Geometria 3 (nuovo ordinamento)
Esame scritto del 20/9/2007

Le risposte non giustificate o illeggibili non saranno corrette. A fianco di ogni domanda è indicato il punteggio. Non è necessario descrivere le equazioni di retrazioni, omotopie e omeomorfismi nel caso siano evidenti. Si è ammessi all'orale con un punteggio minimo di 12/30.

Esercizio 1.

Sia
$$U_{i,j,k} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | |x| < i, |y| < j, |z| < k\}$$
e si consideri lo spazio topologico $X = (\mathbb{R}^3, \mathcal{U})$, dove
$$\mathcal{U} = \{\emptyset, \mathbb{R}^3, U_{i,j,k}\}_{i,j,k \in \mathbb{R}^{>0}}$$

[5] determinare la chiusura e l'interno di
$$W = \{(x,y,z) \in R^3 | \ |x| \leq 1, \ |y| < 2\}$$
e
$$Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \ |x| = 1\}$$

[5] Sia $f : \mathbb{R}^3 \to X$ la funzione definita da
$$f(x,y,z) = (x^4 + y^2 - 57z, y^3 - z^{15}, z^2 + y^3 - 13x)$$
dire se f è continua e se è aperta o chiusa, dove $\mathbb{R}^3$ ha la topologia usuale.

[5] Sia $Y \subset X$ un sottospazio con $(0,0,0) \in Y$. Mostrare che Y è connesso. Dare un esempio di sottospazio $T \subset X$ non connesso.

Esercizio 2.

Si considerino i seguenti spazi topologici, dotati della topologia usuale:

. $S^2 \times S^1$

. $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 3x^2 + 4y^2 = 5\}$

. $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

Per questi tre spazi:

[5] si determini il gruppo fondamentale

[5] si dica se è omeomorfo a S^1

[5] si dica se può esistere un rivestimento $p : X \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, dove X è uno spazio della lista.