Geometria 3 (ordinamento 509)
Esame scritto del 5/04/2011

Le risposte non giustificate o illeggibili non saranno corrette. A fianco di ogni domanda è indicato il punteggio. Non è necessario descrivere le equazioni di retrazioni od omotopie nel caso siano evidenti. Si è ammessi all'orale con un punteggio minimo di 12/30.

Esercizio 1.

Sia X lo spazio topologico ($\mathbb{R}^2$, topologia cofinita).

[3] Si determini la chiusura e l'interno di

$$W_1 = \{(x, y) \in X | x + y > 0\} \quad e \quad W_2 = \{(x, y) \in X | x^2 + y^2 > 0\}$$

[4] Si mostri che X non è di Hausdorff ed è connesso. Si mostri che ogni sottspazio di X è compatto.

[4] Si mostri che la funzione $f : X \times I \to X$ definita da $f(x, t) = tx$ non è continua, dove I è l'intervallo unitario dotato della topologia usuale.

[4] Si mostri che X è connesso per archi e si dica se X è semplicemente connesso.

Esercizio 2.

Sia $Z = S^1 \times \mathbb{Z}$, con $S^1 \subset \mathbb{C}$ e $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ dotati della topologia usuale

[5] Si dica se Z è omeomorfo o omotopicamente equivalente a $S^1 \times \mathbb{R}$. Sia $p = (1, 0) \in Z$, si determini il gruppo fondamentale $\pi_1(Z, p)$.

[5] Si consideri la seguente relazione di equivalenza su Z.

$$(x, n) \sim (y, m) \text{ se x=y=1.}$$

Sia $Y := Z/\sim$ il quoziente di Z tramite la relazione $\sim$. Si mostri che Z è connesso per archi e non è semplicemente connesso.

[5] Si dica se può esistere un rivestimento $p : Y \times I \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$