Analisi Matematica 3 - (Foschi) - esame del 14.2.2017

nome e cognome:	matricola:

Prima di svolgere gli esercizi leggi con attenzione il testo. Scrivi le tue risposte motivando ogni passaggio e **spiegando** in modo chiaro e leggibile le cose che fai. Ricorda di scrivere il tuo nome e numero di matricola su **ogni** foglio (compreso questo) e di riconsegnare al termine dell'esame **tutti** i fogli che hai usato (compresi i fogli di brutta copia, il testo del compito e l'eventuale foglio manoscritto con le formule che hai preparato).

1. (6 punti) Considera la successione di funzioni definita da

$$f_n(x) := \frac{n}{1+n^4(x-n)^2}, \quad n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}.$$

Determina per quali $p \in [1, +\infty]$ la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge in $L^p(\mathbb{R})$ e calcola l'eventuale limite.

2. (6 punti) Sia $p \in [1, +\infty]$ e sia A l'applicazione che ad una funzione $f \in L^p(\mathbb{R})$ associa la successione $Af = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita da

$$a_n := \int_{\mathbb{R}} |x|\, f(x) \mathrm{e}^{-nx^2}\, \mathrm{d}x.$$

- Dimostra che A è un operatore lineare e continuo da $L^p(\mathbb{R})$ a ℓ^∞.
- Calcola la norma dell'operatore A nel caso $p = +\infty$.

3. (7 punti) Siano V_1 e V_2 due sottospazi vettoriali chiusi in uno spazio di Hilbert H e siano P_1 e P_2 le proiezioni ortogonali su V_1 e V_2. Sotto quali condizioni si ha che $P_1 + P_2$ è ancora una proiezione ortogonale?

4. (7 punti) Calcola le trasformate di Fourier delle seguenti funzioni:

$$g_1(x) := \frac{1}{x^2+1}, \quad g_2(x) := \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}, \quad g_3(x) := \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}, \quad g_4(x) := \frac{1}{x^4+1}.$$

5. (7 punti) Sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ una distribuzione temperata. E per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $m_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $m_k(x) = x^k$.

- Dimostra che se $m_1 T = 0$ allora T è un multiplo della delta di Dirac.
- Dimostra che se $m_3 T = 0$ allora T è una combinazione lineare della delta di Dirac e delle sue prime due derivate.
- Queste proprietà valgono anche per $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$?