

Analisi Matematica 3 - (Foschi) - esame del 12.2.2019

nome e cognome:	matricola:
-----------------	------------

Prima di svolgere gli esercizi leggi con attenzione il testo. Scrivi le tue risposte motivando ogni passaggio e **spiegando** in modo chiaro e leggibile le cose che fai. Ricorda di scrivere il tuo nome e numero di matricola su **ogni** foglio (compreso questo) e di riconsegnare al termine dell'esame **tutti** i fogli che hai usato (compresi i fogli di brutta copia, il testo del compito e l'eventuale foglio manoscritto con le formule che hai preparato).

Considera la funzione $f(x) := \frac{1}{\sqrt{\log(1+x)}}$.

1. (3 punti) Determina per quali valori di $p \in [1, +\infty]$ si ha che $f \in L^p(]0, 1[)$.
2. (3 punti) Determina per quali valori di $p \in [1, +\infty]$ si ha che $f \in L^p(]1, e-1[)$.
3. (3 punti) Determina per quali valori di $p \in [1, +\infty]$ si ha che $f \in L^p(]e-1, +\infty[)$.

Considera lo spazio di Hilbert $H = L^2([-1, 1])$ dotato del prodotto scalare usuale. Sia V il sottospazio di H formato dalle funzioni pari con valore medio nullo.

4. (3 punti) Dimostra che V è chiuso.
5. (6 punti) Determina la proiezione ortogonale della funzione $g(x) = e^x$ su V in H .
6. (8 punti) Considera la funzione

$$h(x) := e^{-|x|} \frac{\sin x}{x}.$$

Calcola la trasformata di Fourier di h .

7. (6 punti) Calcola le derivate prima, seconda e terza, nel senso delle distribuzioni della funzione $K(x) := x|x|$.