Geometria 3 (nuovo ordinamento)
Esame scritto del 2/12/2009

Le risposte non giustificate o illeggibili non saranno corrette. A fianco di ogni domanda è indicato il punteggio. Non è necessario descrivere le equazioni di retrazioni od omotopie nel caso siano evidenti. Si è ammessi all'orale con un punteggio minimo di 12/33.

Esercizio 1.
Si consideri la seguente famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

$$\mathcal{B} = \{\emptyset, [a, b) \text{con } a < b \in \mathbb{R}\}$$

[3] Si mostri che $\mathcal{B}$ è una base per una topologia su $\mathbb{R}$.
Sia $\mathcal{U}$ tale topologia e si indichi con $X = (\mathbb{R}, \mathcal{U})$.
[4] Si determini la chiusura e l'interno di

$$W_1 = \{1/n\}_{n\in\mathbb{N}^{>0}} \quad \text{e } \mathrm{W}_2 = \{-1/\mathrm{n}\}_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}^{>0}} \cup (2, 3)$$

in X.
Sia $Y = X \times X$ dotato della topologia prodotto.
[3] Si mostri che Y non è compatto, è di Hausdorff e non è connesso per archi
[4] si mostri che esistono funzioni continue e biiettive $f : Y \to \mathbb{R}^2$.
[3] si mostri che le uniche funzioni continue $g : \mathbb{R}^2 \to X$ sono le funzioni costanti

Esercizio 2.
Sia Y lo spazio topologico nella figura (dotato della topologia usuale).

[3] Si determini il gruppo fondamentale di Y
[2] Si dica se esistono i seguenti rivestimenti, e in caso positivo li si descriva,

- $p : Y \to S^1 \times \mathbb{R}$
- $p : S^1 \times \mathbb{R} \to Y$

[4] Si dica se Y è omeomorfo a $S^1 \times S^1 \times I$ o a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0), (1, 0)\}$
[4] Si dica se Y è omotopicamente equivalente a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0), (1, 0)\}$
[3] Sia $Z = Y \setminus \{y\}$, con $y \in Y$ un punto. Si dica se Z è omeomorfo o omotopicamente equivalente a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0), (1, 0)\}$