FUNZIONI DI UNA VARIABILE COMPLESSA
ESERCIZI

1) Mostrare che: a) $\lim_{z \to \infty} \frac{z+i}{z-i} = 1$; b) $\lim_{z \to i} \frac{1}{z^2+1} = \infty$

2) Calcolare a) $\lim_{z \to 2i} \frac{z^2+4}{z-2i}$; b) $\lim_{z \to \infty} \frac{z^2+3}{z}$

3) Discutere la continuità delle seguenti funzioni nei domini a fianco indicati

a) $f(z) = z^3$ in $\mathcal{D} = \{z \mid |z| < 2\}$

b) $f(z) = \frac{1}{z+i}$ in $\mathcal{D} = \{z \mid |z| < 1\}$

c) $f(z) = \frac{z+1}{z}$ in $\mathcal{D} = \{z \mid |z| > 1\}$

4) Sia $f: R \to \mathbb{C}$ funzione olomorfa in una regione $R \subset \mathbb{C}$ (R aperto connesso) e $f'(z) = 0 \quad \forall z \in R$ $\Rightarrow f$ è costante

5) Sia $f: \Omega \to \mathbb{C}$ funzione di variabile complessa, derivabile nell'aperto Ω e a valori reali $\Rightarrow f$ è costante

6) Consideriamo le funzioni:

a) $f(z) = \operatorname{sen} z$; b) $f(z) = \cos z$; c) $f(z) = |z|$; d) $f(z) = \bar{z}$;

e) $f(z) = e^z$; f) $f(z) = e^{z^2}$; g) $f(z) = \arg z$, $z \neq 0$, $\operatorname{Im} z > 0$

i) determinare parte reale e parte immaginaria

ii) per quali $z \in \mathbb{C}$, esse soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann

iii) calcolare $f'(z)$, quando possibile.

7) Sia $f: \Omega \to \mathbb{C}$ derivabile in un aperto Ω di $\mathbb{C}$, $\bar{f}$ derivabile in $\Omega \Rightarrow f$ è costante

Esercizi sulle funzioni olomorfe

Corso di Fisica Matematica 2, a.a. 2011-2012
Dipartimento di Matematica, Università di Milano

18/01/2013

1 Proprietà generali

Esercizio 1.1 Si determini quali tra le seguenti funzioni non sono olomorfe, e quali lo sono eccetto per qualche valore speciale (da indicare) di z. Qui α, β, γ sono costanti complesse, P_n e Q_m polinomi del loro argomento.

$$\begin{array}{rrcl} 1) & f(x,y) & = & \sin(z^2), \\ 2) & f(x,y) & = & |\sin(z^2)|, \\ 3) & f(x,y) & = & e^{-\alpha z} \ \sin(\beta z) \ \tanh(\gamma z), \\ 4) & f(x,y) & = & (1+z^3)^{-5}, \\ 5) & f(x,y) & = & P_n(z), \\ 6) & f(x,y) & = & P_n(1+z)/Q_m(z) \ . \end{array}$$

Esercizio 1.2 Si determini quali tra le seguenti funzioni $f(x,y)$ costituiscono la parte immaginaria di una funzione olomorfa $F(z)$, ed in tal caso si determini la $F(z)$.

$$\begin{array}{rrcl} 1) & f(x,y) & = & x^2+y^2, \\ 2) & f(x,y) & = & x^2-y^2, \\ 3) & f(x,y) & = & \sinh(xy)\cos(x^2-y^2), \\ 4) & f(x,y) & = & \cos(x^2-y^2), \\ 5) & f(x,y) & = & e^y\cos(2x), \\ 6) & f(x,y) & = & e^{2y}\sin(2x) \ . \end{array}$$

Esercizio 1.3 Si determini per quale valore della costante reale K la funzione

$$f(x,y) \ = \ \cos(2x) \ \cosh(Ky)$$

rappresenta la parte immaginaria di una funzione olomorfa $F(z)$, e si determini in tal caso $F(z)$.

2 Mappe conformi

Esercizio 5 *Sia* $f(z) = e^z$. *Verificare che questa mappa conforme conserva l'angolo tra le rette* $y = x$ *e* $y = 2 - x$, *nel loro punto di intersezione.*

[Si chiede quindi di: determinare le curve in cui la mappa trasforma queste rette, calcolare l'angolo formato dalle tangenti alle curve nel punto di intersezione e confrontare questo con l'angolo formato dalle due rette di partenza].

