Fisica Generale

- Docente: Prof. Loris Giovannini

Polo Scientifico-tecnologico (Via Saragat)

Blocco C, stanza 010

giovannini@fe.infn.it

0532 974312

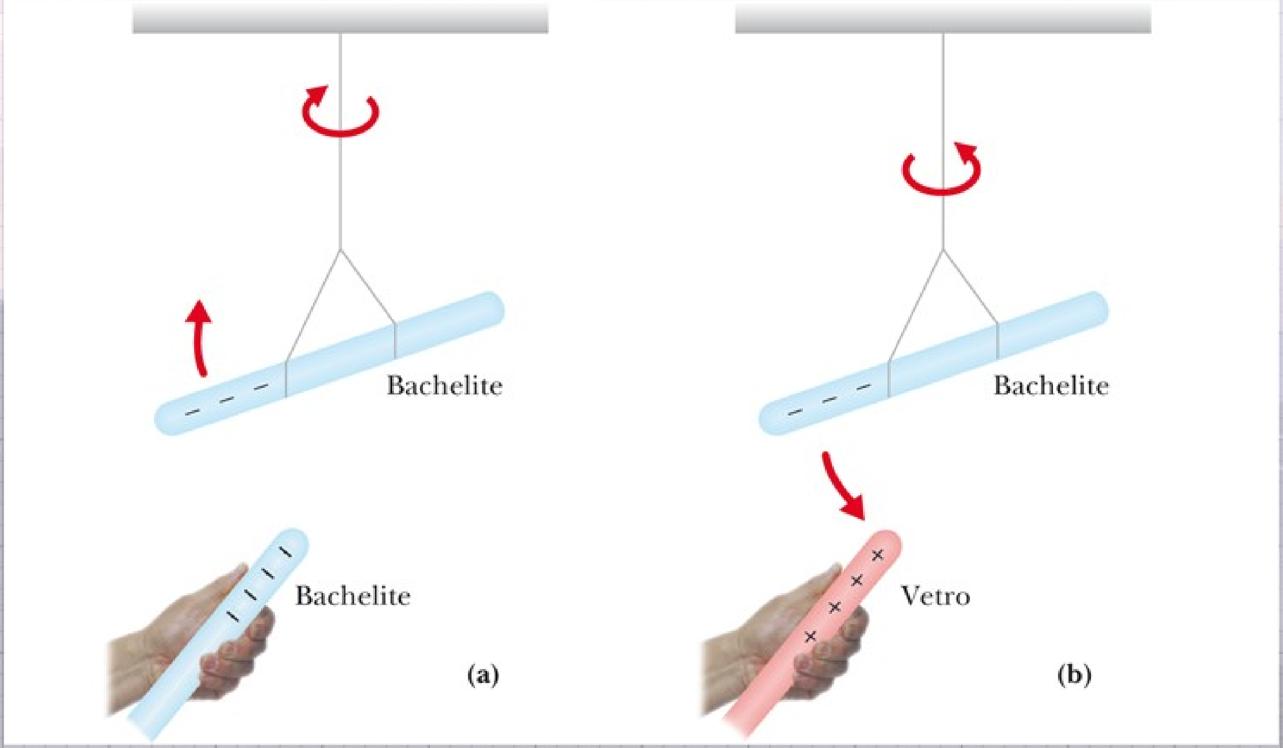
- Materiale didattico: http://www.unife.it/scienze/matematica/insegnamenti/fisica-generale/materiale-didattico

Argomenti della seconda parte del corso

- Elettrostatica
- Magnetostatica
- Equazioni di Maxwell
- Onde elettromagnetiche

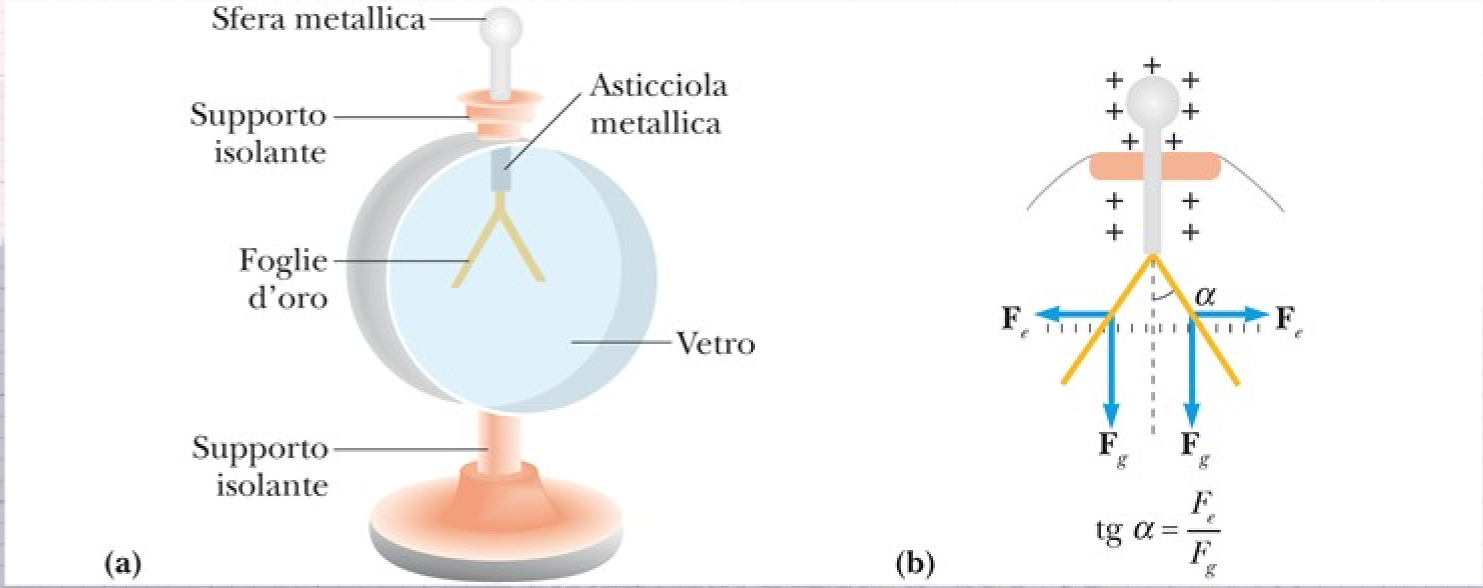
Introduzione all'elettrostatica

- Cariche elettriche (600 a.C.). Isolanti e conduttori.



