# FUNZIONI DI UNA VARIABILE COMPLESSA
# ESERCIZI

1) Mostrare che i seguenti sviluppi di Laurent sono validi nelle regioni indicate

a) $$\frac{1}{(z-1)(2-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \quad \text{per} \quad 1<|z|<2$$

b) $$\frac{1}{(z-1)(2-z)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-2^n}{z^n} \quad \text{per} \quad |z|>2$$

2) Dare lo sviluppo in serie di Laurent per $f(z) = \dfrac{-2}{z^2-1}$

a) in un intorno di $z=0$; b) in un intorno di $z=1$; c) in un intorno di $z$; d) per $|z|>1$; e) per $|z+1|>2$.

3) Studiare la singolarità in $z=0$ della funzione

$f(z) = \dfrac{1}{e^z-1} - \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{2}$ e darne lo sviluppo in serie attorno a $z=0$

4) Calcolare lo sviluppo di Laurent nelle singolarità delle funzioni

a) $f(z) = \dfrac{1}{z}$; $g(z) = \dfrac{1}{1-\cos z}$; c) $h(z) = e^{1/z}$; d) $l(z) = \operatorname{sen}\dfrac{1}{z}$

5) Sviluppare in serie di Laurent la funzione

$f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(3-z)}$ nei seguenti domini:

a) $|z|<1$; b) $1<|z|<3$; c) $|z|>3$; d) $|z-3|>2$;

e) $|z-3|<2$

## 7.10 Problemi

Problema 7.1. □

Sia $C$ la linea $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ che congiunge i punti $(1, 1)$ e $(2, 3)$. Determinare il valore di

$$\int_C (12z^2 - 4iz)dz$$

Problema 7.2. □

Calcolare

$$\oint_C |z|^2 dz$$

lungo i cerchi (a) $|z| = 1$ e (b) $|z - 1| = 1$.

Problema 7.3. □

Calcolare

$$\int_C \bar{z}^2 dz + z^2 dz$$

lungo la curva C definita da $z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2 = (2 - 2i)z + (2 + 2i)\bar{z}$ tra il punto $z = 1$ e $z = 2 + 2i$.

Problema 7.4. □

Determinare e classificare tutte le singolarità di

(a) $\dfrac{z}{(z^2+4)^2}$,

(b) $\sec \dfrac{1}{z}$,

(c) $\dfrac{\ln(z-2)}{(z^2+2z+2)^2}$,

(d) $\dfrac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$.

Problema 7.5. □

Calcolare

$$\oint_C \frac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2} dz$$

dove $C$ è il cerchio $|z| = 4$.

Problema 7.6. □

Calcolare

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^3} dz$$

dove $C$ è il cerchio $|z| = 2$.

Problema 7.7. □

Dimostrare che

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{zt}}{z^2+1} dz = \sin t$$

per $t > 0$ e $C$ il cerchio $|z| = 3$.

Problema 7.8. □

Calcolare

$$\oint_C \frac{\cos \pi z}{z^2 - 1} dz$$

lungo un rettangolo con vertici in: (a) $2 \pm i$, $-2 \pm i$; (b) $-i$, $2 - i$, $2 + i$, $i$.

Problema 7.9. □

Siano

$$P(z) = \frac{1}{\cos z}, \quad Q(z) = \frac{\cos z}{z^2}, \quad R(z) = \frac{1}{(e^z - 1)^3}.$$

Trovare i poli di $P$, $Q$ e $R$ e il loro ordine.

*I problemi che seguono sono un training sui fondamentali per poter affrontare esercizi più difficili (inclusi alcuni dei precedenti). Procedere passin passetto, l'ordine è grosso modo di difficoltà crescente. Non fare salti, le soluzioni di esercizi precedenti possono essere d'aiuto per esercizi successivi. Per comodità, vengono date le risposte in parentesi quadrate (ma non sono date le soluzioni in appendice).*

Problema 7.10. Classificare le singolarità di $f(z)$ nei punti indicati.

(I) $f(z) = \cot z$ in $z = 0$.

[Polo semplice.]

(II) $f(z) = \dfrac{1 + \cos z}{(z - \pi)^2}$ in $z = \pi$.

[Eliminabile.]

(III) $f(z) = \sin(1/z)$ in $z = 0$.

[Singolarità essenziale.]

(IV) $f(z) = \dfrac{z^2 - z}{z^2 + 2z + 1}$ in $z = -1$.

[Polo di ordine 2.]

(V) $f(z) = z^{-3} \sin z$ in $z = 0$.

[Polo di ordine 2.]

(VI) $f(z) = (\csc z)(\cot z)$ in $z = 0$.

[Polo di ordine 2.]

Problema 7.11. Trovare i residui di $g(z)$ nei punti indicati.