

Geometria 2

Esame scritto del 14/06/2016

Le risposte non giustificate o illeggibili non saranno corrette. A fianco di ogni domanda è indicato il punteggio. Non è necessario descrivere le equazioni di retrazioni od omotopie nel caso siano evidenti. Si è ammessi all'orale con un punteggio minimo di 12/33.

Esercizio 1.

[4] Si consideri \mathbb{R}^2 e la seguente collezione di sottoinsiemi

$$C_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - n)^2 + (y - n)^2 = 1/4\},$$

con n intero. Siano $\mathcal{C} = \{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ e $\mathcal{C}^+ = \mathcal{C} \cup \mathbb{R}^2$ si mostri che :

- \mathcal{C} non è una base per una topologia su \mathbb{R}^2 ,
- \mathcal{C}^+ è una base per una topologia su \mathbb{R}^2 .

Si indichi con \mathcal{U}^+ la topologia associata a \mathcal{C}^+ e sia $X = (\mathbb{R}^2, \mathcal{U}^+)$.

[2] Si mostri che X è compatto.

Siano $Y_1 = \{(x, y) \in X \mid x + y = 4\}$ e $Y_2 = \{(x, y) \in X \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

[3] Si determinino la chiusura e l'interno di Y_1 e Y_2 .

[3] Si mostri che $Y_1 \not\approx Y_2$.

[5] Si esibiscano sottospazi $W_i \subset X$ tale che:

- W_1 sia infinito e di Hausdorff
- W_2 sia unione disgiunta di due sottoinsiemi non vuoti e sia connesso.

Esercizio 2. Si consideri $S^1 \times S^2$ dotato della topologia usuale, con $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ e $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

[5] Siano

$$A := \{(0, 1)\} \times S^2, \quad B := S^1 \times \{(0, 0, 1)\}$$

si definisca $X = (S^1 \times S^2) \setminus (A \cup B)$. Si determini il gruppo fondamentale di X .

[7] Si mostri che:

- X è una 3-varietà topologica,
- $X \not\approx S^3$
- non esiste un rivestimento $p : S^n \rightarrow X$, per ogni n .

[4] Si mostri che esiste un rivestimento $p : X \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}^2$.