

Analisi Matematica 3 - (Foschi) - esame del 30.1.2018

nome e cognome:

matricola:

Prima di svolgere gli esercizi leggi con attenzione il testo. Scrivi le tue risposte motivando ogni passaggio e **spiegando** in modo chiaro e leggibile le cose che fai. Ricorda di scrivere il tuo nome e numero di matricola su **ogni** foglio (compreso questo) e di riconsegnare al termine dell'esame **tutti** i fogli che hai usato (compresi i fogli di brutta copia, il testo del compito e l'eventuale foglio manoscritto con le formule che hai preparato).

1. (9 punti) Considera l'operatore lineare T_n definito da

$$T_n f(x) := n^{3/4} \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

e sia $\phi_n(t) := \chi_{[0,1/n]}(t)$ per $t \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

- Determina il comportamento asintotico per $n \rightarrow +\infty$ di $\|\phi_n\|_{L^2(\mathbb{R})}$ e di $\|T_n \phi_n\|_{L^p(\mathbb{R})}$ per $p \in [1, +\infty]$.
 - Per quali $p \in [1, +\infty]$ si ha che T_n è un operatore continuo da $L^2(\mathbb{R})$ a $L^p(\mathbb{R})$?
 - Cosa puoi dire del comportamento della norma operatoriale $\|T_n\|_{L^2 \rightarrow L^p}$ per $n \rightarrow \infty$?
2. (9 punti) Sia H lo spazio di Hilbert $L^2(-\pi, \pi)$ dotato del prodotto scalare standard. Sia V il sottospazio di H generato dalle funzioni

$$v_1(t) := 1, \quad v_2(t) := (\cos t)^2, \quad v_3(t) := (\sin t)^2,$$

e sia $g(t) := t_+ = \max\{t, 0\}$ per ogni $t \in]-\pi, \pi]$. Calcola la proiezione ortogonale $P_V g$ di g su V .

3. (9 punti) Utilizzando la trasformata di Fourier determina la soluzione $u(t, x)$ del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 2u_x, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(0, x) = x e^{-(x-1)^2}. \end{cases}$$

4. (9 punti) Determina due distribuzioni (temperate) S e T tali che

$$\begin{cases} \delta'' * S + \delta' * T = \delta, \\ \delta' * S + \delta'' * T = 0. \end{cases}$$

Qui δ indica la distribuzione di Dirac concentrata nell'origine di \mathbb{R} . Sai dire se la soluzione di questo problema è unica?