

①

FUNZIONI DI UNA VARIABILE COMPLESSA ESERCIZI

1) Calcolare:

a) $\frac{1-i}{1+i}$; b) $(1+i\sqrt{3})^3$; c) $\text{Log}(-1-i\sqrt{3})$; d) $(-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i))^{40}$

2) Determinare tutti i valori delle seguenti radici e disegnarle
 $\sqrt{3+4i}$; $\sqrt[3]{-2-2i}$; $\sqrt[8]{1}$; $\sqrt[3]{1+i}$

3) Mostrare che l'anello delle matrici della forma $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, è isomorfo a \mathbb{C} .

4) Quel luogo è rappresentato da $|\frac{z-a}{z-\bar{a}}| = c^2$, con c reale?

5) Mostrare che $(1+i)^{4k}$ è reale e $(1+i)^{4k+2}$ è immaginario puro $\forall k \in \mathbb{Z}$.

6) Dimostrare che la funzione $f(z) = (z+a)e^z + (z-a)e^{-z}$, $a \in \mathbb{R}^+$, ha solo radici immaginarie, eccetto $z=0$.

7) Determinare le coordinate dei punti delle sfere di Riemann corrispondenti ai numeri complessi:

a) $-i$; b) $-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$; c) $1+\sqrt{3}i$

8) Mostrare che $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$ è compatto.

FUNZIONI DI UNA VARIABILE COMPLESSA ESERCIZI

1) Trovare le condizioni per cui l'equazione $az + b\bar{z} + c = 0$ ha una sola soluzione e calcolarla

2) Quali sottoinsiemi del piano complesso soddisfanno rispettivamente le equazioni:

i) $z + \bar{z} = 1$

ii) $z + \bar{z} = |z|^2$

iii) $a z \bar{z} + b \bar{z} + \bar{b} z + c = 0$ $a, c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C}$

3) Qual è il luogo rappresentato da $\text{Im}\left[\left(\frac{z}{z-1}\right)^6\right] = 0$?

4) Risolvere le equazioni

sen $z = i$

cos $z = \frac{5}{3}$

5) Provare che i punti z_1, z_2, z_3 sono allineati se e solo se $\lambda z_1 + \mu z_2 + \nu z_3 = 0$, $\lambda + \mu + \nu = 0$, $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ non tutti nulli.

6) Siano dati $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ | $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, $z_1 + z_2 + z_3 = 0$; mostrare che i tre numeri sono vertici di un triangolo equilatero inscritto nel cerchio unitario centrato in 0.