Analisi Matematica 3 - (Foschi) - esame del 11.2.2020

nome e cognome:	matricola:

Prima di svolgere gli esercizi leggi con attenzione il testo. Scrivi le tue risposte motivando ogni passaggio e **spiegando** in modo chiaro e leggibile le cose che fai. Ricorda di scrivere il tuo nome e numero di matricola su **ogni** foglio (compreso questo) e di riconsegnare al termine dell'esame **tutti** i fogli che hai usato (compresi i fogli di brutta copia, il testo del compito e l'eventuale foglio manoscritto con le formule che hai preparato).

1. (10 punti) Sia $K\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $K(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ per $x \geqslant 0$ e $K(x) = 0$ per $x < 0$. Siano $\varphi_L = \chi_{[0,L]}$ le funzioni caratteristiche degli intervalli $[0, L]$ per ogni $L > 0$. Sia T l'operatore lineare definito da $T[f](x) = K * f(x)$.
   - Determina per quali $p \in [1, +\infty]$ si ha che $K \in L^p(\mathbb{R})$.
   - Determina esplicitamente le funzioni $T[\varphi_L](x)$ per ogni $L > 0$.
   - Come si comportano le norme $\|\varphi_L\|_{L^p(\mathbb{R})}$ e $\|T[\varphi_L]\|_{L^q(\mathbb{R})}$ per $L \to +\infty$?
   - Determina delle condizioni neccessarie e/o sufficienti per gli esponenti p e q affinché l'operatore T sia continuo da $L^p(\mathbb{R})$ a $L^q(\mathbb{R})$.

2. (10 punti) Considera la funzione $g \in L^2(-\pi, \pi)$ defnita da $g(x) := \mathrm{e}^x$ per ogni $x \in]-\pi, \pi[$.
   - Calcola la serie di Fourier in forma complessa $\displaystyle\sum_k c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ per la funzione $g(x)$.
   - Calcola il modulo dei coefficienti c_k.
   - Calcola la serie di Fourier in forma reale $\displaystyle\frac{a_0}{2} + \sum_k a_k \cos(kx) + \sum_k b_k \sin(kx)$ per la funzione $g(x)$.
   - Determina la proiezione ortogonale della funzione g sul sottospazio di $L^2(-\pi, \pi)$ generato dalle funzioni 1, $\cos(x)$, $\cos(2x)$.
   - Calcola la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

3. (10 punti) Dopo aver ricordato che cosa dice l'identità di Parseval per prodotto scalari di trasformate di Fourier in $L^2(\mathbb{R})$ calcola, utilizzando le proprietà della trasformata di Fourier, i seguenti integrali:

$$I_0 := \int_{-\infty}^{+\infty} x\cos(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad I_1 := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(4x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x,$$

$$I_2 := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(4x)}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x, \qquad I_3 := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)\sin(4x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

[Osserva che $\dfrac{1}{x^2+1} \in L^1 \cap L^2$ *e che* $\dfrac{\sin(x)}{x} \in L^2$ *e di queste due funzioni sappiamo calcolare la trasformata di Fourier. Possono esserti utili anche le formule di Eulero per esprimere il coseno come combinazione di esponenziali.]*