

FUNZIONI DI UNA VARIABILE COMPLESSA

ESERCIZI

Esercizio .1 - Classificare le singolarità delle funzioni razionali:

$$f_1(s) = \frac{s^2 - 1}{s^2 + 1}; \quad f_2(s) = \frac{7s^3 + 6}{s^2 + is + 1}; \quad f_3(s) = \frac{s - i}{s^2 - 1 + 2is}$$

$$f_4(s) = \frac{s^2 - 1}{s^3 + 6s^2 + 5s - 12}; \quad f_5(s) = \frac{is^4}{(s+1)^4}; \quad f_6(s) = \frac{is^4}{s^4 + 1}$$

Esercizio .2 - Classificare le singolarità delle funzioni non razionali:

$$g_1(s) = \frac{s+1}{e^s(s-1)}; \quad g_2(s) = \frac{s+1}{(e^s-1)s}; \quad g_3(s) = \frac{se^{1/s}}{s^2-9}$$

$$g_4(s) = \frac{\sin(1/s)}{s^2-5s}; \quad g_5(s) = \frac{s^2+4s+3}{\sin s}; \quad g_6(s) = \frac{s^2+4s+3}{e^s}$$

$$g_7(s) = \frac{\sin(2s)}{s^2-2s}; \quad g_8(s) = \frac{\sin(2s)}{(s^2-2s)^2}; \quad g_9(s) = e^{1/s^2} \sin(s^2+5)$$

Soluzioni Esercizio .1 -

- f_1 : $\pm i$ poli semplici; ∞ p. regolare;
- f_2 : $-\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)i$; 2 ; $(\sqrt{5}-1)i$ poli semplici; ∞ polo semplice;
- f_3 : $-i$ polo doppio; ∞ zero semplice;
- f_4 : -4 ; -3 poli semplici; -1 sing. eliminabile; ∞ zero semplice;
- f_5 : -1 polo quarto ordine; ∞ p. regolare;
- f_6 : $\pm(\sqrt{2}/2) \pm i(\sqrt{2}/2)$ poli semplici; ∞ p. regolare.

Soluzioni Esercizio 2 -

- g_1 : 1 polo semplice; ∞ essenziale;
- g_2 : 0 polo doppio; $2k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ poli sempl.; ∞ sing. non isolata;
- g_3 : 0 essenziale; ± 3 poli semplici; ∞ zero semplice;
- g_4 : 0 essenziale; 5 polo semplice; ∞ zero ordine 3;
- g_5 : $k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ poli semplici; ∞ sing. non isolata;
- g_6 : ∞ essenziale;
- g_7 : 0 eliminabile; 2 polo semplice; ∞ essenziale;
- g_8 : 0 polo semplice; 2 polo doppio; ∞ essenziale;
- g_9 : 0 essenziale; ∞ essenziale.

ESERCIZI

① Ciascuna delle seguenti funzioni ha una singolarità isolata in $z=0$.

Determinare il tipo della singolarità. Se $z=0$ è una singolarità rimovibile di f , (tale, cioè, che la funzione si può prolungare in una funzione derivabile in $z=0$), definire $f(0)$ in modo che f venga olomorfa in un intorno di 0 .

(a) $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$;

(b) $f(z) = \frac{\cos z}{z}$;

(c) $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z}$;

(d) $f(z) = e^{1/z}$;

(e) $f(z) = \frac{1}{z} \operatorname{tg}(z+1)$;

(f) $f(z) = z \cos(1/z)$;

(g) $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z(z-1)}$;

(h) $f(z) = (1 - e^z)^{-1}$;

(i) $f(z) = z \operatorname{sen}(1/z)$.

② Classificare le singolarità delle seguenti funzioni:

(a) $f(z) = \frac{(z-1)z}{(z^2+9)^3(z^2-1)}$;

(d) $f(z) = \frac{1}{\cos^2 z} \operatorname{tg} z$;

(b) $f(z) = \frac{1}{\cos z}$;

(e) $f(z) = \frac{3 - \operatorname{sen} z}{(z-1)^3 \operatorname{sen} z}$;

(c) $f(z) = \frac{\operatorname{tg}(z-3)}{(z^2+2z+2)^3}$;

(f) $f(z) = \frac{1}{z} \cos\left(\frac{1}{z}\right)$.