Topologia (ordinamento 270)
Geometria 3 (ordinamento 509)
Esame scritto del 20/02/2013

Le risposte non giustificate o illeggibili non saranno corrette. A fianco di ogni domanda è indicato il punteggio. Non è necessario descrivere le equazioni di retrazioni od omotopie nel caso siano evidenti. Si è ammessi all'orale con un punteggio minimo di 12/30.

Esercizio 1.
[2] Si considerino $\mathbb{R}^3$ e i sottoinsiemi

$$C_{\lambda,\mu} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \lambda x + \mu y = 0\}.$$

Si consideri la seguente collezione di sottoinsiemi

$$\mathcal{B} := \{C_{\lambda,\mu}\}_{\lambda,\mu\in\mathbb{R}} \cup \{(0, 0, z)\}_{z\in\mathbb{R}}.$$

Si mostri che $\mathcal{B}$ è una base per una topologia su $\mathbb{R}^3$.
Sia $\mathcal{U}_B$ la topologia associata e $X = (\mathbb{R}^3, \mathcal{U}_B)$
[4] Si mostri che X non è compatto e si determini la chiusura e l'interno di $W_1 = \{((x, y, z) \in X | x \geq 0\}$ e $W_2 = \{((x, y, z) \in X | z = 0\}$
[4] Si mostri che X è connesso e non è di Hausdorff. Si dia un esempio di un sottospazio infinito $Y \subset X$ di Hasudorff.
[5] Si mostri, con un esempio, che esistono:

- sottospazi topologici $Z \subset X$ compatti per la topologia $\mathcal{U}_B$ e non compatti per la topologia usuale di $\mathbb{R}^3$,
- sottospazi topologici $W \subset X$ connessi per la topologia $\mathcal{U}_B$ e non connessi per la topologia usuale di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2. Si consideri $\mathbb{R}^3$ dotato della topologia usuale
[4] Siano

$M^+ := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x > 0, y = 0\}$, $M^- := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x < 0, y = 0\}$

si definisca $X = \mathbb{R}^3 \setminus (M^+ \cup M^-)$. Si determini il gruppo fondamentale di X.
[6] Si mostri che:

- X non è una varietà topologica,
- $X \not\approx \mathbb{R}^3 \vee \mathbb{R}^3$

[5] Sia $\mathbb{R} \times X \setminus \{(0, 0, 0)\} \to X \setminus \{(0, 0, 0)\}$ l'usuale azione di moltiplicazione per uno scalare

$$(\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

e $g : X \setminus \{(0, 0, 0)\} \to W$ il quoziente associato. Si mostri che $W \simeq S^1$.