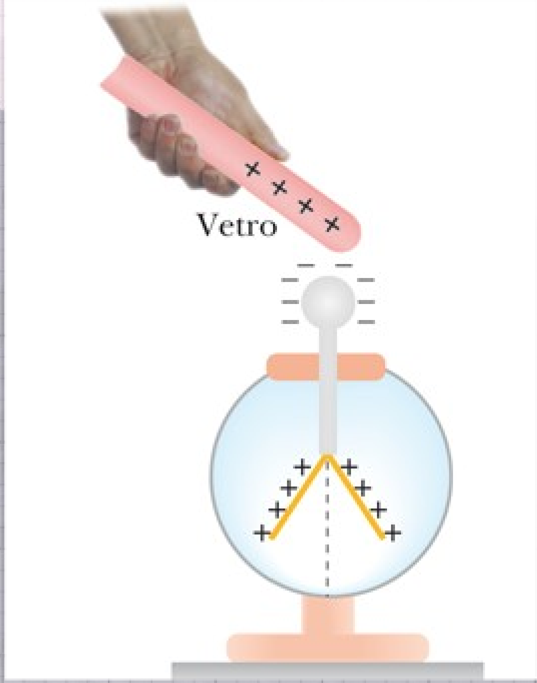
Introduzione all'elettrostatica

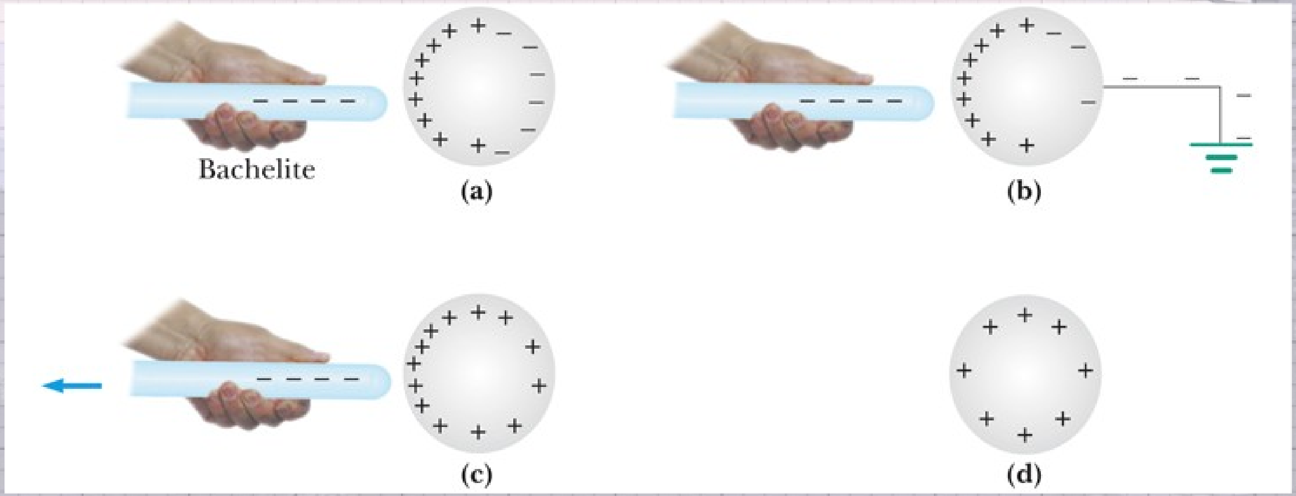
- Misurazione delle cariche. Elettroscopio (1780). Forza elettrica.



Introduzione all’elettrostatica

- Struttura elettrica della materia: protoni, neutroni, elettroni.
- Conservazione della carica.
- Induzione elettrostatica.





Introduzione all'elettrostatica

- Legge di Coulomb

$$F = k_E \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

- Unità di misura della carica elettrica: Coulomb (C). 1C = 1 A · 1s. E' un'unità di misura derivata.

$$k_E = 10^{-7} \frac{\mathrm{m\ kg}}{\mathrm{C}^2} c^2 = 8.9875 \cdot 10^9\ \mathrm{N\ m^2 C^{-2}}$$

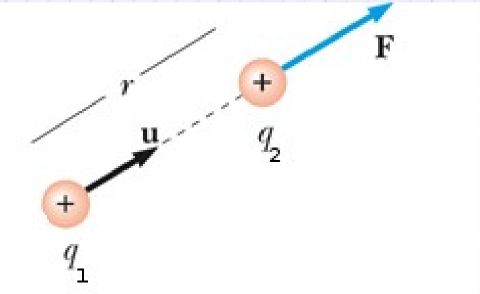
$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k_E} = 8.8542 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C^2\ N^{-1}\ m^{-2}}$$

Introduzione all'elettrostatica

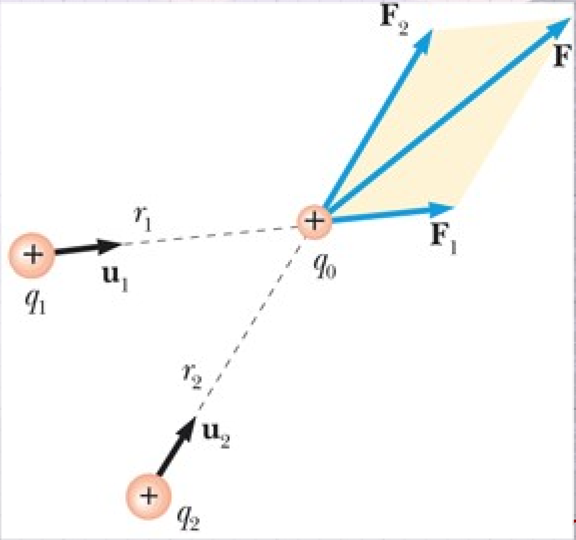
- Legge di Coulomb in forma vettoriale.

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{u}$$



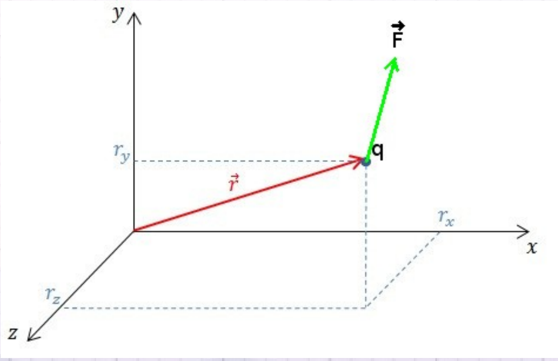
- Principio di sovrapposizione

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_0}{r_1^2}\hat{u}_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2 q_0}{r_2^2}\hat{u}_2$$



Campo elettrostatico

- Posta una carica di prova q in un punto $\vec{r}$ dello spazio, indichiamo con $\vec{F}$ la forza subita (causata da altre cariche eventualmente presenti);

