Geometria 3 (nuovo ordinamento)
Esame scritto del 3/12/2008

Le risposte non giustificate o illeggibili non saranno corrette. A fianco di ogni domanda è indicato il punteggio. Non è necessario descrivere le equazioni di retrazioni od omotopie nel caso siano evidenti. Si è ammessi all'orale con un punteggio minimo di 12/33.

Esercizio 1.

Si consideri la seguente famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{B} = \{\emptyset, (a,b) \times (n,m) \text{ con } a < b \in \mathbb{Z} \text{ e } n < m \in \mathbb{Z}\}$$

[3] Si mostri che $\mathcal{B}$ è una base per una topologia su $\mathbb{R}^2$. Sia $\mathcal{U}$ tale topologia e si indichi con $X = (\mathbb{R}^2, \mathcal{U})$.

[4] Si determini la chiusura e l'interno di

$$W_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ (2,\pi) \times (\frac{3}{5}, 7)\} \text{ e } \mathrm{W}_2 = \{(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2 | \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 = 1\}$$

in X.

[3] Si mostri che X non è compatto e non è di Hausdorff

[4] Sia $\mathbb{R}^2$ dotato della topologia usuale e sia $f : \mathbb{R}^2 \to X$ definita da

$$f(x,y) = (x^{723} - y^3 + \sin(xy), \cos x - y^{12435})$$

si mostri che f è continua.

[3] Si mostri che X è connesso.

Esercizio 2.

Si consideri lo spazio topologico

$$Y = I \times S^2$$

dotato della topologia usuale.

[4] Si determini il gruppo fondamentale di Y e di $Y \setminus \{(0,N)\}$, con $N = (0,0,1) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ il polo nord.

[4] Si mostri che $Y \setminus \{(0,N),(0,S)\} \not\approx Y \setminus \{(0,N),(1,S)\}$, con $S = (0,0,-1) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ il polo sud.

[4] Si dica se Y è omeomorfo a $S^1 \times I \times I$ o a $\mathbb{R}^2 \times I$

[4] Si mostri che ogni rivestimento $\pi : W \to Y$ è un omeomorfismo.