Esercizio 6 *Si consideri la mappa*

$$w = f(z) = iz^3.$$

a. Dopo aver determinato il più grande aperto Ω *su cui* f *è conforme, posto*

$$A = \left\{ z : |z| < 2, \arg z \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right) \right\},$$

determinare $f(A)$ *e verificare che* f *è biunivoca tra* A *e* $f(A)$.

b. Si considerino le rette $r_1 : y = 0$ *e* $r_2 : y = \sqrt{3}x$. *Si determinino le curve* $\widetilde{r}_1, \widetilde{r}_2$ *in cui* f *trasforma* r_1, r_2 *e si confronti l'angolo formato da* r_1, r_2 *con l'angolo formato da* $\widetilde{r}_1, \widetilde{r}_2$. *Commentare il risultato trovato.*

Esercizio 7 *Sia*

$$f(z) = \frac{z - i}{1 - iz}.$$

a. Stabilire in quale aperto A *di* $\mathbb{C}$ *la* f *è una mappa conforme.*

b. Posto $w = f(z)$, *scrivere esplicitamente la funzione inversa* $z = f^{-1}(w)$, *verificando che la* f *è globalmente biunivoca in* A.

c. Verificare che la mappa $w = f(z)$ *trasforma il disco* $\{|z| < 1\}$ *nel semipiano* $\operatorname{Im} w < 0$.

Esercizio 8 *Si consideri la trasformazione del piano complesso*

$$z = f(w) = (w + 1)^2.$$

a. Provare che nel cerchio $B_1(0)$ f *è una mappa conforme.*

b. La funzione f *è globalmente invertibile su* $B_1(0)$? *Scrivere esplicitamente la funzione inversa su tale cerchio.*

c. Sia $D = f(B_1(0))$. *Rappresentare* D *in coordinate polari e cercare di riconoscere di che insieme si tratta (ad esempio, plottando la curva che ne è il bordo).*

d. Si nota che il bordo di D *ha un punto non regolare, mentre il bordo di* $B_1(0)$ *è una circonferenza. Come si può spiegare questo fatto?*

Esercizio 5. Sia $f(z) = e^z$. Verificare che questa mappa conforme conserva l'angolo tra le rette $y = x$ e $y = 2 - x$, nel loro punto di intersezione.

Le rette $y = x$ e $y = 2 - x$ si incontrano nel punto $P(1,1)$ cioè (in notazione complessa) nel punto $z_0 = 1 + i$. Scriviamo le rette $y = x$ e $y = 2 - x$ in forma parametrica complessa.

La retta $y = x$ è:

$$\gamma_1 : z = t(1 + i),$$

e passa per z_0 per $t = 1$. Si ha:

$$\gamma_1'(t) = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

La retta $y = 2 - x$ è:

$$\gamma_2 : z = 2i + t(2 - 2i),$$

e passa per z_0 per $t = 1/2$. Si ha:

$$\gamma_2'(t) = 2 - 2i = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$$

L'angolo tra le due rette originarie è (ovviamente $-\pi/2$, come si vede dalla figura, ma calcoliamolo formalmente):

$$\arg(\gamma_2'(1/2)) - \arg(\gamma_1'(1)) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}.$$

Calcoliamo ora le due curve trasformate.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\gamma}_1(t) &= f(\gamma_1(t)) = e^{t(1+i)} \\
\widetilde{\gamma}_1'(t) &= e^{t(1+i)}(1 + i) \\
\widetilde{\gamma}_1'(1) &= e^{1+i}(1 + i) = e\sqrt{2}e^{i}e^{i\pi/4} \\
\arg(\widetilde{\gamma}_1'(1)) &= 1 + \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\gamma}_2(t) &= f(\gamma_2(t)) = e^{2i+t(2-2i)} \\
\widetilde{\gamma}_2'(t) &= e^{2i+t(2-2i)}(2 - 2i) \\
\widetilde{\gamma}_2'(1/2) &= e^{1+i}(2 - 2i) = e\sqrt{8}e^{i}e^{-i\pi/4} \\
\arg(\widetilde{\gamma}_2'(1/2)) &= 1 - \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

L'angolo tra le due curve trasformate, nel punto z_0, è:

$$\arg(\widetilde{\gamma}_2'(1/2)) - \arg(\widetilde{\gamma}_1'(1)) = 1 - \frac{\pi}{4} - \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2},$$

ed è uguale all'angolo formato dalle due rette di partenza, come previsto dalla teoria.

