FUNZIONI DI UNA VARIABILE COMPLESSA
ESERCIZI

Calcolare i seguenti integrali reali

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{(a+\cos\vartheta)^2}\, d\vartheta \quad , a>1 \quad ; \qquad \int_0^{\pi} \frac{\cos 2\vartheta}{1-2a\cos\vartheta+a^2}\, d\vartheta \, , \quad a^2<1 \; ;$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5-3\,\mathrm{sen}\,\vartheta}\, d\vartheta \quad ; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos\vartheta}\, d\vartheta \quad ;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+x^2+1}\, dx \quad ; \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3}\, dx \quad ;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\, dx \quad ; \qquad \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{sen}\,x}{x}\, dx \quad ;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+4}\, dx \quad ; \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{sen}\,x}{1+x^2}\, dx \quad ;$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+x^2+1}\, dx \quad ; \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\, dx \, .$$

FUNZIONI DI UNA VARIABILE COMPLESSA
ESERCIZI

1) Dimostrare che ogni funzione olomorfa in $\mathbb{C}_\infty$ è costante

2) Dimostrare che $e^{1/z}$ assume in ogni intorno di zero qualsiasi valore complesso eccetto zero.

3) Determinare la singolarità all'∞ delle funzioni
$f(z) = (z^2+1)(z-1)^{-1}$, $g(z) = z^2+1$; $h(z) = e^z$

4) Supposto noto che $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$, dimostrare che $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1 \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$.
Analogamente per $\operatorname{sen} 2z = 2 \operatorname{sen} z \cos z$. e per
$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2} \quad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

5) Utilizzando il teorema fondamentale dell'algebra, dimostrare che un polinomio $p(z)$ trasforma $\mathbb{C}$ in se stesso.

6) Dimostrare che le funzioni $f(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$ e $g(z) = \dfrac{z}{\operatorname{sen} z}$ sono prolungabili olomorficamente in $z=0$.

7) Determinare il punto di massimo modulo per la funzione $z^2 - 3z + 2$ sul disco $\overline{D(0,1)}$.

8) Ogni funzione intera con un polo di ordine k in ∞ è una funzione polinomiale di grado k.