Topologia (ordinamento 270)
Esame scritto del 01/02/2011

Le risposte non giustificate o illeggibili non saranno corrette. A fianco di ogni domanda è indicato il punteggio. Non è necessario descrivere le equazioni di retrazioni od omotopie nel caso siano evidenti. Si è ammessi all'orale con un punteggio minimo di 12/33.

Esercizio 1.
[2] Si consideri la seguente famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

$$B := \{\emptyset, [a, b]\}_{a \leq b \in \mathbb{R}},$$

Si mostri che B è una base per una topologia su $\mathbb{R}$ e si indichi con $X = (\mathbb{R}, \mathcal{U}_B)$ lo spazio topologico associato.
[3] Si determini la chiusura e l'interno di

$$W_1 = (0, 1) \cup [3, +\infty) \quad \text{e} \quad W_2 = \{7 - 1/n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

[4] Si mostri che X è di Hausdorff e non è connesso. Si mostri che i compatti di X sono tutti e soli i sottospazi finiti.
[4] Si mostri che $\pi_1(X, 0) = \mathbf{1}$.
[3] Sia $g : \mathbb{Z} \times X \to X$ l'applicazione definita da $g(n, x) = x + n$. Si mostri che g è un azione continua e sia Y il quoziente. Si dica se $Y \approx S^1$.

Esercizio 2.
Sia $Z = S^4 \setminus \{[1, 0, 0, 0], [-1, 0, 0, 0]\}$ dotato della topologia usuale
[5] Si dica se Z è omeomorfo o omotopicamente equivalente a S^3 e si determini il gruppo fondamentale di Z.
[4] Sia $Y = Z/\mathbb{Z}_2$ il quoziente di Z tramite l'azione antipodale. Si osservi che il quoziente $p : Z \to Y$ è un rivestimento e si determini il gruppo fondamentale di Y.
[4] Si dica se può esistere un rivestimento $p : \mathbb{P}^4 \to Y$
[4] Si mostri che lo spazio X del primo esercizio non è omeomorfo ad un sottospazio di Z.