# Topologia (ordinamento 270)
# Geometria 3 (ordinamento 509)
# Esame scritto del 21/09/2012

Le risposte non giustificate o illeggibili non saranno corrette. A fianco di ogni domanda è indicato il punteggio. Non è necessario descrivere le equazioni di retrazioni od omotopie nel caso siano evidenti. Si è ammessi all'orale con un punteggio minimo di 12/30.

*Esercizio* 1.
[2] Si consideri l'insieme $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ e sia

$$I_{r,m,n} := B_r(0,0) \times (m,n),$$

con $r \in \mathbb{Q}$ e $m < n \in \mathbb{Z}$.

Si mostri che $\{\emptyset, I_{r,m,n}\}_{m,n \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{Q}}$ è una base per una topologia si indichi con $X = (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \mathcal{U}_B)$ lo spazio topologico associato a quest'ultima base.
[3] Si determini la chiusura e l'interno di

$$W_1 = \{((x_1, x_2), y) \in X | x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \text{ e } W_2 = \{((x_1, x_2), y) \in X | y = 0\}$$

[4] Si mostri che $X$ non è compatto e che ogni compatto di $X$ è necessariamente limitato (per la metrica euclidea). Si mostri che $X$ è connesso.
[3] Si dica se possono esistere sottospazi topologici $Y \subset X$ compatti per la topologia $\mathcal{U}_B$ e non compatti per la topologia usuale di $\mathbb{R}^2$, e in tal caso se ne dia un esempio.
[3] Si dica se possono esistere sottospazi topologici $Y \subset X$ connessi per la topologia $\mathcal{U}_B$ e non connessi per la topologia usuale di $\mathbb{R}^2$, e in tal caso se ne dia un esempio.

*Esercizio* 2. Sia $Z = \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dotato della topologia usuale
[5] Sia $p = (1,0) \in Z$, si determini il gruppo fondamentale $\pi_1(Z, p)$. Si dica se $Z$ è omeomorfo o omotopicamente equivalente a $S^1 \times \mathbb{R}$.
[5] Si consideri la seguente relazione di equivalenza su $Z$.

$$x \sim y \text{ se esiste } \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ tale che } x = \lambda y.$$

Sia $Y := Z/\sim$ il quoziente di $Z$ tramite la relazione $\sim$. Si mostri che $Y \setminus \{[(1,0)]\} \approx \mathbb{C}$
[5] Si concluda che $Y \approx S^2$ e si calcoli $\pi_1(Y)$.