Analisi Matematica 3 - (Foschi) - esame del 23.7.2018

nome e cognome:	matricola:

Prima di svolgere gli esercizi leggi con attenzione il testo. Scrivi le tue risposte motivando ogni passaggio e **spiegando** in modo chiaro e leggibile le cose che fai. Ricorda di scrivere il tuo nome e numero di matricola su **ogni** foglio (compreso questo) e di riconsegnare al termine dell'esame **tutti** i fogli che hai usato (compresi i fogli di brutta copia, il testo del compito e l'eventuale foglio manoscritto con le formule che hai preparato).

1. (8 punti) Considera la regione $\Omega := (x, y) \in \mathbb{R}^2 x > 0,\, 0 < y < \dfrac{1}{x^2}$. Fornisci un esempio esplicito di funzione $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $f \in L^p(\Omega)$ se e solo se $p \in [18, 20]$.

2. (10 punti) Considera la funzione gaussiana $\gamma(x) := \mathrm{e}^{-x^2}$ definita per $x \in \mathbb{R}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$f_n(x) := \underbrace{\gamma(x) \cdot \gamma \cdot \dots \cdot \gamma(x)}_{n \text{ fattori moltiplicativi}} = (\gamma(x))^n ,$$
$$g_n(x) := \underbrace{\gamma(x) * \gamma * \ldots * \gamma(x)}_{n \text{ fattori convolutivi}} = (\gamma(x))^{*n} .$$

   Sia $p \in [1, +\infty]$.

   - Calcola le norme in $L^p(\mathbb{R})$ di f_n e g_n per piccoli valori di n.
   - Cosa riesci a dire del comportamento delle norme per $n \to +\infty$?

3. (9 punti) Considera, nello spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ dotato del prodotto scalare standard, i seguenti sottospazi vettoriali:

$$V_S := \{f \in C_c^\infty(\mathbb{R})\colon f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}\} ,$$
$$V_N := \{f \in C_c^\infty(\mathbb{R})\colon f(x) = 0, \forall x : |x| \leqslant 2\} .$$

   - I sottospazi V_S e V_N sono chiusi?
   - Determina gli spazi ortogonali di V_S, V_N e $V_S \cap V_N$.
   - Calcola la proiezione ortogonale sulla chiusura di V_S e di V_N della funzione caratteristica dell'intervallo $[1, 3]$.

4. (10 punti) Considera la funzione definita per $x \in \mathbb{R}$ da

$$F(x) := \begin{cases} \cos(x), & \text{per } |x| \leqslant \pi/2, \\ 0, & \text{per } |x| \geqslant \pi/2. \end{cases}$$

   - Calcola, nel senso delle distribuzioni, le derivate F' e F''
   - Calcola, nel senso delle distribuzioni, la trasformata di Fourier di F, F' e F''.