Analisi Matematica 3 - (Foschi) - esame del 11.9.2018

nome e cognome:	matricola:

Prima di svolgere gli esercizi leggi con attenzione il testo. Scrivi le tue risposte motivando ogni passaggio e **spiegando** in modo chiaro e leggibile le cose che fai. Ricorda di scrivere il tuo nome e numero di matricola su **ogni** foglio (compreso questo) e di riconsegnare al termine dell'esame **tutti** i fogli che hai usato (compresi i fogli di brutta copia, il testo del compito e l'eventuale foglio manoscritto con le formule che hai preparato).

1. (9 punti) Sia $\alpha > 0$. Considera la funzione $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x,y) := \frac{1}{x^\alpha y^{2\alpha}},$$
con
$$\Omega := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0,\ y > 0,\ y < \frac{1}{(1+x)^\alpha} \right\}.$$
Determina, in funzione di α, per quali valori di $p \in [1, +\infty]$ si ha che $f \in L^p(\Omega)$.

2. (9 punti) Sia H uno spazio di Hilbert e sia $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sua base ortonormale numerabile. Sia $V_n := \operatorname{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Definiamo l'applicazione lineare $T\colon H \to H$ ponendo
$$T(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle x, e_n \rangle}{n} e_n.$$
   - Verifica che T è continua.
   - Dimostra che l'immagine $T(H)$ contiene V_n per ogni $n \in \mathbb{N}$.
   - Dimostra che l'immagine $T(H)$ è densa in H, ma non coincide con H.

3. (9 punti) Determina mediante l'uso della trasformata di Fourier la soluzione $u(t,x)$ del problema
$$\begin{cases} \partial_t u + 4\partial_x u - \partial_x^2 u = 0, & t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = \sin(x)\mathrm{e}^{-x^2}. \end{cases}$$

4. (9 punti) Sia $Q := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0,\ y > 0\big\}$ il primo quadrante del piano cartesiano. Sia χ la funzione caratteristica di Q,
$$\chi(x,y) := \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \text{ e } y > 0, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
   - Calcola la derivata seconda mista $S := \partial_x \partial_y \chi$ nel senso delle distribuzioni.
   - Determina altre distribuzioni $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ tali che $\partial_x \partial_y T = S$.