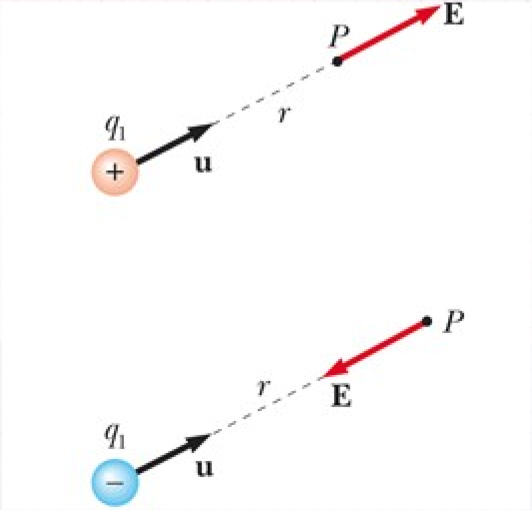


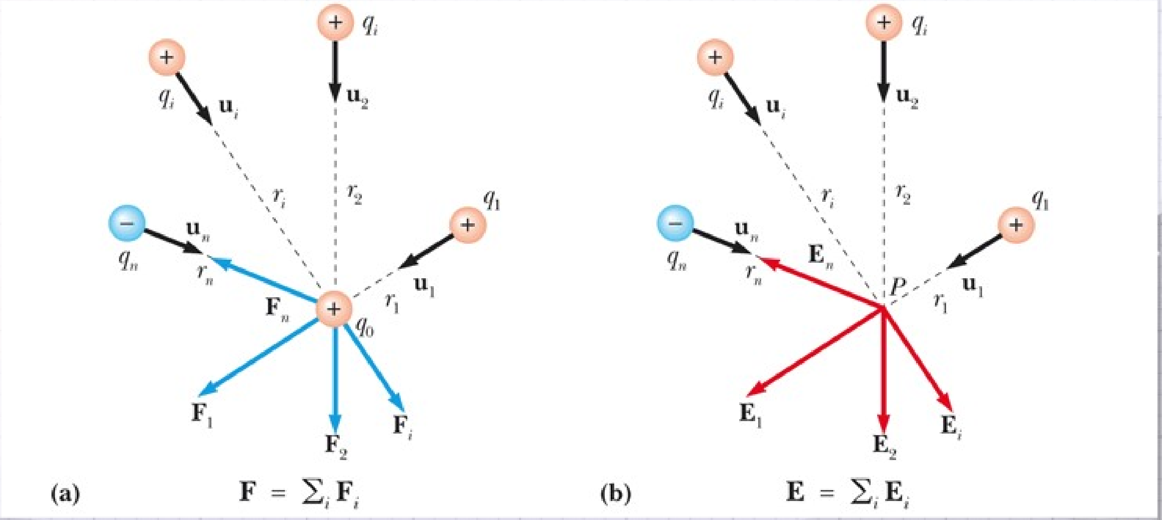
- si chiama **campo elettrico** nel punto considerato la quantità:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}}{q}$$

- Unità di misura: N/C (o V/m, il Volt verrà introdotto successivamente).

Campo elettrostatico generato da una o più cariche puntiformi

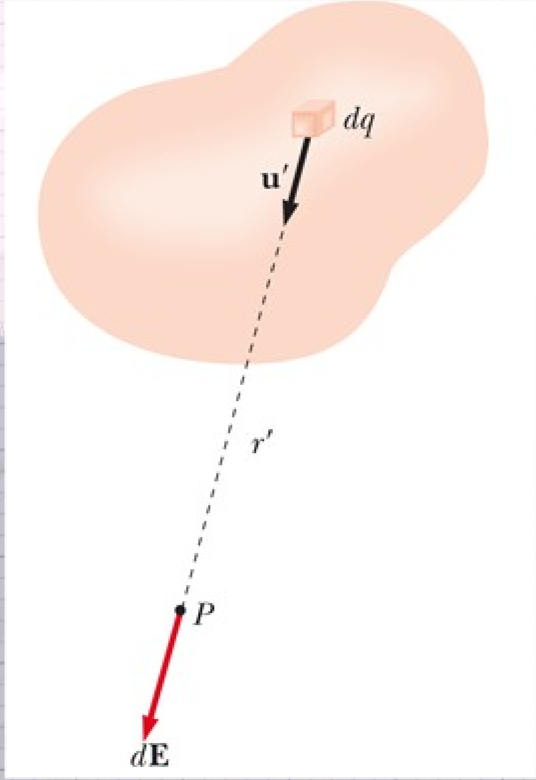




$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\hat{u}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i^2}\hat{u}_i$$

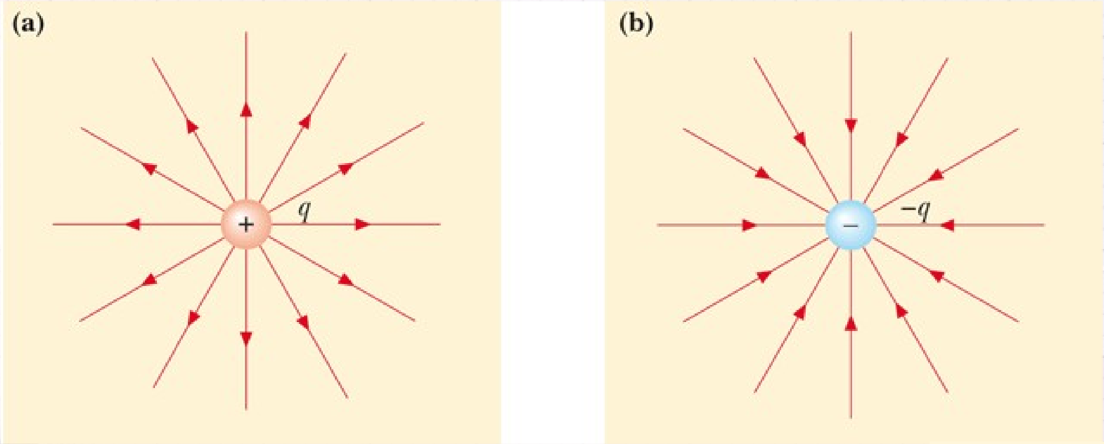
Campo elettrostatico generato da una distribuzione continua di cariche

