Geometria 3 (ordinamento 509)
Esame scritto del 19/04/2012

Le risposte non giustificate o illeggibili non saranno corrette. A fianco di ogni domanda è indicato il punteggio. Non è necessario descrivere le equazioni di retrazioni od omotopie nel caso siano evidenti. Si è ammessi all'orale con un punteggio minimo di 12/30.

Esercizio 1.
[2] Si consideri l'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e sia

$$I_n := (n - 1/3, n + 1/3) \times (n - 1/3, n + 1/3).$$

Si mostri che $\{\emptyset, I_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ non è una base per una topologia e che $\mathcal{B} := \{\emptyset, I_n, \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}_{n,m\in\mathbb{Z}}$ è una base per una topologia si indichi con $X = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{U}_B)$ lo spazio topologico associato a quest'ultima base.
[3] Si determini la chiusura e l'interno di

$$W_1 = \{(x, y) \in X | x^2 + y^2 \geq 1\} \text{ e } W_2 = \{(x, y) \in X | x < 0\}$$

[4] Si mostri che X non è di Hausdorff ed è connesso. Si mostri che tutti gli spazi limitati sono compatti ma che esistono sottospazi propri compatti e non limitati.
[4] Si mostri che $\pi_1(X, (0, 0, 0)) = \mathbf{1}$.

Esercizio 2. Sia $Z = S^2 \times \mathbb{Q}$, con $S^1 \subset \mathbb{C}$ e $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ dotati della topologia usuale
[5] Si dica se Z è omotopicamente equivalente a $S^1 \times \mathbb{R}$. Sia $p \in S^2 \times \{0\}$ un punto, si determini il gruppo fondamentale $\pi_1(Z, p)$.
[5] Si consideri la seguente relazione di equivalenza su Z.

$$(x, n) \sim (y, m) \text{ se x=y=1.}$$

Sia $Y := Z/\sim$ il quoziente di Z tramite la relazione $\sim$. Si mostri che Z è connesso per archi e che il quoziente $f : Z \to Y$ non è un rivestimento.
[5] Si mostri che $Z \approx S^2 \times \mathbb{Z}$, con $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ dotato della topologia usuale.