Analisi Matematica 3 - (Foschi) - esame del 19.6.2018

nome e cognome:	matricola:

Prima di svolgere gli esercizi leggi con attenzione il testo. Scrivi le tue risposte motivando ogni passaggio e **spiegando** in modo chiaro e leggibile le cose che fai. Ricorda di scrivere il tuo nome e numero di matricola su **ogni** foglio (compreso questo) e di riconsegnare al termine dell'esame **tutti** i fogli che hai usato (compresi i fogli di brutta copia, il testo del compito e l'eventuale foglio manoscritto con le formule che hai preparato).

Considera le funzioni

$$A(t) := \begin{cases} t^{-1/4}\,|\log(t)|^3, & \text{se } t \in]0,2], \\ t^{-1/3}\,|\log(t)|^{-4}, & \text{se } t \in]2,+\infty[; \end{cases} \qquad B(x,y) := A\left(\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

1. (4 punti) Per quali valori di $p \in [1,+\infty]$ si ha che $A \in L^p(\mathbb{R}_+)$?
2. (4 punti) Per quali valori di $q \in [1,+\infty]$ si ha che $B \in L^q(\mathbb{R}^2)$?

Nello spazio di Hilbert $L^2(-1,1)$ dotato del prodotto interno $\langle f,g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$, considera il sottospazio V generato dalle tre funzioni 1, e^x, e^{-x}.

3. (3 punti) Determina una base ortonormale di V.
4. (3 punti) Determina l'elemento di V che meglio approssima in norma $L^2(-1,1)$ la funzione x^2.
5. (3 punti) Fai un esempio esplicito di una funzione non nulla che appartiene all'ortogonale di V.

Considera le funzioni $f(x) := x\mathrm{e}^{-4x^2}$, $g(x) := \mathrm{e}^{4x-x^2}$, $h(x) := \cos(2x)\mathrm{e}^{-4x^2}$.

6. (6 punti) Calcola le trasformate di Fourier di f, g e h.
7. (3 punti) Calcola esplicitamente la convoluzione $f * g$.

8. (3 punti) Dimostra che per ogni funzione test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si ha che la funzione

$$x \mapsto \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}$$

è una funzione di $L^1(\mathbb{R})$ e che la formula

$$\langle T,\varphi\rangle := \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

definisce una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

9. (3 punti) Dimostra che la distribuzione T del punto precedente coincide con la distribuzione p.v.$\frac{1}{x}$.
10. (3 punti) Considera la successione di funzioni $F_n(x) := \dfrac{nx}{1+nx^2}$. Dimostra che tale successione converge nel senso delle distribuzioni alla distribuzione p.v.$\frac{1}{x}$.