Topologia (ordinamento 270)
Esame scritto del 25/01/2012

Le risposte non giustificate o illeggibili non saranno corrette. A fianco di ogni domanda è indicato il punteggio. Non è necessario descrivere le equazioni di retrazioni od omotopie nel caso siano evidenti. Si è ammessi all'orale con un punteggio minimo di 12/33.

Esercizio 1.
[2] Si consideri $\mathbb{R}^3$ e sia $B_n := B_{1/2}((n,n,n))$ la bolla di raggio 1/2 centrata nel punto $(n,n,n) \in \mathbb{R}^3$.
Si mostri che $\{\emptyset, B_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ non è una base per una topologia e che $\mathcal{B} := \{\emptyset, B_n, \mathbb{R}^3\}_{n\in\mathbb{Z}}$ è una base per una topologia si indichi con $X = (\mathbb{R}^3, \mathcal{U}_B)$ lo spazio topologico associato a quest'ultima base.
[3] Si determini la chiusura e l'interno di

$$W_1 = \{(x,y,z) \in X | x^2+y^2+z^2 \leq 1\} \quad \text{e} \quad W_2 = \{(x,y,z) \in X | x = 0\}$$

[4] Si mostri che X non è di Hausdorff ed è connesso. Si mostri che tutti gli spazi limitati sono compatti ma che esistono sottospazi propri compatti e non limitati.
[4] Si mostri che $\pi_1(X,(0,0,0)) = \mathbf{1}$.
[3] Sia $g : \mathbb{Z} \times X \to X$ l'azione definita da

$$g(m,(x,y,z)) = (x+m, y+m, z+m).$$

Si mostri che g è un azione continua ma non propriamente discontinua.

Esercizio 2.
Sia $g_1 : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'azione definita da

$$g_1(m,(x,y)) = (x+m, y+m).$$

Sia $Y = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ il quoziente associato.
[5] Si mostri che l'azione è propriamente discontinua e si determini il gruppo fondamentale di Y.
[4] Si mostri che $Y \not\approx S^1 \times I$ e che $S^1 \simeq Y$.
[4] Sia $g_2 = \mathbb{Z}_2 \times Y \to Y$ l'azione definita da $g_2(\pm 1, [(x,y)]) = [(x, \pm y)]$ e W il quoziente associato. Si dica se può esistere un rivestimento $p : W \to Y$.
[4] Sia $\Sigma^n = \prod_1^n S^1$ il prodotto cartesiano di n circonferenze. Si mostri che per ogni n non esiste alcun rivestimento $p : \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \to \Sigma^n$