Analisi Matematica 3 - (Foschi) - esame del 16.1.2018

nome e cognome:	matricola:

Prima di svolgere gli esercizi leggi con attenzione il testo. Scrivi le tue risposte motivando ogni passaggio e **spiegando** in modo chiaro e leggibile le cose che fai. Ricorda di scrivere il tuo nome e numero di matricola su **ogni** foglio (compreso questo) e di riconsegnare al termine dell'esame **tutti** i fogli che hai usato (compresi i fogli di brutta copia, il testo del compito e l'eventuale foglio manoscritto con le formule che hai preparato).

1. (10 punti) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n > 2$ costruisci esplicitamente una funzione $\phi_n\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ tale che:
   - $\phi_n \in L^p(]0, +\infty[)$ se e solo se $p \in [2, n[$;
   - $\|\phi_n\|_{L^2} = 1$;
   - $\phi_n(x)$ è costante su ciascun intervallo della forma $]2^k, 2^{k+1}]$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$ e ogni $n > 2$.

2. (13 punti) Considera la funzione $K(x, y) := 1 + xy$ definita per $x, y \in [-1, 1]$. Sia H lo spazio di Hilbert $L^2([-1, 1])$ dotato del prodotto scalare
$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x.$$
Considera l'operatore $T\colon H \to H$ definito da
$$Tf(x) := \int_{-1}^{1} K(x, y)f(y)\,\mathrm{d}y.$$
Sia $N = \ker T$ il nucleo di T e sia $V = T(H)$ l'immagine di T.
   - Dimostra che vale la proprietà
$$\langle Tf, g\rangle = \langle f, Tg\rangle, \quad \forall f, g \in H.$$
   - Verifica che V ha dimensione finita e determina una sua base ortonormale.
   - Verifica che $N^\perp = V$.
   - Calcola la norma operatoriale $\|T\|_{L^2\to L^2}$.

3. (10 punti) Considera la funzione
$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{per } |x| \leqslant 1, \\ 2 - x, & \text{per } 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ -2 - x, & \text{per } -2 \leqslant x \leqslant -1, \\ 0, & \text{per } |x| \geqslant 2. \end{cases}$$
   - Calcola le derivate f' e f'' nel senso delle distribuzioni.
   - Calcola le trasformate di Fourier di f'', f' ed f.
   - Determina per quali $p \geqslant 1$ si ha che $\widehat{f'} \in L^p(\mathbb{R})$.