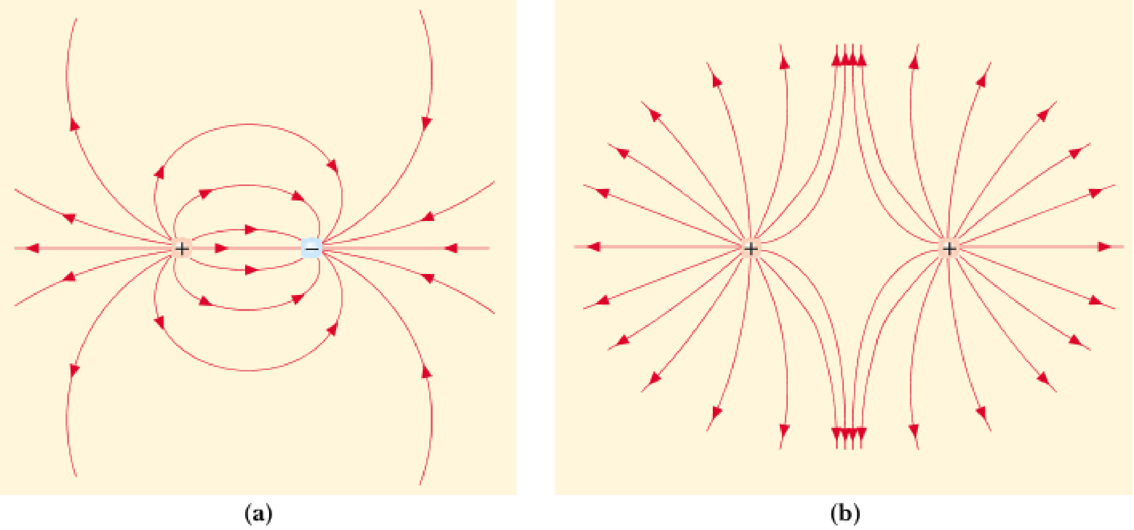


$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{u}$$

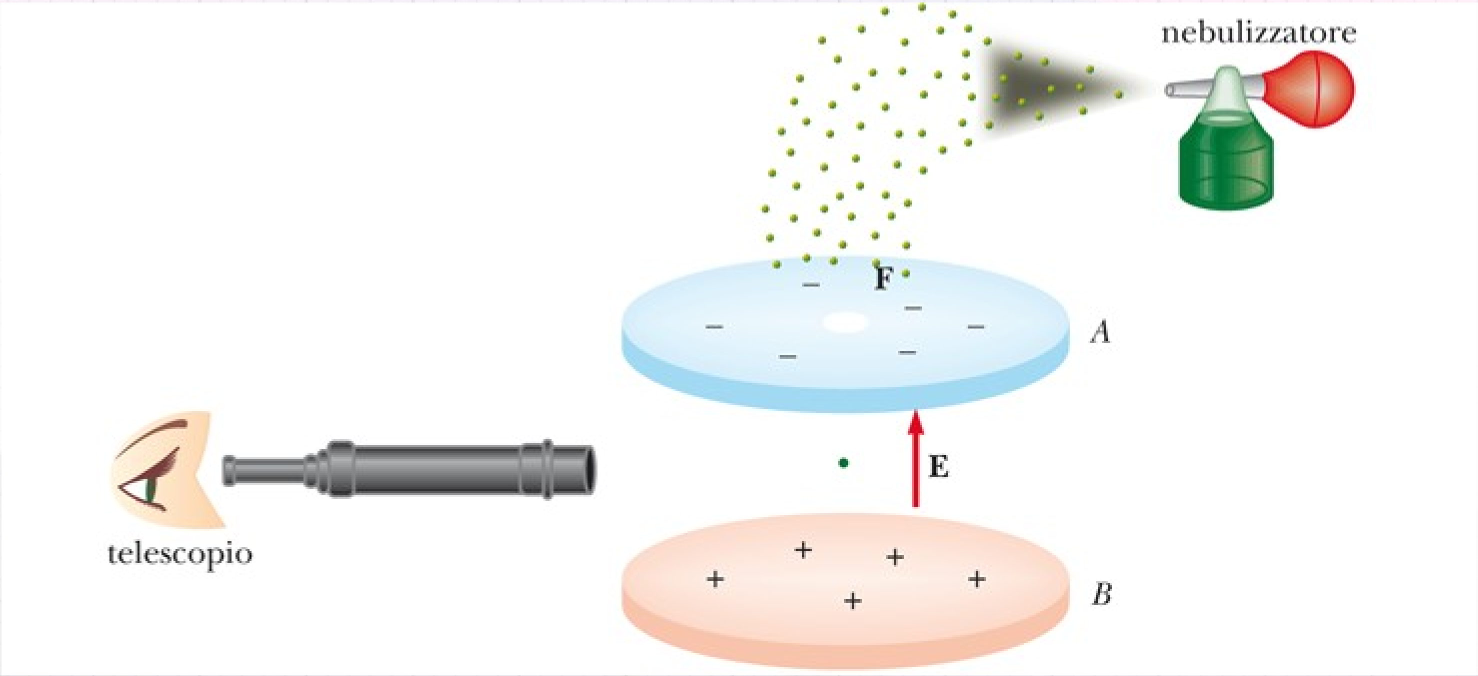
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\hat{u}$$

Linee di forza del campo elettrostatico





Carica elementare; esperienza di Millikan



$$e = 1.6022 \cdot 10^{-19}\mathrm{C}$$

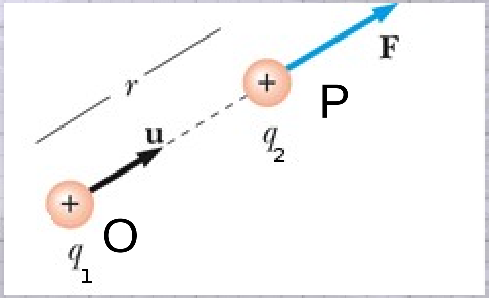
Lavoro e potenziale elettrostatico

- La forza elettrica è centrale ed ha la stessa forma della forza gravitazionale. Possiamo quindi introdurre il suo *potenziale* (*energia potenziale*, in fisica).

$$\vec{F}(P) = -k\frac{mM}{\rho^2}\frac{P-O}{\rho} \quad \rightarrow \quad U_{\rm mat}(\rho) = k\frac{mM}{\rho} + \text{cost}$$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_0 q}{r^2}\hat{u} \quad \rightarrow \quad U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_0 q}{r} + \text{cost}$$

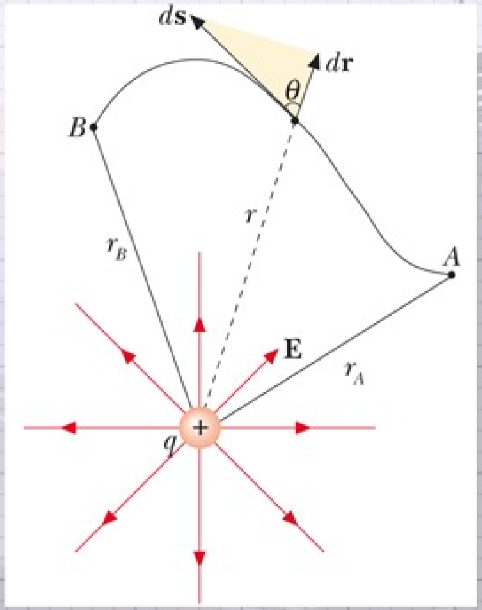
Fra le due forze c'è una differenza di segno: infatti la forza elettrica è attrattiva quando le due cariche hanno segno opposto. Dovrebbe quindi esserci anche tra i due potenziali, ma in meccanica razionale il potenziale si definisce come $\vec{F} = \vec{\nabla} U_{\rm mat}$, mentre qui $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$!!



