Geometria 3 (nuovo ordinamento)
Esame scritto del 15/09/2010

Le risposte non giustificate o illeggibili non saranno corrette. A fianco di ogni domanda è indicato il punteggio. Non è necessario descrivere le equazioni di retrazioni od omotopie nel caso siano evidenti. Si è ammessi all'orale con un punteggio minimo di 12/30.

Esercizio 1.
[2] Si consideri la seguente famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

$$B := \{\emptyset, (n, m)\}_{n,m\in\mathbb{Z}},$$

Si mostri che B è una base per una topologia su $\mathbb{R}$ e si indichi con $X = (\mathbb{R}, \mathcal{U}_{B_i})$ lo spazio topologico associato.
[4] Sia $\mathbb{R}$ la retta reale dotata della topologia usuale, e si definisca

$$Y = \mathbb{R} \times X.$$

Si dica se Y è : connesso, di Hausdorff, compatto.
[5] Si dia un esempio di una funzione continua $f : Y \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(Y)$ non è limitato. Si mostri che non esistono funzioni continue ed iniettive $g : Y \to \mathbb{R}^2$. Si concluda che $Y \not\approx \mathbb{R}^2$
[4] Si dica se Y è omemorfo a: $(\mathbb{R}^2, \text{topologia cofinita})$, $X \times X$.

Esercizio 2.
Sia $Z = \mathbb{P}^2 \setminus \{[1, 0, 0]\}$ dotato della topologia usuale
[4] Si mostri che $\pi_1(Z)$ non è un gruppo finito.
[7] Si dica se Z è omeomorfo o omotopicamente equivalente a:

. $S^1 \times I$
. $\mathbb{R}^2$
. $Z \times \mathbb{R}$

[4] Si determini una funzione non costante continua $f : Y \to Z$, dove Y è lo spazio topologico definito nell'esercizio 1.