avremo che

$$x < a \implies \psi(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \,\mathrm{d}x = 0,$$

e, per l'ipotesi sulla ϕ, avremo anche

$$x > b \implies \psi(x) = \int \phi \,\mathrm{d}x = 0,$$

e quindi $\operatorname{supp}\psi \subseteq [a, b]$. Dunque ψ ha supporto compatto.

Vediamo il punto (B). Se $\phi(x) = x\psi(x)$ allora

$$\phi(0) = 0\psi(0) = 0.$$

Viceversa, supponiamo che $\phi(0) = 0$, per la regola di De L'Hopital abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\phi(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \phi'(x) = \phi'(0).$$

La funzione ψ definita da

$$\psi(x) := \begin{cases} \frac{\phi(x)}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ \phi'(0), & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

risulta dunque continua, con lo stesso supporto compatto di ϕ, e $\phi(x) = x\psi(x)$ per ogni x. Rimane da verificare che si tratta di una funzione liscia C^∞. Osserviamo che

$$\phi(x) = \phi(x) - \phi(0) = \int_0^x \phi'(y)\,\mathrm{d}y = x\int_0^1 \phi'(tx)\,\mathrm{d}t,$$

e dunque $\psi(x) = \int_0^1 \phi'(tx)\,\mathrm{d}t$ per ogni x. Possiamo derivare sotto il segno di integrale, otteniamo così che ψ è derivabile; derivando ripetutamente troviamo che valgono le formule

$$\psi^{(j)}(x) = \int_0^1 \phi^{(j+1)}(tx)t^j \,\mathrm{d}t,$$

per ogni $j \in \mathbb{N}$. Quindi ψ è C^∞ e dunque è una funzione test. □

Utilizzando la parte (A) del lemma possiamo mostrare che anche per le distribuzioni continua a valere la proprietà che ci dice che le uniche distribuzioni con derivata identicamente nulla sono solo le distribuzioni corrispondenti alle funzioni costanti.

Proposizione 2.9. *Sia $T \in \mathcal{D}'$. Se T' è la distribuzione nulla allora T coincide con una funzione costante, ovvero esiste $c \in \mathbb{C}$ tale che $\langle T, \phi \rangle = k \int \phi$ per ogni $\phi \in \mathcal{D}$.*

Dimostrazione. Fissiamo una funzione test $\chi \in \mathcal{D}$ con $\int \chi \neq 0$. Sia $\phi \in \mathcal{D}$ una qualsiasi altra funzione test. La combinazione lineare

$$\gamma(x) = \Big(\int \chi\Big)\phi(x) - \Big(\int \phi\Big)\chi(x)$$

è ancora una funzione test. Siccome

$$\int \gamma = \Big(\int \chi\Big) \int \phi - \Big(\int \phi\Big) \int \chi = 0,$$

per la parte (A) del lemma 2.8 abbiamo che esiste una funzione test $\psi \in \mathcal{D}$ primitiva di γ. Per l'ipotesi $T' = 0$ e per linearità abbiamo che

$$0 = \langle T', \psi \rangle = -\langle T, \gamma \rangle = \Big(\int \chi\Big)\langle T, \phi \rangle - \Big(\int \phi\Big)\langle T, \chi \rangle.$$

Ricaviamo allora che

$$\langle T, \phi \rangle = \frac{\langle T, \chi \rangle}{\int \chi} \cdot \int \phi = c \int \phi,$$

con $c := \frac{\langle T, \chi \rangle}{\int \chi}$ costante indipendente da ϕ. $\square$

Osservazione 2.10. La proposizione 2.9 ci fornisce uno strumento utile per poter risolvere equazioni differenziali (lineari) nell'ambito delle distribuzioni. Consideriamo ad esempio l'equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea con un termine forzante impulsivo rappresentato da una delta di Dirac,

$$U' + a(x)U = \delta, \tag{1}$$

dove l'incognita U è una distribuzione e il coefficiente $a(x)$ è una funzione C^∞. Sia $A(x) := \int_0^x a(y)\,\mathrm{d}y$ la primitiva di $a(x)$ con $A(0) = 0$, per la regola di Leibniz abbiamo

$$\partial(\mathrm{e}^A U) = \mathrm{e}^A U' + \mathrm{e}^A A' U = \mathrm{e}^A\,(U' + aU) = \mathrm{e}^A \delta = \mathrm{e}^{A(0)}\delta = \delta.$$

Sappiamo che $\delta = H'$ dove H è il gradino di Heaviside e dunque

$$\partial\left(\mathrm{e}^A U - H\right) = \delta - H' = 0.$$

Applicando la proposizione troviamo che $\mathrm{e}^A U - H$ coincide con una costante c e quindi troviamo che tutte le soluzioni nell'ambito delle distribuzioni dell'equazione sono funzioni della forma

$$U(x) = \mathrm{e}^{A(x)}\,(c + H(x))\,.$$

La seguente proposizione è analoga alla precedente, in cui il ruolo dellle derivate è sostituito da moltiplicazioni per x e con il ruolo delle funzioni costanti sostituito da multipli della delta.