Lavoro e potenziale elettrostatico

- Il lavoro fatto dalla forza elettrica per spostare una carica da un punto ad un altro può quindi essere valutato come variazione dell'energia potenziale:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = U(r_A) - U(r_B)$$



e non

$$L_{[t_0,t_1]} = U_{\mathrm{mat}}(P_1) - U_{\mathrm{mat}}(P_0)$$

come in meccanica razionale!!

Lavoro e potenziale elettrostatico

- La costante che appare nell'energia potenziale viene normalmente presa in modo che $\lim_{r\to\infty} U(r) = 0$,
  quindi l'energia potenziale di una carica si può scrivere:

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_0 q}{r}$$

- Si chiama potenziale elettrostatico il rapporto tra l'energia potenziale in un punto e la carica di prova:

$$V(r) = \frac{U(r)}{q_0}$$

- Unità di misura del potenziale elettrostatico: volt, 1 V = 1 J/C

Lavoro e potenziale elettrostatico

- quindi il potenziale generato da una carica q a distanza r è:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$$

- Per un insieme discreto di cariche avremo:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

- Per una distribuzione continua:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}$$

Il campo elettrico come gradiente del potenziale

- Dalla definizione di energia potenziale abbiamo:

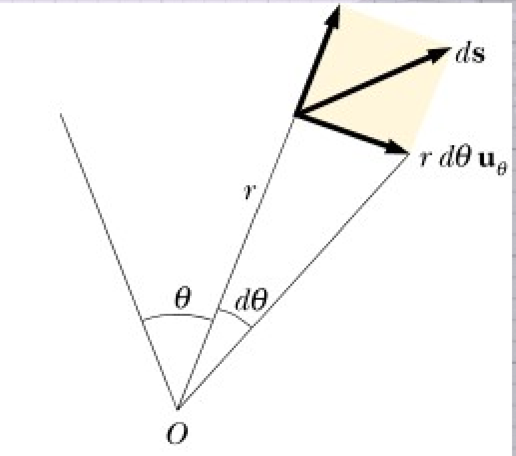
$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U.$$

Quindi, dividendo entrambi i membri per la carica di prova,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V.$$

- Usando invece le coordinate polari in piano si ha:

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{u}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{u}_\theta$$



Circuitazione del campo elettrico

- Abbiamo visto che il lavoro delle forze elettriche lungo un percorso può essere scritto come:

$$W_{AB} = U(r_A) - U(r_B) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_A^B q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

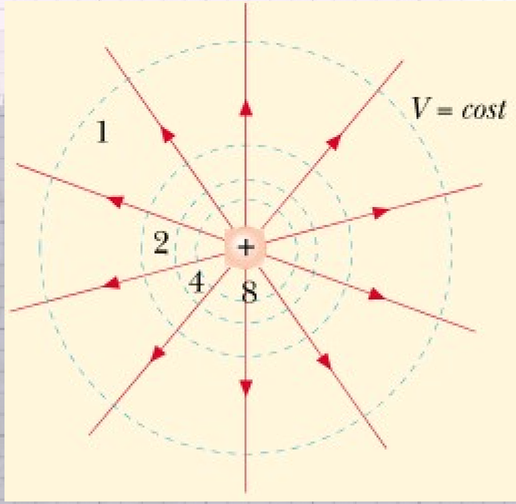
- Se ora consideriamo un qualsiasi percorso chiuso $s, W_\circ = 0$ quindi

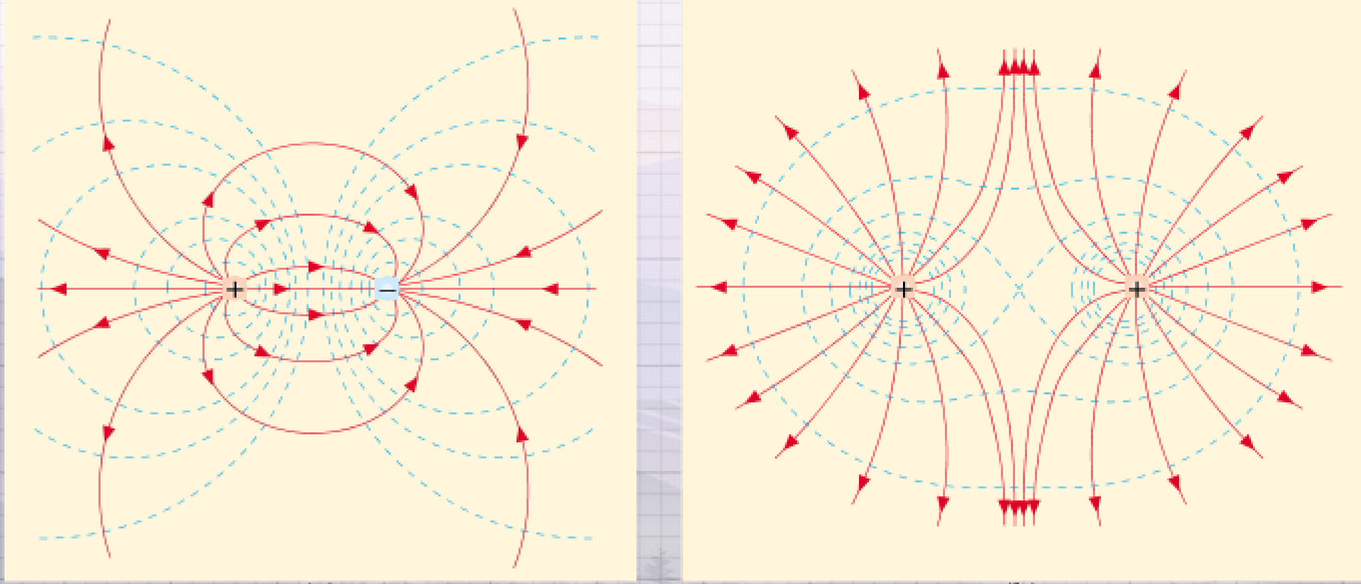
$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

3rd Maxwell equation
static
integral

Superfici equipotenziali

- Per un punto passa una ed una sola superficie equipotenziale.
- Le linee di forza sono in ogni punto ortogonali alle superfici equipotenziale.





