Geometria 3 (nuovo ordinamento)
Esame scritto del 17/12/2007

Le risposte non giustificate o illeggibili non saranno corrette. A fianco di ogni domanda è indicato il punteggio. Non è necessario descrivere le equazioni di retrazioni od omotopie nel caso siano evidenti. Si è ammessi all'orale con un punteggio minimo di 12/33.

Esercizio 1.

Si consideri l'insieme $\mathbb{R}^2$ e i sottoinsiemi $F_m := (0, m) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$, con m intero positivo o ∞. Sia

$$\mathcal{U} := \{\emptyset, \mathbb{R}^2, F_m\}$$

[3] si mostri che $\mathcal{U}$ è una topologia per $\mathbb{R}^2$; e sia $X = (\mathbb{R}^2, \mathcal{U})$

[5] Si mostri che X è compatto e non è di Hausdorff. Si mostri che ogni sottospazio di X è connesso.

[3] Si determini la chiusura di S^1 e $\{(\sqrt{2}, 5)\}$, intesi come sottoinsiemi di X

[6] Sia $f_x : I \to X$ definita da $f_x(t) = tx$, con $x \in X$ un punto. Si mostri che f_x è continua e si concluda che X è connesso per archi e contraibile.

Esercizio 2.

Sia X il seguente anello dotato della topologia usuale, si consideri la pietra solidale e inscindibile dal metallo,

[3] Si determini $\pi_1(X)$

[6] Si dica se X è omeomorfo a:

- S^3
- S^1
- $S^1 \times D^2$

[4] Sia $Y = \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \setminus [0, 0, 1]$ si dica se $X \simeq Y$

[3] Sia ora X' lo spazio che si ottiene contraendo la pietra (con la sua montatura) ad un punto. Si mostri che $X \not\approx X'$.