Proposizione 2.11. *Sia $T \in \mathcal{D}'$. Se xT è la distribuzione nulla allora T è un multiplo della delta di Dirac, ovvero esiste $c \in \mathbb{C}$ tale che $\langle T, \phi \rangle = c\phi(0)$ per ogni $\phi \in \mathcal{D}$.*

Dimostrazione. Fissiamo una funzione test $\chi \in \mathcal{D}$ con $\chi(0) \neq 0$. Sia $\phi \in \mathcal{D}$ una qualsiasi altra funzione test. La combinazione lineare

$$\gamma(x) = \chi(0)\phi(x) - \phi(0)\chi(x)$$

è ancora una funzione test. Siccome

$$\gamma(0) = \chi(0)\phi(0) - \phi(0)\chi(0) = 0,$$

per la parte (B) del lemma 2.8 abbiamo che esiste una funzione test $\psi \in \mathcal{D}$ tale che $\gamma = x\psi$. Per l'ipotesi $xT = 0$ e per linearità abbiamo che

$$0 = \langle xT, \psi\rangle = \langle T, \gamma\rangle = \chi(0)\langle T, \phi\rangle - \phi(0)\langle T, \chi\rangle.$$

Ricaviamo allora che

$$\langle T, \phi\rangle = \frac{\langle T, \chi\rangle}{\chi(0)} \cdot \phi(0) = c\phi(0),$$

con $c := \frac{\langle T,\chi\rangle}{\chi(0)}$ costante indipendente da ϕ. □

3. Supporto di una distribuzione

Il supporto di una funzione continua ψ è definito come la chiusura dell'insieme dei punti in cui la funzione non si annulla,

$$\operatorname{supp} \psi = \overline{\{x \in \mathbb{R} \colon \psi(x) \neq 0\}},$$

ma possiamo considerarlo anche come il complementare del più grande aperto su cui ψ è identicamente nulla. Questo concetto possiamo trasferirlo anche nel contesto delle distribuzioni.

Definizione 3.1. Sia $T \in \mathcal{D}'$ una distribuzione. Diciamo che T si *annulla* su un aperto $A \subseteq \mathbb{R}$ quando $\langle T, \phi\rangle = 0$ per ogni funzione test $\phi \in \mathcal{D}$ il cui supporto è contenuto in A. Diciamo che T si annulla *localmente* intorno al punto $p \in \mathbb{R}$ quando esiste un intorno aperto A di p sul quale T si annulla. L'insieme dei punti nei quali T si annulla localmente è un insieme aperto, il suo complementare si dice *supporto* della distribuzione T e lo indichiamo con $\operatorname{supp} T$. Abbiamo dunque che

$$p \notin \operatorname{supp} T \iff T \text{ si annulla su un intorno di } p.$$

Osservazione 3.2. Si può dimostrare che se il supporto di una funzione test ϕ è disgiunto dal supporto della distribuzione T allora $\langle T, \phi\rangle = 0$.

Esempio 3.3. Il supporto della delta di Dirac δ è il singoletto $\{0\}$. Infatti, data una funzione test ϕ, se $0 \notin \operatorname{supp} \phi$ abbiamo

$$\langle \delta, \phi\rangle = \phi(0) = 0.$$

Dunque δ si annulla su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e perciò $\operatorname{supp} \delta \subseteq \{0\}$. Inltre, siccome per ogni intorno A di 0 esistono funzioni test con supporto in A e con $\phi(0) \neq 0$ abbiamo che δ non si annulla localmente intorno a 0, dunque $0 \in \operatorname{supp} \delta$. Ne segue che

$$\operatorname{supp} \delta = \{0\}\,.$$

Proposizione 3.4. *Ogni distribuzione con supporto compatto ha ordine finito.*

Dimostrazione. Supponiamo che la distribuzione $T \in \mathcal{D}'$ abbia supporto compatto contenuto nell'intervallo aperto e limitato $]a, b[$. Fissiamo una funzione cutoff $\chi \in \mathcal{D}$ tale che $\chi(x) = 1$ per ogni $x \in [a, b]$. Sia K il supporto compatto di χ; in corrispondenza di tale compatto K, per la continuità di T, abbiamo che esistono $m \in \mathbb{N}_0$ e $C \geqslant 0$ tali che

