Analisi Matematica 3 - (Foschi) - esame del 15.1.2019

nome e cognome:	matricola:

Prima di svolgere gli esercizi leggi con attenzione il testo. Scrivi le tue risposte motivando ogni passaggio e **spiegando** in modo chiaro e leggibile le cose che fai. Ricorda di scrivere il tuo nome e numero di matricola su **ogni** foglio (compreso questo) e di riconsegnare al termine dell'esame **tutti** i fogli che hai usato (compresi i fogli di brutta copia, il testo del compito e l'eventuale foglio manoscritto con le formule che hai preparato).

1. (8 punti) Nel 1976, Brascamp e Lieb determinarono la costante ottimale nella disuguaglianza di Young per prodotti di convoluzione facendo vedere che per $p, q, r \in [1, +\infty[$ che soddisfano la condizione
$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q},$$
si ha che
$$\frac{\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R})}}{\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}\,\|g\|_{L^q(\mathbb{R})}} \leqslant \frac{\|\gamma * \gamma\|_{L^r(\mathbb{R})}}{\|\gamma\|_{L^p(\mathbb{R})}\,\|\gamma\|_{L^q(\mathbb{R})}} =: C(p, q, r),$$
per ogni $f \in L^p(\mathbb{R})$ e $g \in L^q(\mathbb{R})$, dove $\gamma(x) := \mathrm{e}^{-x^2}$ è la funzione gaussiana. Calcola esplicitamente il valore di $C(p, q, r)$.

2. (8 punti) Considera l'operatore lineare
$$Tf(x) := \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y - \int_x^1 f(y)\,\mathrm{d}y.$$
Dimostra che T è continuo da $L^p([0, 1])$ a $L^q([0, 1])$ per ogni $p, q \in [1, +\infty]$ e cerca di stimare al meglio (sia per eccesso che per difetto) la norma operatoriale di T.

3. (8 punti) Sia H uno spazio di Hilbert e siano V e W due suoi sottospazi chiusi. Siano P e Q le proiezioni ortogonali su V e su W. Dimostra che $P + Q$ è una proiezione ortogonale (su qualche sottospazio chiuso di H) se e solo se V è ortogonale W.

4. (8 punti) Fissato $\lambda \in \mathbb{R}$, considera la successione di funzioni
$$\phi_n(x) := \frac{\sin(\lambda x)}{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}, \quad \text{con } x \in \mathbb{R} \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$
   - Calcola la trasformata di Fourier di ϕ_n.
   - Calcola la norma in $L^2(\mathbb{R})$ di ϕ_n.
   - Per quali λ si ha che $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è un sistema ortogonale in $L^2(\mathbb{R})$?

   [Suggerimento: pensa prima alla trasformata di Fourier di funzioni caratteristiche di intervalli del tipo $[-L, L]$.]

5. (4 punti) Dimostra che la successione ϕ_n dell'esercizio precedente converge a zero nel senso delle distribuzioni.