Esercizio 6. Si consideri la mappa

$$w = f(z) = iz^3.$$

a. Dopo aver determinato il più grande aperto Ω su cui f è conforme, posto

$$A = \left\{ z : |z| < 2, \arg z \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right) \right\},$$

determinare $f(A)$ e verificare che f è biunivoca tra A e $f(A)$.

b. Si considerino le rette $r_1 : y = 0$ e $r_2 : y = \sqrt{3}x$. Si determinino le curve $\widetilde{r}_1, \widetilde{r}_2$ in cui f trasforma r_1, r_2 e si confronti l'angolo formato da r_1, r_2 con l'angolo formato da $\widetilde{r}_1, \widetilde{r}_2$. Commentare il risultato trovato.

a. La funzione f è ovviamente olomorfa in tutto $\mathbb{C}$; $f'(z) = 3iz^2 \neq 0$ per $z \neq 0$, quindi f è conforme in $\Omega = \mathbb{C}^*$.

Ponendo $z = \rho e^{i\theta}$,

$$\begin{aligned} z \in A &\Longleftrightarrow \left(\rho < 2, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)\right) \\ w = f(z) &= iz^3 = e^{i\frac{\pi}{2}} \rho^3 e^{3i\theta} = \rho^3 e^{i\left(3\theta + \frac{\pi}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Ora,

$$\begin{aligned} &\rho < 2 \Longleftrightarrow \rho^3 < 8 \\ &\theta \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right) \Longleftrightarrow 3\theta + \frac{\pi}{2} \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 3\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \end{aligned}$$

quindi

$$f(A) = \left\{ w : |w| < 8, \operatorname{Arg} w \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \right\}$$

cioè $f(A)$ è il semicerchio di centro l'origine e raggio 8 contenuto nel semipiano $\operatorname{Im} z > 0$.

Per verificare la biunivocità, risolviamo in z l'equazione

$$w = iz^3,$$

cioè, ponendo $w = re^{i\phi}$,

$$re^{i\phi} = \rho^3 e^{i\left(3\theta + \frac{\pi}{2}\right)},$$

che dà

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt[3]{r} \\ 3\theta + \frac{\pi}{2} &= \phi, \\ \theta &= \frac{\phi}{3} - \frac{\pi}{6}. \\ z &= \sqrt[3]{|w|} e^{i\left(\frac{\operatorname{Arg} w}{3} - \frac{\pi}{6}\right)}. \end{aligned}$$

b. Consideriamo le rette $r_1 : y = 0$ e $r_2 : y = \sqrt{3}x$. Si incontrano in 0. Scriviamole in forma parametrica complessa.

$r_1 : z = t \in \mathbb{R}$ e passa da 0 per $t = 0$;

$r_2 : z = t\left(1 + i\sqrt{3}\right), t \in \mathbb{R}$ e passa da 0 per $t = 0$.

L'angolo formato tra r_1 e r_2 in 0 è $\frac{\pi}{3}$.

Calcoliamo le curve trasformate delle rette.

$\widetilde{r}_1 : z = f(t) = it^3, t \in \mathbb{R}$,

$\widetilde{r}_1' (t) = 3it^2, \widetilde{r}_1' (0) = 0$.

$\widetilde{r}_2 : z = f\left(t\left(1 + i\sqrt{3}\right)\right) = it^3\left(1 + i\sqrt{3}\right)^3, t \in \mathbb{R}$,

$\widetilde{r}_2' (t) = 3it^2\left(1 + i\sqrt{3}\right)^3, \widetilde{r}_2' (0) = 0$.

Le due curve trasformate hanno entrambe derivata nulla nel punto di intersezione, quindi non è definito né il vettore tangente alla curva né il suo argomento. In particolare, non è possibile dire che l'angolo tra le curve si conserva. Il motivo di questo è che in $z = 0$ la trasformazione ha drivata nulla, quindi non è conforme.

Esercizio 7. Sia

$$f(z) = \frac{z - i}{1 - iz}.$$

a. Stabilire in quale aperto A di $\mathbb{C}$ la f è una mappa conforme.

b. Posto $w = f(z)$, scrivere esplicitamente la funzione inversa $z = f^{-1}(w)$, verificando che la f è globalmente biunivoca in A.

c. Verificare che la mappa $w = f(z)$ trasforma il disco $\{|z| < 1\}$ nel semipiano $\operatorname{Im} w < 0$.

a. La mappa f è definita per $1 - iz \neq 0$, cioè $z \neq -i$. In $A = \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ la funzione è olomorfa e

$$f'(z) = \frac{1 - iz + i(z - i)}{(1 - iz)^2} = \frac{2}{(1 - iz)^2} \neq 0 \text{ in } A.$$

Quindi in A la f è conforme.

b.

$$\begin{aligned} w &= \frac{z - i}{1 - iz} \\ w(1 - iz) &= z - i \\ z(1 + iw) &= w + i \\ z &= \frac{w + i}{1 + iw}, \end{aligned}$$

quindi f è globalmente invertibile (abbiamo scritto l'inversa globale).

