Topologia (ordinamento 270)
Geometria 3 (ordinamento 509)
Esame scritto del 17/09/2013

Le risposte non giustificate o illeggibili non saranno corrette. A fianco di ogni domanda è indicato il punteggio. Non è necessario descrivere le equazioni di retrazioni od omotopie nel caso siano evidenti. Si è ammessi all'orale con un punteggio minimo di 12/30.

Esercizio 1.
[2] Si considerino $\mathbb{R}^3$ e i sottoinsiemi

$$C_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = r^2\}.$$

Si consideri la seguente collezione di sottoinsiemi

$$\mathcal{B} := \{C_r\}_{\mathbb{R}\geq 0}.$$

Si mostri che $\mathcal{B}$ è una base per una topologia su $\mathbb{R}^3$.

Sia $\mathcal{U}_B$ la topologia associata e $X = (\mathbb{R}^3, \mathcal{U}_B)$

[4] Si mostri che X non è compatto e si determini la chiusura e l'interno di $W_1 = \{((x, y, z) \in X | z \geq 0\}$ e $W_2 = \{((x, y, z) \in X | x = 5\}$

[4] Si mostri che X non è connesso e non è di Hausdorff. Si dia un esempio di un sottospazio infinito $Y \subset X$ di Hasudorff.

[5] Si mostri, con un esempio, che esistono:

- sottospazi topologici $Z \subset X$ compatti per la topologia $\mathcal{U}_B$ e non compatti per la topologia usuale di $\mathbb{R}^3$,
- sottospazi topologici $W \subset X$ connessi per la topologia $\mathcal{U}_B$ e non connessi per la topologia usuale di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2. Si consideri $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ dotato della topologia usuale

[4] Sia $p_1 = [1, 0, 0, 0] \in \mathbb{P}^3$ e si definisca $X = \mathbb{P}^3 \setminus p_1$. Si determini il gruppo fondamentale di X.

[6] Si mostri che:

- X è una varietà topologica non compatta,
- $X \not\approx \mathbb{P}^2$

[5] Sia $\mathbb{R} \times X \to X$ l'azione di moltiplicazione per uno scalare

$$(\lambda, [x_0, x_1, x_2, x_3]) \mapsto [\lambda x_0, x_1, x_2, x_3]$$

e $g : X \to W$ il quoziente associato. Si dica se W è una varietà topologica.