Analisi Matematica 3 - (Foschi) - esame del 14.1.2020

nome e cognome:	matricola:

Prima di svolgere gli esercizi leggi con attenzione il testo. Scrivi le tue risposte motivando ogni passaggio e **spiegando** in modo chiaro e leggibile le cose che fai. Ricorda di scrivere il tuo nome e numero di matricola su **ogni** foglio (compreso questo) e di riconsegnare al termine dell'esame **tutti** i fogli che hai usato (compresi i fogli di brutta copia, il testo del compito e l'eventuale foglio manoscritto con le formule che hai preparato).

1. (8 punti) Sia $\mathcal{X}$ lo spazio vettoriale formato dalle funzioni misurabili che si possono ottenere sommando una funzione di $L^1(\mathbb{R})$ con una funzione di $L^\infty(\mathbb{R})$,
$$\mathcal{X} := L^1(\mathbb{R}) + L^\infty(\mathbb{R}).$$
Definiamo per ogni $f \in \mathcal{X}$ la quantità
$$\mathcal{N}(f) := \inf_{\substack{g \in L^1(\mathbb{R}) \\ h \in L^\infty(\mathbb{R}) \\ g+h=f}} \|g\|_{L^1} + \|h\|_{L^\infty}.$$
Dimostra che $\mathcal{N}$ è una norma su $\mathcal{X}$.

2. (8 punti) Costruisci un esempio esplicito di una funzione $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ che verifichi le seguenti condizioni:
   - $f \in L^2(\mathbb{R})$;
   - $f \notin L^1(\mathbb{R})$;
   - f continua su tutto $\mathbb{R}$;
   - $f(n) = n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

   Spiega inoltre perchè da queste condizioni possiamo dedurre che la trasformata di Fourier di f non appartiene a $L^1(\mathbb{R})$.

3. (8 punti) Sia V il sottospazio di $L^2(\mathbb{R})$ formato dalle funzioni che sono essenzialmente costanti sugli intervalli della forma $]2n-1, 2n+1[$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.
   - Fai un paio di esempi di funzioni che appartengono a V.
   - Determina un sistema ortonormale che genera V.
   - Determina la proiezione ortogonale su V della funzione $g(x) := x\mathrm{e}^{-x^2}$.
   - Fai un paio di esempi di funzioni che appartengono a $V^\perp$.

4. (5 punti) Calcola la trasformata di Fourier della funzione
$$\frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

5. (5 punti) Determina una soluzione $u(x) \in L^1(\mathbb{R})$ dell'equazione differenziale
$$u'' - u = \mathrm{e}^{-|x|}.$$