c.

$$|z| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{w + i}{1 + iw}\right| < 1$$

e questa disuguaglianza, ponendo $w = x + iy$, è equivalente a:

$$\begin{aligned}
|w+i|^2 &< |1+iw|^2 \\
|x+i\,(1+y)|^2 &< |(1-y)+ix|^2 \\
x^2+(1+y)^2 &< (1-y)^2+x^2 \\
x^2+y^2+2y+1 &< x^2+y^2-2y+1 \\
2y &< -2y \\
y &< 0 \\
\operatorname{Im} w &< 0,
\end{aligned}$$

quindi la tesi è dimostrata.

Esercizio 8. Si consideri la trasformazione del piano complesso

$$z = f\,(w) = (w+1)^2 .$$

a. Provare che nel cerchio $B_1\,(0)$ f è una mappa conforme.

b. La funzione f è globalmente invertibile su $B_1\,(0)$? Scrivere esplicitamente la funzione inversa su tale cerchio.

c. Sia $D = f\,(B_1\,(0))$. Rappresentare D in coordinate polari e cercare di riconoscere di che insieme si tratta (ad esempio, plottando la curva che ne è il bordo).

d. Si nota che il bordo di D ha un punto non regolare, mentre il bordo di $B_1\,(0)$ è una circonferenza. Come si può spiegare questo fatto?

a. La funzione f è olomorfa in $\mathbb{C}$ e

$$f'\,(w) = 2\,(w+1) \neq 0 \text{ per } w \neq -1.$$

Poiché $B_1\,(0) \subset \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, la f è una mappa conforme in $B_1\,(0)$.

b.

$$z = (w+1)^2 .$$

Sia $w = \rho e^{i\theta}$ con $\theta = \operatorname{Arg} w \in (-\pi, \pi]$. Allora $\operatorname{Arg}(w+1) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \rho < 1$, perciò

$$w + 1 = \sqrt{z}$$

(con $\sqrt{z}$ radice principale di z, che ha argomento in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$), e

$$w = \sqrt{z} - 1$$

è la funzione inversa cercata.

c.

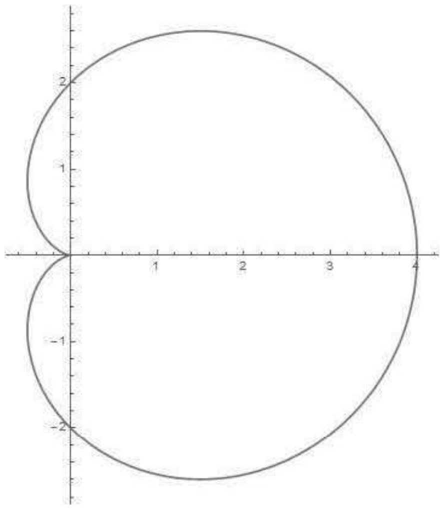
$$|w| < 1 \Longleftrightarrow \left|\sqrt{z} - 1\right| < 1.$$

Sia $z = \rho e^{i\theta}$ con $\theta = \operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi]$. Allora

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{z} - 1\right| &< 1 \\
\left|\sqrt{z} - 1\right|^2 &< 1 \\
\left|\rho^{1/2} e^{i\theta/2} - 1\right|^2 &< 1 \\
\left|\rho^{1/2} \cos(\theta/2) - 1 + i\rho^{1/2} \sin(\theta/2)\right|^2 &< 1 \\
\left(\rho^{1/2} \cos(\theta/2) - 1\right)^2 + \left(\rho^{1/2} \sin(\theta/2)\right)^2 &< 1 \\
\rho + 1 - 2\rho^{1/2} \cos(\theta/2) &< 1 \\
\rho - 2\rho^{1/2} \cos(\theta/2) &< 0 \\
\rho^{1/2} &< 2\cos(\theta/2) \\
\rho &< 4\cos^2(\theta/2)
\end{aligned}$$

(notare che è $\cos(\theta/2) > 0$ perché $\theta = \operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi]$).

La curva di equazione polare $\rho = 4\cos^2(\theta/2)$ è:



e il suo interno è l'insieme $f(B_1(0))$.

d. Il punto $z = 0$ corrisponde a $w = -1$, in cui f' si annulla, quindi la mappa non è conforme.

Esercizio 9. Sia

$$u(x, y) = \sin x \operatorname{Ch} y.$$

a. Verificare che è una funzione armonica nel piano.

b. Determinare la sua armonica coniugata v.