

### Analisi Matematica 3 - (Foschi) - esame del 13.2.2018

nome e cognome:

matricola:

Prima di svolgere gli esercizi leggi con attenzione il testo. Scrivi le tue risposte motivando ogni passaggio e **spiegando** in modo chiaro e leggibile le cose che fai. Ricorda di scrivere il tuo nome e numero di matricola su **ogni** foglio (compreso questo) e di riconsegnare al termine dell'esame **tutti** i fogli che hai usato (compresi i fogli di brutta copia, il testo del compito e l'eventuale foglio manoscritto con le formule che hai preparato).

1. (9 punti) Sia  $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 < y\}$  e sia

$$f(x, y) := \frac{\chi_{\Omega}(x, y)}{(1 + y^2) (\log(1 + \sqrt{y}))^2}.$$

Determina per quali  $p \in [1, +\infty]$  si ha che  $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$ .

2. (9 punti) Sia  $H$  lo spazio di Hilbert  $L^2([-1, 1])$  dotato del prodotto scalare standard  $\langle \phi, \psi \rangle := \int_{-1}^1 \phi(x) \overline{\psi(x)} dx$ . Considera l'operatore lineare

$$T\phi := \int_{-1}^1 e^x \phi(x) dx,$$

definito per ogni  $\phi \in H$ .

- Verifica che  $T$  è un funzionale lineare e continuo su  $H$ .
- Calcola la norma operatoriale di  $T$ .
- Sia  $V := \ker T$  il nucleo di  $T$ . Scrivi delle formule esplicite per calcolare le proiezioni ortogonali su  $V$  e su  $V^\perp$ .

3. (9 punti) Considera le funzioni

$$f(x) := \frac{\cos(3x)}{4 + x^2}, \quad g(x) := \frac{\sin(5x)}{1 + (x - 4)^2},$$

definite per  $x \in \mathbb{R}$ . Determina esplicitamente le funzioni  $\widehat{f}$ ,  $\widehat{g}$  e  $f * g$ .

4. (9 punti) Considera la successione di funzioni  $(h_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  definita da

$$h_n(x) := \begin{cases} n^2, & \text{se } x \in ]-1/n, 0[, \\ -n^2, & \text{se } x \in ]0, 1/n[, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

per ogni  $x \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Verifica che la successione  $h_n$  converge nel senso delle distribuzioni e determina esplicitamente il suo limite in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .