Analisi Matematica 3 - (Foschi) - esame del 31.1.2017

nome e cognome:	matricola:

Prima di svolgere gli esercizi leggi con attenzione il testo. Scrivi le tue risposte motivando ogni passaggio e **spiegando** in modo chiaro e leggibile le cose che fai. Ricorda di scrivere il tuo nome e numero di matricola su **ogni** foglio (compreso questo) e di riconsegnare al termine dell'esame **tutti** i fogli che hai usato (compresi i fogli di brutta copia, il testo del compito e l'eventuale foglio manoscritto con le formule che hai preparato).

1. (8 punti) Siano $\beta \in \mathbb{R}$ e $p \in [1, +\infty]$. Sia $g(x) := |x|^{-\beta} \mathrm{e}^{-x^2}$ e sia $f = g * g * g$. Per quali valori di p e di β si ha che $f \in L^p(\mathbb{R})$?

2. (8 punti) Considera lo spazio di Hilbert H definito come
$$H := L^2(\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x) = \left\{ f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \colon \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x < \infty \right\},$$
e dotato del prodotto scalare $\langle f, g\rangle := \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ sia $h_n(x)$ il polinomio di Hermite di grado n definito da
$$h_n(x) := (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \mathrm{e}^{-x^2}.$$
   - Verifica che $h_n \in H$ per ogni $n \in \mathbb{N}_0$.
   - Verifica che l'insieme dei polinomi di Hermite $E := \{h_n \colon n \in \mathbb{N}_0\}$ è un sistema ortogonale in H.
   - Verifica che il sistema ortogonale E è massimale in H (ovvero che $E^\perp = \{0\}$).

3. (8 punti) Usando la trasformata di Fourier e le sue proprietà calcola la soluzione $u(t, x)$ del seguente problema di Cauchy
$$\begin{cases} u + \partial_t u = 2\partial_x u + \partial_x^2 u, \\ u(0, x) = 2x\mathrm{e}^{-x^2}. \end{cases}$$

4. (8 punti) Sia (T_n) una successione di distribuzioni temperate convergente alla distribuzione T in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
   - È vero o falso che la successione T_n' delle derivate converge a T' in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$?
   - È vero o falso che la successione $\widehat{T_n}$ delle trasformate di Fourier converge a $\widehat{T}$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$?

   Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia A_n la distribuzione associata a $\sin(nx)$ e sia B_n la distribuzione associata a $\big(\sin(nx)\big)^2$.

   - A quali distribuzioni convergono $A_n, B_n, \widehat{A_n}, \widehat{B_n}$ per $n \to +\infty$?