# Geometria 3 (nuovo ordinamento)
# Esame scritto del 21/07/2010

Le risposte non giustificate o illeggibili non saranno corrette. A fianco di ogni domanda è indicato il punteggio. Non è necessario descrivere le equazioni di retrazioni od omotopie nel caso siano evidenti. Si è ammessi all'orale con un punteggio minimo di 12/30.

*Esercizio* 1.
[3] Siano

$$B_1 = \{\emptyset, (s,t)\}_{s,t\in\mathbb{Q}}, \quad B_2 = \{\emptyset, \mathbb{R}, (s,t)\}_{s,t\in\mathbb{N}}$$

due famiglie di sottoinsiemi della retta reale $\mathbb{R}$. Si mostri che $B_1$ e $B_2$ sono basi per una topologia su $\mathbb{R}$ e si indichi con $X_i = (\mathbb{R}, \mathcal{U}_{B_i})$ gli spazi topologici associati.
[4] Si mostri che $X_1 \approx \mathbb{R}$, e $X_2 \not\approx \mathbb{R}$, con $\mathbb{R}$ la retta reale dotata della topologia usuale.
[4] Sia $f : X_2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si mostri che $f(X_2)$ è limitato. Sia $g : \mathbb{R} \to X_2$ definita da

$$g(t) = \begin{cases} -e^{\frac{1}{t}} & \text{per } t < 0 \\ t & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

si mostri che $g$ è continua.
[4] Si dica se $X_2$ è connesso per archi.

*Esercizio* 2.
Sia $Z = S^3 \setminus \{(1,0,0,0), (-1,0,0,0)\} \subset \mathbb{R}^4$ lo spazio topologico dotato della topologia usuale
[4] Si determini $\pi_1(Z)$
[7] Si dica se $Z$ è omeomorfo o omotopicamente equivalente a:
. $S^1 \times S^2$
. $S^2 \times I$
. $Z \times \mathbb{R}$
[4] Si determini una funzione non costante continua $f : Z \to X_2$, dove $X_2$ è lo spazio topologico definito nell'esercizio 1.