Analisi Matematica 3 - (Foschi) - esame del 21.7.2017

nome e cognome:	matricola:

Prima di svolgere gli esercizi leggi con attenzione il testo. Scrivi le tue risposte motivando ogni passaggio e **spiegando** in modo chiaro e leggibile le cose che fai. Ricorda di scrivere il tuo nome e numero di matricola su **ogni** foglio (compreso questo) e di riconsegnare al termine dell'esame **tutti** i fogli che hai usato (compresi i fogli di brutta copia, il testo del compito e l'eventuale foglio manoscritto con le formule che hai preparato).

Considera la funzione $f(x)$ definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ dal seguente integrale:

$$f(x) := \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+(t-x)^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. (2 punti) Calcola il valore della norma $\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$.
2. (3 punti) Dimostra che $f \in L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1, +\infty]$.
3. (4 punti) Calcola la trasformata di Fourier $\widehat{f}(\xi)$.

   Sia $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base ortonormale di uno spazio di Hilbert H. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo $d_n := e_{n+1} - e_n$.

4. (2 punti) Calcola $\langle d_m, d_n \rangle$ al variare di $m, n \in \mathbb{N}$.
5. (3 punti) Dimostra che per ogni $v \in H$ si ha $\lim_{n\to\infty} \langle v, d_n \rangle = 0$.
6. (4 punti) Dato $v \in H$, dimostra che se $\langle v, d_n \rangle = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ allora $v = 0$.

   Considera la successione di funzioni

   $$G_n(x) := \arctan(\sqrt{n}x), \qquad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},$$

   e la successione delle corrispondenti derivate

   $$g_n(x) := G_n'(x) = \frac{\sqrt{n}}{1+nx^2}, \qquad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

7. (2 punti) Determina il limite puntuale per $n \to \infty$ delle successioni $G_n(x)$ e $g_n(x)$ al variare di $x \in \mathbb{R}$.
8. (3 punti) Fissato $p \geqslant 1$, determina $\beta \in \mathbb{R}$ in modo che il limite $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\|g_n\|_{L^p(\mathbb{R})}}{n^\beta}$ abbia valore finito non nullo.
9. (4 punti) Determina, nel senso delle distribuzioni, il limite per $n \to \infty$ di g_n.
10. (5 punti) Data $h(x) \in L^2(\mathbb{R})$, determina mediante l'uso della trasformata di Fourier una soluzione $u(t, x)$ del problema

    $$\begin{cases} \partial_t^2 u + \partial_x^2 u - u = 0, & \text{per } 0 < t < 1 \text{ e } x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = 0, \\ u(1, x) = h(x), \end{cases}$$

    con $u(t, \cdot) \in L^2(\mathbb{R})$ per $0 < t < 1$, tale che $\|u(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \|h\|_{L^2(\mathbb{R})}$.