(a) (b)

Teorema di Kelvin-Stokes o del rotore

- Dagli appunti del corso di *Equazioni della Fisica Matematica*, teorema di Stokes in $\mathbb{R}^3$, equazione B.8, pag. 131:

  Sia $\vec{F}(x,y,z)$ definita e di classe *C*[1] in *D*, superficie bidimensionale "immersa" in $\mathbb{R}^3$ ed avente contorno *C*[+]. Allora

$$\int_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_D (\mathrm{rot}\ \vec{F} \cdot \hat{n})\, dS$$

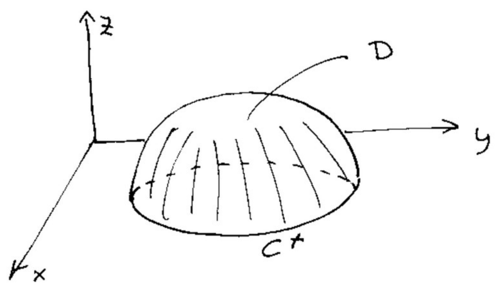


Figura B.3: *Regione D immersa in* $\mathbb{R}^3$

  con $\hat{n}$ versore della normale esterna a *D* in ogni punto.

- In fisica il primo integrale si chiama "circuitazione" del campo vettoriale $\vec{F}$ e il secondo "flusso" (in questo caso del vettore $\mathrm{rot}\ \vec{F}$).

Rotore del campo elettrostatico

- Il teorema di Kelvin-Stokes applicato al campo elettrico è:

$$\int_{C^+} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_D (\text{rot } \vec{E} \cdot \hat{n})\, d\vec{S}.$$

Abbiamo già visto che, per ogni percorso chiuso C^+, risulta:

$$\oint_{C^+} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$

Di conseguenza anche il secondo membro si annulla per ogni superficie D, per cui deve essere:

$$\text{rot } \vec{E}(\vec{r}) = 0 \qquad \forall \vec{r} \in \mathbb{R}^3$$

3rd Maxwell equation
static
differential

Il dipolo elettrico

- momento di dipolo elettrico:

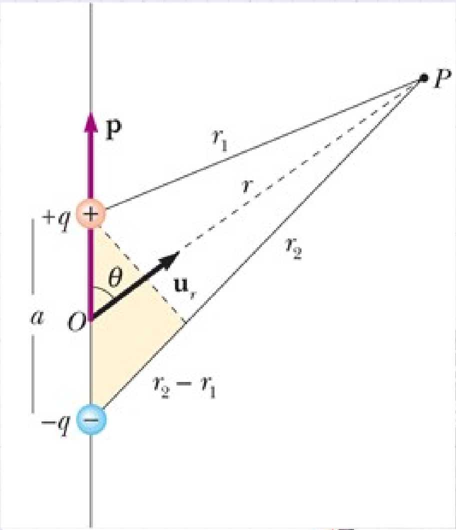
$$\vec{p} = q\vec{a}$$

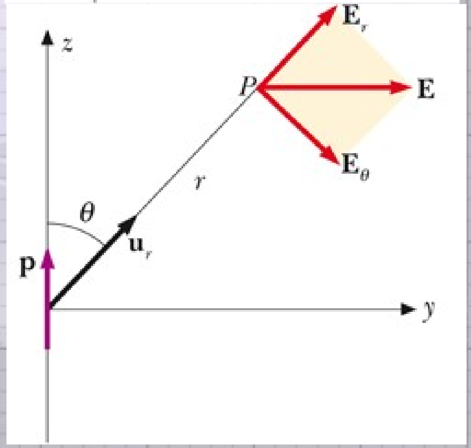
- potenziale elettrico:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r_2 - r_1}{r_2 r_1}$$

per r_1, r_2 >> a:

$$V = \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{u}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$





Campo elettrico del dipolo

- Per calcolare il campo elettrico a grandi distanze utilizziamo il gradiente del potenziale appena trovato, in coordinate polari:

$$\vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\ \hat{u}_r + \sin\theta\ \hat{u}_\theta\right)$$

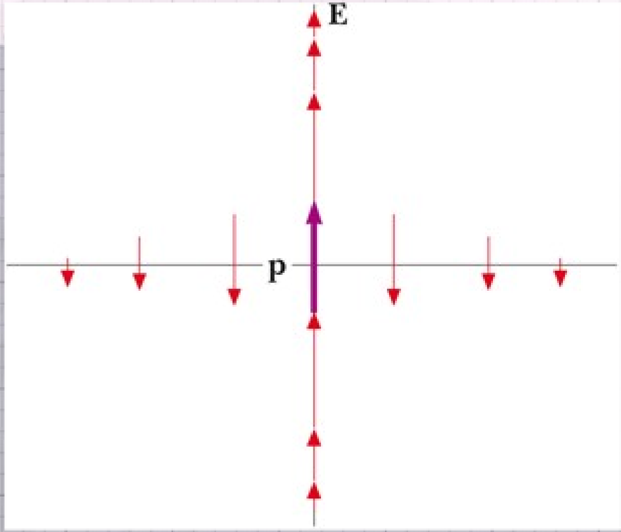
- in particolare, nei punti dell'asse del dipolo (θ = 0, θ = π):

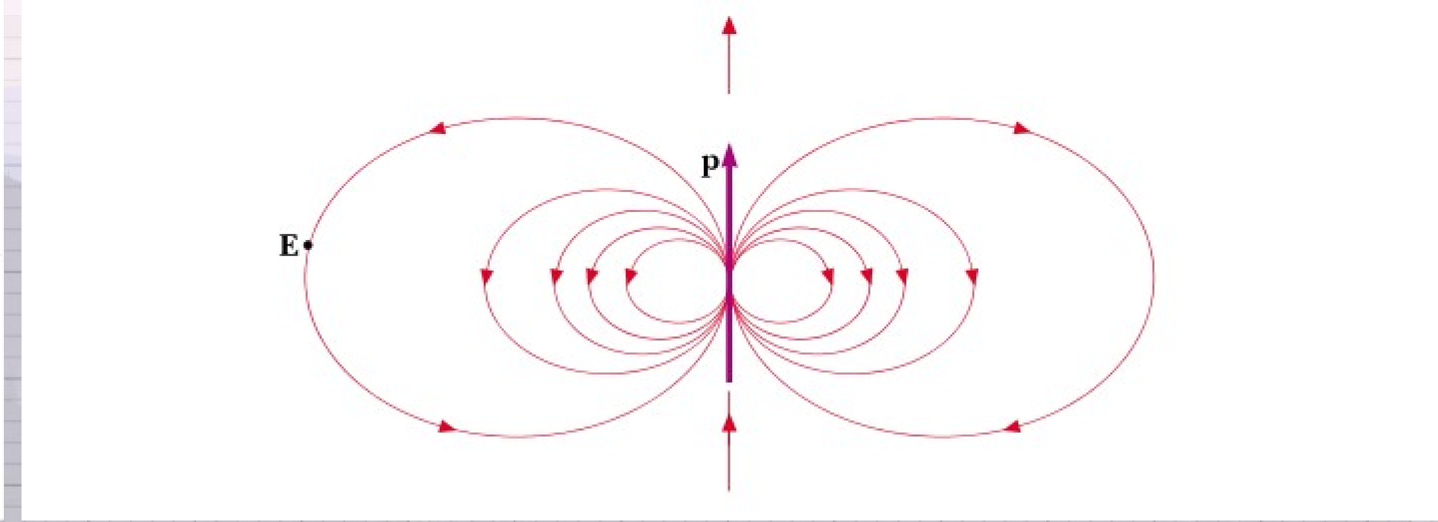
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\vec{p}}{r^3}$$

