Analisi Matematica 3 - (Foschi) - esame del 12.2.2019

nome e cognome:	matricola:

Prima di svolgere gli esercizi leggi con attenzione il testo. Scrivi le tue risposte motivando ogni passaggio e **spiegando** in modo chiaro e leggibile le cose che fai. Ricorda di scrivere il tuo nome e numero di matricola su **ogni** foglio (compreso questo) e di riconsegnare al termine dell'esame **tutti** i fogli che hai usato (compresi i fogli di brutta copia, il testo del compito e l'eventuale foglio manoscritto con le formule che hai preparato).

(Con la notazione $\chi_{[a,b]}(x)$ si intende la funzione caratteristica dell'intervallo $[a,b]$.)

1. (4 punti) Per quali esponenti di $p \in [1,+\infty]$ si ha che la funzione $K(x) := \dfrac{1}{\sqrt{x^2+\sqrt{x}}}$ appartiene allo spazio $L^p(]0,+\infty[)$?

   Considera il funzionale definito da
   $$Tf := \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x.$$
   Considera inoltre le funzioni $f_L(x) := \chi_{[L,2L]}(x)$.

2. (3 punti) Utilizzando il fatto che $\sqrt{x} < x^2+\sqrt{x} < 2\sqrt{x}$ quando $0 < x < 1$ fai vedere che Tf_L si comporta come una potenza L^β per $L \to 0^+$ e determina il valore di β.

3. (3 punti) Utilizzando il fatto che $x^2 < x^2+\sqrt{x} < 2x^2$ quando $x > 1$ fai vedere che Tf_L si comporta come una potenza L^γ per $L \to +\infty$ e determina il valore di γ.

4. (4 punti) Per quali esponenti $q \in [1,+\infty]$ si ha che T è un funzionale lineare e continuo da $L^q(]0,+\infty[)$ a $\mathbb{C}$?

   Considera la funzione $g \in L^2(-]\pi,\pi])$ definita da
   $$g(x) := \begin{cases} |x|, & \text{se } |x| \leqslant \pi/2, \\ 0, & \text{se } x \in]-\pi,-\pi/2[\cup]\pi/2,\pi]. \end{cases}$$

5. (4 punti) Determina la serie di Fourier della funzione g in $L^2(]-\pi,\pi])$.

6. (3 punti) Determina la proiezione ortogonale della funzione g sullo spazio generato dalle funzioni $\cos(x)$, $\cos(2x)$, $\cos(3x)$.

7. (3 punti) Scrivendo l'identità di Bessel-Parsival per la funzione g, quale serie si riesce a calcolare?

8. (4 punti) Calcola la derivata di g nel senso delle distribuzioni (in $\mathcal{D}'(]-\pi,\pi[)$).

9. (6 punti) Calcola la trasformata di Fourier (su $\mathbb{R}$) della funzione $h(x) := \dfrac{x e^{3ix}}{(1+x^2)^2}$.

   [Suggerimento: se derivi la funzione $\dfrac{1}{1+x^2}$ quale funzioni ottieni?]