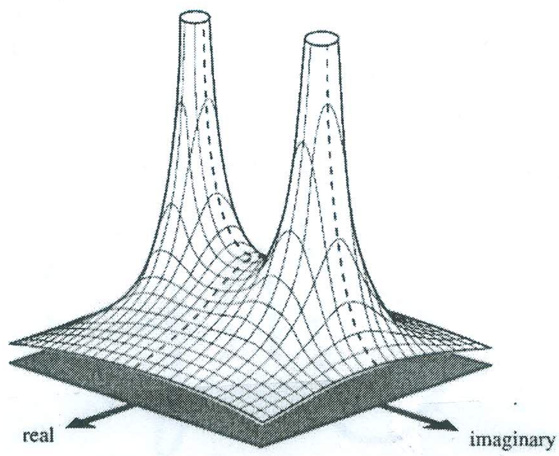
GRAFICO DELLA SUPERFICIE MODULARE

• POLO In prossimità del polo, la superficie modulare ha un picco che tende all'∞ man mano che ci si avvicina al polo

Per esempio: la superficie modulare
della funzione $1/(1+z^2)$ mostra nitidamente i due poli $+i$ e $-i$.

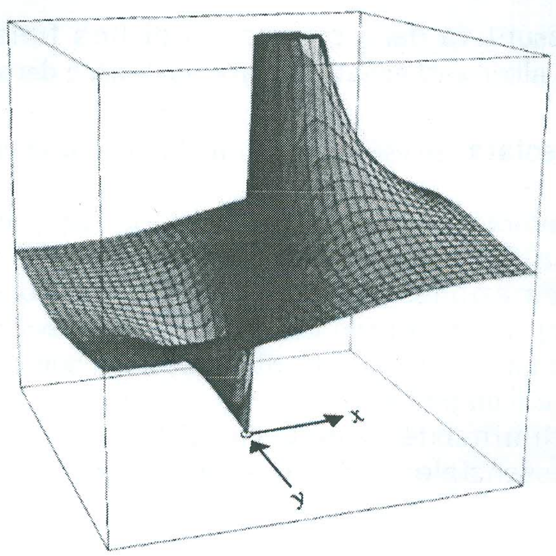


• **Singolarità essenziali.** In aggiunta ai poli, una funzione altrimenti analitica, può avere quelle che sono chiamate *singolarità essenziali.* In prossimità di una singolarità essenziale a il comportamento di f è abbastanza selvaggio e strano: infatti, se f fosse limitata, a non sarebbe una singolarità, e se f andasse all'infinito man mano che ci si avvicina ad a da qualunque direzione, a sarebbe un polo.

Consideriamo l'esempio standard $g(z) = e^{1/z}$, che chiaramente ha una singolarità di qualche tipo nell'origine. Se scriviamo $z = re^{i\theta}$, allora

$$|g(z)| = e^{\frac{\cos\theta}{r}}$$

La figura sotto ne mostra la superficie modulare



Se f si avvicina a 0 lungo l'asse immaginario, allora $g(z)$ tende a 1. Ma se l'avvicinamento avviene lungo un cammino a sinistra dell'asse immaginario, dove $\cos\theta < 0$, allora $g(z)$ tende a 0; se z si avvicina lungo un cammino a destra dell'asse immaginario, $g(z)$ tende all'infinito e la velocità con cui ci va è al di là della comprensione di un qualunque polo: $\nexists\, m$ tale che la moltiplicazione per z^m possa annullare l'esplosione della funzione in zero.
(Si ricordi che $\lim_{x \to 0} x^m e^{1/x} = \infty \quad \forall m$!)