Geometria 3 (nuovo ordinamento)
Esame scritto del 23/06/2009

Le risposte non giustificate o illeggibili non saranno corrette. A fianco di ogni domanda è indicato il punteggio. Non è necessario descrivere le equazioni di retrazioni od omotopie nel caso siano evidenti. Si è ammessi all'orale con un punteggio minimo di 12/30.

Esercizio 1.

Si consideri la seguente famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{B} = \{\emptyset, B_a((0,0)) \text{ con } a \in \mathbb{Q}^* \text{ positivo } \}$$

dove $B_a((0,0))$ è la bolla di raggio a centrata nell'origine.

[3] Si mostri che $\mathcal{B}$ è una base per una topologia su $\mathbb{R}^2$.

Sia $\mathcal{U}$ tale topologia e si indichi con $X = (\mathbb{R}^2, \mathcal{U})$.

[4] Si determini la chiusura e l'interno di

$W_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ (3,\pi) \times (\sqrt{2}, 7)\}$ e $\mathrm{W}_2 = \{(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2 | \mathrm{x}^2 - \mathrm{y}^2 = 1\}$ in X.

[4] Si mostri che esiste una mappa continua e suriettiva $f : \mathbb{R}^2 \to X$ e che non esistono mappe continue e suriettive $g : X \to \mathbb{R}^2$.

[4] Si mostri che X è contraibile.

Esercizio 2.

Si consideri lo spazio topologico

$$Y = S^1 \times S^1$$

dotato della topologia usuale.

[4] Si determini il gruppo fondamentale di Y e di $Y \setminus Z$ dove $Z = \{N\} \times S^1 \subset Y$, con $N = (1,0) \in S^1 \subset \mathbb{R}^2$.

[4] Si dica se Y è omeomorfo o omotopicamente equivalente a:

- $S^1 \times S^1 \times I$
- $S^2 \times S^1$

[4] Si mostri che $Y \setminus Z \not\approx I \times S^1$ e che $Y \setminus Z \simeq S^1$

[3] Si dica se $Y \setminus \{(N,N)\}$ è omeomorfo o omotopicamente equivalente a $Y \setminus Z$