Geometria 2
Topologia (ordinamento 270)
Esame scritto del 14/07/2015

Le risposte non giustificate o illeggibili non saranno corrette. A fianco di ogni domanda è indicato il punteggio. Non è necessario descrivere le equazioni di retrazioni od omotopie nel caso siano evidenti. Si è ammessi all'orale con un punteggio minimo di 12/30.

Esercizio 1.
[4] Si consideri $\mathbb{R}^2$ e la seguente collezione di sottoinsiemi

$$B_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x - n)^2 + (y + n)^2 < 1/2\},$$

con n intero. Siano $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ e $\mathcal{B}^+ = \mathcal{B} \cup \{\mathbb{R}^2\}$ si mostri che :

- $\mathcal{B}$ non è una base per una topologia su $\mathbb{R}^2$,
- $\mathcal{B}^+$ è una base per una topologia su $\mathbb{R}^2$.

Si indichi con $\mathcal{U}^+$ la topologia associata a $\mathcal{B}^+$ e sia $X = (\mathbb{R}^2, \mathcal{U}^+)$.
[2] Si mostri che X è compatto.
Siano

$$Y_1 = \{(x, y) \in X | x^2 + y^2 < 30\} \text{ e } Y_2 = \{(x, y) \in X | x^2 + y^2 < 1/5\}.$$

[3] Si determinino la chiusura e l'interno di Y_1 e Y_2.
[3] Si mostri che $Y_1 \not\approx Y_2$.
[3] Si esibisca un sottospazio $W_2 \subset X$ tale che, W_2 sia unione disgiunta di due sottoinsiemi non vuoti e sia connesso.

Esercizio 2. Si consideri $S^3 = \{x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^4$ dotato della topologia usuale.
[6] Siano $P_1 = (1, 0, 0, 0), P_2 = (0, 0, 0, 1), P_3 = (0, 0, 0, -1) \in S^3$ tre punti distinti e $M = S^3 \cap \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x = y = 0, z \geq 0\}$ si definiscano $X = S^3 \setminus \{P_1, P_2, P_3\}$ e $Y = S^3 \setminus \{M\}$. Si determini il gruppo fondamentale di X e Y.
[6] Si mostri che:

- $Y \not\approx S^3$
- $X \times Y \not\approx \mathbb{R}^3$
- $Y \setminus P_1 \simeq S^2$

[3] Sia $B_n = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + (z - n)^2 = 1\}$ e $Z = \cup_{i\in\mathbb{Z}} B_{2i}$. Si mostri che Z è semplicemente connesso.