Geometria 2
Esame scritto del 23/06/2015

Le risposte non giustificate o illeggibili non saranno corrette. A fianco di ogni domanda è indicato il punteggio. Non è necessario descrivere le equazioni di retrazioni od omotopie nel caso siano evidenti. Si è ammessi all'orale con un punteggio minimo di 12/33.

Esercizio 1.
[4] Si consideri $\mathbb{R}^2$ e la seguente collezione di sottoinsiemi

$$B_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x - n)^2 + (y - n)^2 < 1/2\},$$

con n intero. Siano $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ e $\mathcal{B}^+ = \mathcal{B} \cup \mathbb{R}^2$ si mostri che :

- $\mathcal{B}$ non è una base per una topologia su $\mathbb{R}^2$,
- $\mathcal{B}^+$ è una base per una topologia su $\mathbb{R}^2$.

Si indichi con $\mathcal{U}^+$ la topologia associata a $\mathcal{B}^+$ e sia $X = (\mathbb{R}^2, \mathcal{U}^+)$.
[2] Si mostri che X è compatto.
Siano $Y_1 = \{(x, y) \in X | x^2 + y^2 < 10\}$ e $Y_2 = \{(x, y) \in X | x^2 + y^2 < 1/2\}$.
[3] Si determinino la chiusura e l'interno di Y_1 e Y_2.
[3] Si mostri che $Y_1 \not\approx Y_2$.
[5] Si esibiscano sottospazi $W_i \subset X$ tale che:

- W_1 sia infinito e di Hausdorff
- W_2 sia unione disgiunta di due sottoinsiemi non vuoti e sia connesso.

Esercizio 2. Si consideri $S^1 \times S^3$ dotato della topologia usuale, con $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ e $S^3 \subset \mathbb{R}^4$.
[5] Siano

$$A := \{(0, 1)\} \times S^3, \ B := S^1 \times \{(0, 0, 0, 1)\}$$

si definisca $X = (S^1 \times S^3) \setminus (A \cup B)$. Si determini il gruppo fondamentale di X.
[7] Si mostri che:

- X è una 4-varietà topologica,
- $X \not\approx S^4$
- non esiste un rivestimento $p : S^4 \to X$

[4] Si mostri che esiste un rivestimento $p : X \to S^1 \times \mathbb{R}^3$.