Geometria 2
Topologia (ordinamento 270)
Esame scritto del 07/09/2016

Le risposte non giustificate o illeggibili non saranno corrette. A fianco di ogni domanda è indicato il punteggio. Non è necessario descrivere le equazioni di retrazioni od omotopie nel caso siano evidenti. Si è ammessi all'orale con un punteggio minimo di 12/30.

Esercizio 1.
[2] Si consideri $\mathbb{R}^2$ e la seguente collezione di sottoinsiemi

$$B_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | xy = r\},$$

con $r \in \mathbb{R}$. Sia $\mathcal{B} = \{B_r\}_{r\in\mathbb{R}}$ si mostri che $\mathcal{B}$ è una base per una topologia su $\mathbb{R}^2$. Si indichi con $\mathcal{U}$ la topologia associata a $\mathcal{B}$ e sia $X = (\mathbb{R}^2, \mathcal{U})$.

Siano

$$Y_1 = \{(x,y) \in X | xy = 1\} \text{ e } Y_2 = \{(x,y) \in X | x^2 + y^2 < 1\}.$$

[3] Si determinino la chiusura e l'interno di Y_1 e Y_2.
[3] Si mostri che $Y_1 \not\approx Y_2$.
[3] Si dia un esempio di un sottospazio $W \subset X$ infinito e di Hausdorff.
[4] Si mostri che non esistono sottospazi connessi e di Hausdorff diversi dal punto.

Esercizio 2. Sia $X = \mathbb{D}^2 \times I$, con

$$\mathbb{D}^2 := \{x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2, I := [0,1] \subset \mathbb{R}$$

dotati della topologia usuale.
[5] Si determini il gruppo fondamentale di $Y_1 := X \setminus \{((0,0),1/2)\}$, $Y_2 := X \setminus \{((0,0),1/3),((0,0),2/3)\}$ e $Y_3 := X \setminus \{(0,0)\} \times I$.
[5] Si mostri che:

- gli Y_i non sono compatti
- $Y_3 \not\approx S^1 \times \mathbb{R}$
- non esiste un rivestimento $p : Y_3 \to Y_2$

[5] Si mostri che $Y_1 \not\approx Y_2$.