# Topologia (ordinamento 270)
# Geometria 3 (ordinamento 509)
# Esame scritto del 15/01/2014

Le risposte non giustificate o illeggibili non saranno corrette. A fianco di ogni domanda è indicato il punteggio. Non è necessario descrivere le equazioni di retrazioni od omotopie nel caso siano evidenti. Si è ammessi all'orale con un punteggio minimo di 12/33.

*Esercizio* 1.
[6] Si consideri il piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ e i suoi sottoinsiemi

$$C_n = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2 | x_1^2 + (x_2 - nx_0)^2 - n^2x_0^2 = 0\},$$

con $n$ intero positivo. Sia $U_0 = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} | x_0 \neq 0\} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ si mostri che :

- $C_n \subset U_0$,
- $C_n$ è compatto,
- l'interno di $C_n$ è vuoto.

[3] Si mostri che $C_n \approx S^1$.
[3] Sia $W = \cup_{k\in\mathbb{N}} C_k$ si mostri che $W$ è connesso (è possibile usare il risultato del punto precedente anche se non è stato dimostrato).
[5] Sia $Y = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} | x_0 = 0\}$ si mostri che $Y \approx C_n$.

*Esercizio* 2. Si consideri $S^1 \times S^1$ dotato della topologia usuale
[5] Siano

$$A := \{1\} \times S^1, \ B := S^1 \times \{1\}$$

si definisca $X = (S^1 \times S^1) \setminus (A \cup B)$. Si determini il gruppo fondamentale di $X$.
[7] Si mostri che:

- $X$ è una varietà topologica,
- $X \not\approx S^2 \vee S^2$
- non esiste un rivestimento $p : S^2 \to X$

[4] Si mostri che esiste un rivestimento $p : X \to S^1 \times S^1$.