Topologia (ordinamento 270)
Geometria 3 (ordinamento 509)
Esame scritto del 12/09/2011

Le risposte non giustificate o illeggibili non saranno corrette. A fianco di ogni domanda è indicato il punteggio. Non è necessario descrivere le equazioni di retrazioni od omotopie nel caso siano evidenti. Si è ammessi all'orale con un punteggio minimo di 12/30.

Esercizio 1.

Si indichi con

$$c_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | xy = a\},$$

per $a \in \mathbb{R}$. Si consideri la seguente famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$

$$C := \{C_J, \emptyset\},$$

con $C_J = \cup_{j\in J} c_{a_j}$ per un qualunque indice J.

[2] Si mostri che C è una famiglia di chiusi per una topologia. Si indichi con $\mathcal{U}$ la topologia associata e con $X = (\mathbb{R}^2, \mathcal{U})$.

[4] Si determini la chiusura e l'interno di

$$W_1 = \{(x,y) \in X | x^2 + y^2 = 5\} \text{ e } W_2 = \{(x,y) \in X | xy < -1\}$$

[6] Si mostri che X non è di Hausdorff e non è connesso.

[3] Sia determini $\pi_1(X, (1,1))$.

Esercizio 2.

Sia $Z = S^1 \times \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ dotato della topologia usuale $C_p = \{p\} \times \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \subset Z$ con $p \in S^1$ un punto.

[4] Si dica se Z è omotopicamente equivalente a S^1 e si determini il gruppo fondamentale di $Z \setminus C_p$.

[4] Sia $Y := Z \setminus \{C_N \cup C_S\}$, con N, S punti distinti di S^1. Si osservi che Y non è connesso e si determini il gruppo fondamentale di ogni sua componente connessa.

[5] Si dica se possono esistere dei rivestimenti:

- $p_1 : Z \to Y$
- $p_2 : Y \to Z$
- $p_3 : S^1 \times \mathbb{R} \to Z$

[2] Si mostri che lo spazio X del primo esercizio non è omeomorfo ad alcun sottospazio di Z.