Campo elettrico del dipolo

- sui punti del piano mediano (θ = π/2, θ = 3π/2):

$$\vec{E} = -\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

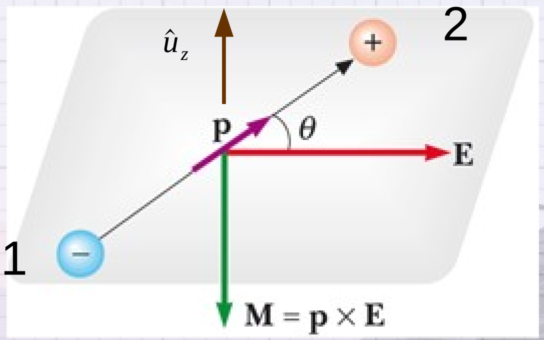




Forza su un dipolo elettrico

- Un dipolo elettrico rigido immerso in un campo è soggetto ad una coppia di forze, il cui momento vale:

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_2 =$$
$$= q\vec{a} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$



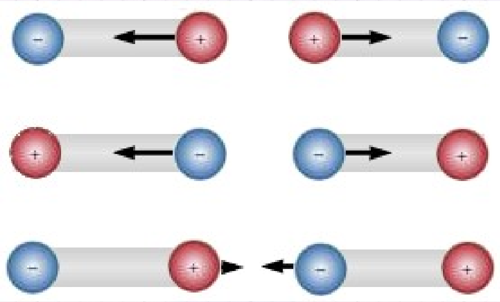
- Considerando il lavoro fatto, si può definire un'energia potenziale U:

$$W_{AB} = U(\theta_A) - U(\theta_B) = \int_{\theta_A}^{\theta_B} M\, d\theta = -pE \int_{\theta_A}^{\theta_B} \sin\theta\, d\theta = pE\cos\theta_B - pE\cos\theta_A$$

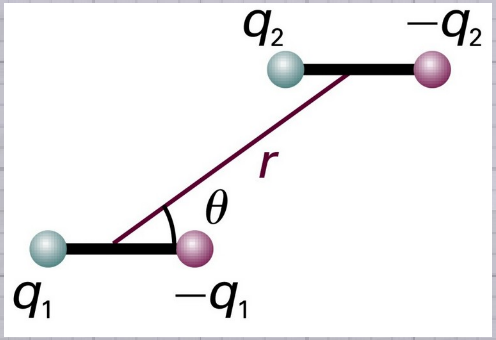
$$\boxed{U = -\vec{p} \cdot \vec{E} + \text{cost}}$$

Interazione tra dipoli elettrici

- Attrazione/repulsione di dipoli che non possono ruotare:



- Rotazione di dipoli che non possono traslare:

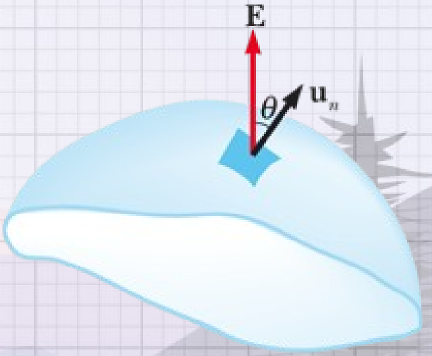


$$U = \frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(1 - 3\cos^2\theta\right) \qquad \theta \in [0, \pi/2]$$

Legge di Gauss

- Si definisce flusso del campo elettrostatico attraverso la superficie *d*Σ:

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = E_n \, d\Sigma,$$



ovvero, attraverso una superficie finita Σ, la quantità:

$$\Phi_E = \iint_\Sigma \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma.$$

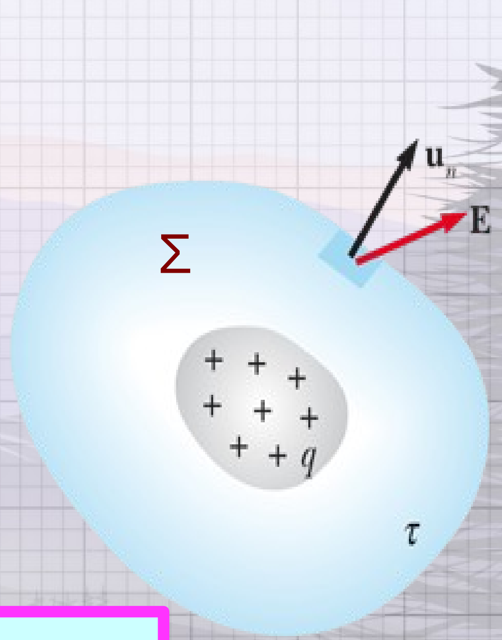
Se la superficie è chiusa, con normale orientata verso l'esterno:

$$\Phi_E = \oint\!\!\!\oint_\Sigma \vec{E} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma.$$

Legge di Gauss

- Il flusso del campo elettrostatico prodotto da un sistema di cariche attraverso una superficie chiusa è uguale alla somma algebrica delle cariche contenute all'interno della superficie divisa per ε_0:

$$\Phi_E = \oiint_\Sigma \vec{E} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i \text{ interne a } \Sigma} q_i$$



o, per una distribuzione continua di cariche,

$$\Phi_E = \oiint_\Sigma \vec{E} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0} \int_\tau dq$$

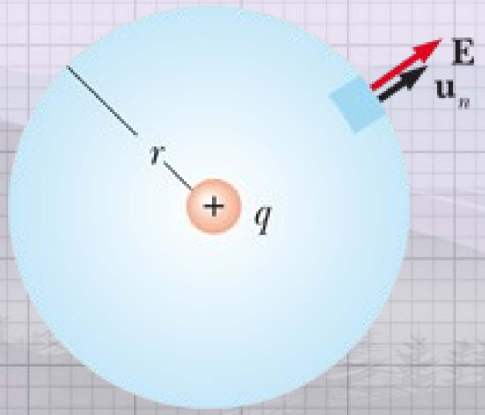
essendo τ il volume racchiuso da Σ.

