CHAPTER 5

Exams

Here is the list of 18+6 questions you have to know. In any written exam you have to answer to 3 in the first group and 1 in the second.

First group

(1) Definition of differentiable structure and differentiable m-manifold
(2) Statement of rank Theorem
(3) Definition of n-submanifold of an m-manifold
(4) Definition of embedding
(5) Definition of derivation and tangent space at a point p of a manifold M
(6) Definition of differential of a map $\varphi : M \to N$ between manifolds
(7) Definition of vector field
(8) Definition of flow of a one parameter vector field.
(9) Definition of distribution
(10) Statement of Frobenius Theorem
(11) Definition of fibration and transition functions
(12) Definition of vector bundle
(13) Definition of vector bundle morphism
(14) Definition of normal bundle of a submanifold $X \subset M$
(15) Definition of self-adjoint linear endomorphism
(16) Definition of normal curvature and statement of Meusnier Theorem
(17) Definition of principal curvatures, principal directions, Gaussian curvature and mean curvature
(18) Definition of ruled surface and developable surface.

Second group

(1) Prove that if $F : N \to M$ is a map of constant rank k, and $q \in F(N)$ is a point, then $F^{-1}(q)$ is a $(n-k)$-submanifold.
(2) State and prove the chain rule for maps between manifolds.
(3) Prove that DN_p is self-adjoint.
(4) Let $\alpha : J \to S$ be a curve prove, that $II_p(\alpha') = k_\alpha \langle n_\alpha \cdot N \rangle$, and conclude Meusnier Theorem.
(5) Prove that if $p \in l \subset S$ is a point on a line in a smooth surface S then $K(p) \leq 0$.
(6) Prove that tangent developable are developable surfaces.

Versione italiana

Primo gruppo

(1) Definizione di struttura differenziabile (DS) e manifold.
(2) Enunciato del teorema del rango costante.
(3) Definizione di manifold e submanifold.
(4) Definizione di embedding.
(5) Definizione di derivazione spazio tangente in un punto ad un manifold.
(6) Definizione di differenziale di un morfismo $\varphi : M \to N$ tra manifolds.
(7) Definizione di campo di vettori.
(8) Definizione di flusso per un campo di vettori ad un paramtro.
(9) Definizione di distribuzione.
(10) Enunciato del Teorema di Frobenius e delle nozioni di integrabilità e involutività.
(11) Definizione di fibrazione e di funzioni di transizione.
(12) Definizione di fibrato vettoriale.
(13) Definizione di morfismo tra fibrati vettoriali.
(14) Definizione di fibrato normale di un submanifold $X \subset M$.
(15) Definizione di operatore lineare autoaggiunto.
(16) Definizione di curvatura normale e enunciato del Teorema di Meusnier.
(17) Definizione di curvature principali, direzioni principali, curvatura Gaussiana e curvatura media.
(18) Definizione di superficie rigata e superficie sviluppabile.

Secondo gruppo

(1) Si mostri che se $F : N \to M$ è un morfismo di rango costante k e $q \in F(N)$ è un punto allora $F^{-1}(q)$ è un $(n-k)$-submanifold.
(2) Enunciare e dimostrare la regola del differenziale di funzioni composte.
(3) Si mostri che DN_p è auto aggiunto.
(4) Sia $\alpha : J \to S$ una curva. Si mostri che $II_p(\alpha') = k_\alpha \langle n_\alpha \cdot N \rangle$, e si dimostri il Teorema di Musnier.
(5) Si mostri che se $p \in l \subset S \subset \mathbb{R}^3$ è un punto su una retta allora $K(p) \leq 0$.
(6) Si mostri che la sviluppabile delle tangenti è una superficie sviluppabile.