Analisi Matematica 3 - (Foschi) - esame del 17.1.2017

nome e cognome:	matricola:

1. (6 punti) Considera il dominio Ω nel piano definito da

$$\Omega := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0,\ |y| < \frac{1}{1+x} \right\}.$$

Costruisci un esempio esplicito di una funzione $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $f \in L^p(\Omega)$ se e solo se $p \in [2, 4]$.

2. (8 punti) Considera l'operatore lineare T che ad ogni funzione $g\colon [1, \infty] \to \mathbb{R}$ localmente integrabile associa la successione numerica $\{(Tg)_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definita da

$$(Tg)_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \int_n^{n+\frac{1}{n}} g(t)\, \mathrm{d}t.$$

Siano $p, q \in [1, +\infty]$. Per ogni $M \in \mathbb{N}$, considera la funzione semplice g_M definita da

$$g_M(t) := \sum_{k=1}^{M} \chi_{]k, k+\frac{1}{k}[}(t).$$

- Determina il comportamento asintotico del rapporto $\dfrac{\|Tg_M\|_{\ell^q}}{\|g_M\|_{L^p}}$ in funzione di M per $M \to +\infty$.
- Determina per quali esponenti $p, q \in [1, +\infty]$ si ha che T è continuo come operatore da $L^p(1, +\infty)$ a ℓ^q.

3. (6 punti) Considera lo spazio di Hilbert reale $H := L^2(-1, 1)$ dotato del prodotto scalare $\langle \phi, \psi \rangle := \displaystyle\int_{-1}^{1} \phi(t)\psi(t)\, \mathrm{d}t$. Sia V il sottospazio di H formato dalle funzioni polinomiali di grado minore o uguale 2. Considera la funzione continua $h(t) := \sqrt{|t|}$ definita per $t \in [-1, 1]$. Determina le proiezioni ortogonali di h su V e su $V^\perp$ in H.

4. (4 punti) Siano V e W due sottospazi di uno stesso spazio di Hilbert. Discuti la veridicità delle seguenti formule:

$$(V \cap W)^\perp = V^\perp + W^\perp, \qquad (V + W)^\perp = V^\perp \cap W^\perp.$$

5. (8 punti) Considera la funzione continua $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$A(t) := (1 - |t|)_+ = \max\{0, 1 - |t|\}.$$

Definiamo inoltre la successione di funzioni $(A_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ delle convoluzioni iterate di A ponendo $A_1 = A$ e $A_{n+1} = A * A_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

- Calcola la derivata prima e la derivata seconda di A nel senso delle distribuzioni.
- Calcola la trasformata di Fourier della funzione A.
- Calcola la trasformata di Fourier delle funzioni A_n.
- Verifica che la successione (A_n) converge nel senso delle distribuzioni temperate.