1st Maxwell equation integral

Legge di Gauss

- La "dimostrazione" della legge di Gauss per una carica posta al centro di una superficie sferica è immediata, essendo il campo elettrico normale alla superficie in ogni punto e di modulo costante:

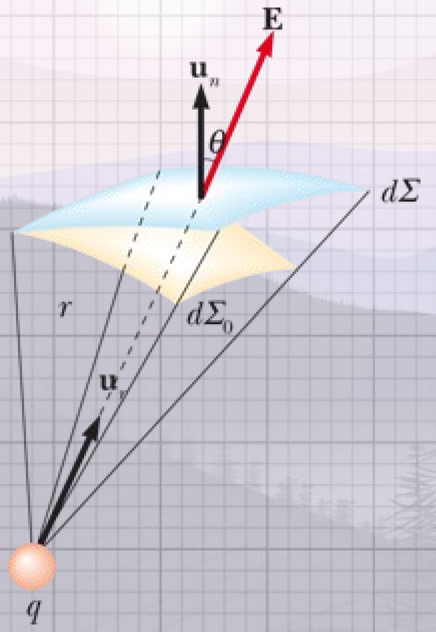
$$\Phi_E = \oiint_\Sigma \vec{E} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oiint_\Sigma \hat{u}_r \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

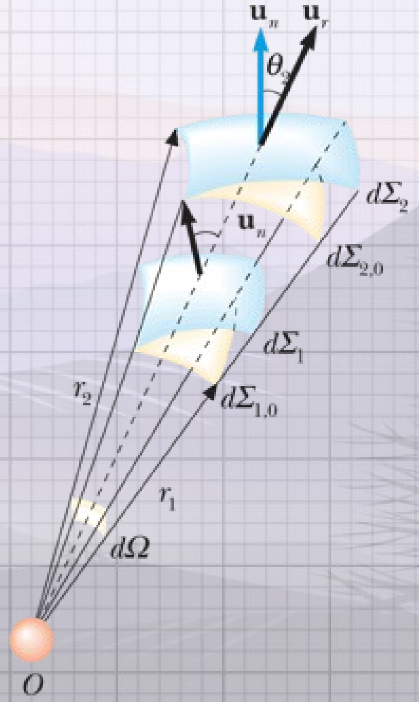


Legge di Gauss

- Il flusso attraverso $d\Sigma$ generato da q vale:

$$d\Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{u}_r \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\cos\theta \, d\Sigma}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{d\Sigma_0}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \, d\Omega$$





Legge di Gauss

- Il flusso attraverso una superficie finita è dato da:

$$\Phi_E = \iint_\Sigma \vec{E} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_\Sigma d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega$$

- Se, poi, la superficie è chiusa, ricordando che l'angolo solido totale visto da una carica **interna** vale 4 π:

$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oiint_\Sigma d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\Phi(\mathbf{E}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega$$

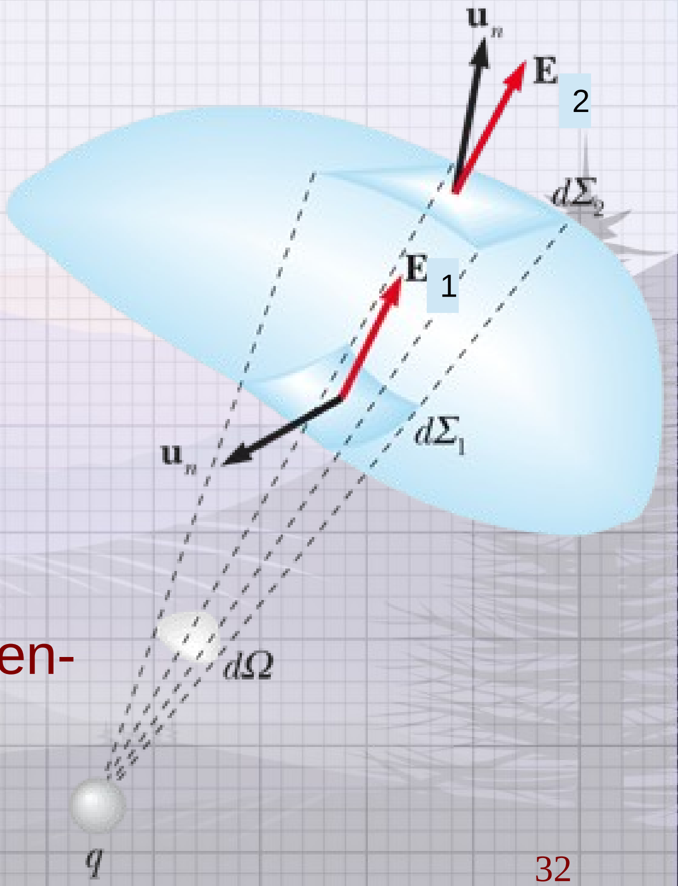
Legge di Gauss

- Se invece consideriamo una carica esterna, il suo contributo al flusso è nullo.

$$d\Phi_{E1} = \vec{E}_1 \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma_1 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

$$d\Phi_{E2} = \vec{E}_2 \cdot \hat{u}_n d\Sigma_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

$$d\Phi_{E1} + d\Phi_{E2} = 0$$



- Il principio di sovrapposizione permette infine di estendere il risultato ad un numero arbitrario di cariche.

Applicazioni della legge di Gauss

- Campo elettrostatico di una carica distribuita uniformemente su superficie sferica.
- Campo elettrostatico di una carica distribuita uniformemente in una sfera.
- Campo elettrostatico di una carica distribuita uniformemente su superficie piana infinita.

Teorema della divergenza in $\mathbb{R}^3$

- Dagli appunti del corso di *Analisi Matematica II*, teorema 6.1, pag. 140:

  Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un insieme limitato la cui frontiera ∂Ω sia di classe C^1 (o di classe C^1 a tratti). Allora se $f \in C^1(\Omega)$ e se indichiamo con $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^3$ il versore della normale esterna, risulta:

$$\iiint_\Omega \operatorname{div} f \; dx\; dy\; dz = \iint_{\partial\Omega} f \cdot \nu d\sigma$$

Divergenza del campo elettrico

- Applicando il teorema della divergenza al campo elettrico e ad un arbitrario volume Ω, ricordando la legge di Gauss, si ha:

$$\iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, d\Omega = \oiint_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot \hat{u}_n \, d\sigma = \Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho \, d\Omega$$

con ρ densità di carica contenuta in Ω. L'uguaglianza degli integrali per qualsiasi volume Ω implica:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

1st Maxwell equation
differential

Equazione di Poisson

- L'equazione precedente può essere riscritta ricordando il legame tra campo elettrico e potenziale,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \; :$$

$$\Delta\, V = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} V) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- Nello spazio vuoto (non ci sono cariche) diventa l'equazione di Laplace:

$$\Delta V = 0$$