Geometria 3 (nuovo ordinamento)
Esame scritto del 22/03/2010

Le risposte non giustificate o illeggibili non saranno corrette. A fianco di ogni domanda è indicato il punteggio. Non è necessario descrivere le equazioni di retrazioni od omotopie nel caso siano evidenti. Si è ammessi all'orale con un punteggio minimo di 12/30.

Esercizio 1.

Siano $X = (\mathbb{R}^3, \text{topologia cofinita})$ e $Y = (\mathbb{R}^3, \text{topologia discreta})$ due spazi topologici.

[7] Si mostri che X non è omeomorfo a Y. Siano

$$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y = z = 1\} \ e \ W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x > 0\}.$$

Si determini la chiusura e l'interno di W_1 e W_2 in entrambi gli spazi topologici X e Y.

[5] Si mostri che:

. tutti i sottospazi di X con cardinalità infinita sono connessi

. le uniche applicazioni continue $f : X \to Y$ sono le funzioni costanti.

[3] Si determinino i sottoinsiemi compatti di X e di Y.

Esercizio 2.

Sia $Z = S^1 \times \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ lo spazio topologico dotato della topologia usuale

[3] Si determini $\pi_1(Z)$

[4] Si dica se Z è omeomorfo o omotopicamente equivalente a:

. $S^1 \times S^2$

. $S^1 \times \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$

[8] Sia $\sim$ la relazione di equivalenza su X definita nel modo seguente

$$(x, y) \sim (x_1, y_1) \text{ se } x = \pm x_1 \text{ e } y = y_1$$

Sia $Z_1 = Z/\sim$ lo spazio quoziente. Si determini il gruppo fondamentale di Z_1 e si dica se Z_1 è omeomorfo a Z.