

Analisi Matematica 3 - (Foschi) - esame del 7.2.2019

nome e cognome:

matricola:

Prima di svolgere gli esercizi leggi con attenzione il testo. Scrivi le tue risposte motivando ogni passaggio e **spiegando** in modo chiaro e leggibile le cose che fai. Ricorda di scrivere il tuo nome e numero di matricola su **ogni** foglio (compreso questo) e di riconsegnare al termine dell'esame **tutti** i fogli che hai usato (compresi i fogli di brutta copia, il testo del compito e l'eventuale foglio manoscritto con le formule che hai preparato).

(Con la notazione $\chi_{[a,b]}(x)$ si intende la funzione caratteristica dell'intervallo $[a, b]$.)

1. (4 punti) Per quali esponenti di $p \in [1, +\infty]$ si ha che la funzione $K(x) := \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}}$ appartiene allo spazio $L^p(]0, +\infty[)$?

Considera il funzionale definito da

$$Tf := \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} dx.$$

Considera inoltre le funzioni $f_L(x) := \chi_{[L, 2L]}(x)$.

2. (3 punti) Utilizzando il fatto che $\sqrt{x} < x + \sqrt{x} < 2\sqrt{x}$ quando $0 < x < 1$ fai vedere che Tf_L si comporta come L^β per $L \rightarrow 0^+$ e determina il valore di β .
3. (3 punti) Utilizzando il fatto che $x < x + \sqrt{x} < 2x$ quando $x > 1$ fai vedere che Tf_L si comporta come L^γ per $L \rightarrow +\infty$ e determina il valore di γ .
4. (4 punti) Per quali esponenti $q \in [1, +\infty]$ si ha che T è un funzionale lineare e continuo da $L^q(]0, +\infty[)$ a \mathbb{C} ?

Considera la funzione $g \in L^2(-\pi, \pi]$ definita da

$$g(x) := \begin{cases} x, & \text{se } |x| \leq \pi/2, \\ 0, & \text{se } x \in]-\pi, -\pi/2[\cup]\pi/2, \pi]. \end{cases}$$

5. (4 punti) Determina la serie di Fourier della funzione g in $L^2(]-\pi, \pi])$.
6. (3 punti) Determina la proiezione ortogonale della funzione g sullo spazio generato dalle funzioni $\sin(x)$, $\sin(2x)$, $\sin(3x)$.
7. (3 punti) Scrivendo l'identità di Bessel-Parsival per la funzione g , quale serie si riesce a calcolare?
8. (4 punti) Calcola la derivata di g nel senso delle distribuzioni (in $\mathcal{D}'(]-\pi, \pi])$).
9. (6 punti) Calcola la trasformata di Fourier (su \mathbb{R}) della funzione $h(x) := x^2 e^{3ix} \chi_{[0,4]}(x)$.