$$|\langle T, \psi\rangle| \leqslant C \sup_{\substack{x\in K\\ 0\leqslant j\leqslant m}} \left|\psi^{(j)}(x)\right|,$$

per ogni funzione test $\psi \in \mathcal{D}$ con supporto contenuto in K. Verifichiamo che T è una distribuzione di ordine minore o ugule all'indice m associato al compatto K. Scelta una qualsiasi funzione test $\phi \in \mathcal{D}$, possiamo decomporla nel seguente modo:

$$\phi = \chi\phi + (1-\chi)\phi.$$

Siccome il fattore $1-\chi$ si annulla su $[a,b]$ abbiamo che la funzione test $(1-\chi)\phi$ ha supporto disgiunto dal supporto di T e dunque $\langle T, (1-\chi)\phi\rangle = 0$. Invece la funzione test $\chi\phi$ ha supporto contenuto nel compatto K. Avremo allora che

$$|\langle T, \phi\rangle| = |\langle T, \chi\phi\rangle| \leqslant C \sup_{\substack{x\in K\\ 0\leqslant j\leqslant m}} \left|\partial^j(\chi\phi)(x)\right|.$$

Essendo tutte le derivate di χ limitate su K e nulle fuori da K, utilizzando il lemma 1.1, possiamo controllare ogni derivata del prodotto $\chi\phi$ con le derivate di ϕ,

$$\left|\partial^j(\chi\phi)\right| \leqslant C_1 \sum_{\substack{j_1,j_2\geqslant 0\\ j_1+j_2=j}} \left|\partial^{j_1}\chi\right| \left|\partial^{j_2}\phi\right| \leqslant C_2 \max_{0\leqslant j_2\leqslant j} \left|\partial^{j_2}\phi\right|.$$

Otteniamo così che

$$|\langle T, \phi\rangle| \leqslant C_3 \sup_{\substack{x\in \mathbb{R}\\ 0\leqslant j\leqslant m}} \left|\partial^j \phi)(x)\right|,$$

per ogni $\phi \in \mathcal{D}$ con supporto compatto qualsiasi. Questo ci dice che T ha ordine minore o uguale a m. □

4. Esercizi

4.1. Operazioni algebriche con distribuzioni.

Esercizio 4.1 (Cambi di variabile non lineari). Sia $T(x) \in \mathcal{D}'$ una distribuzione e sia $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞.

- Determina opportune condizioni sulla funzione g affinché si possa definire su L^1_{loc} l'operazione di composizione che ad ogni funzione f associa la funzione composta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.
- Estendi tale operazione allo spazio delle distribuzioni, in modo da dare un senso alla distribuzione $T(g(x))$ (intesa come un cambio non lineare di variabile indipendente).
- Definisci esplicitamnte la distribuzione $\delta(\mathrm{e}^{\lambda x})$.

4.2. Derivate di distribuzioni.

Esercizio 4.2. Calcola esplicitamente la distribuzione $\mathrm{e}^{\lambda x}\delta^{(k)}$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e ogni $k \in \mathbb{N}_0$.

Esercizio 4.3. Calcola la derivata distribuzionale della funzione parte intera

$$\lfloor x\rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z}\colon n \leqslant x\}.$$

Esercizio 4.4. Calcola le derivate prima, seconda e terza della funzione $x\,|x|$.

Esercizio 4.5. Calcola le derivate prima e seconda della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0,\\ \mathrm{e}^{-x}, & \text{se } x > 0.\end{cases}$$

Esercizio 4.6. Determina tutte le distribuzioni $T \in \mathcal{D}'$ che risolvono l'equazione differenziale $T'' = \delta$.

4.3. **Supporto di una distribuzione.**

Esercizio 4.7. Dimostra che se $f \in L^1_{\text{loc}}$ allora il supporto di f nel senso delle distribuzioni coincide con il supporto essenziale di f (rispetto alla misura di Lebesgue).

Esercizio 4.8. Determina il supporto della distribuzione p.v.$\frac{1}{x}$.

Esercizio 4.9. Sia $T \in \mathcal{D}'$. Dimostra che il supporto della derivata T' è contenuto nel supporto di T.

Esercizio 4.10. Sia $\psi \in C^\infty$ e sia $T \in \mathcal{D}'$ dimostra che

$$\operatorname{supp}(\psi T) \subseteq \operatorname{supp}\psi \cap \operatorname{supp} T.$$