Topologia (ordinamento 270)
Geometria 3 (ordinamento 509)
Esame scritto del 24/01/2013

Le risposte non giustificate o illeggibili non saranno corrette. A fianco di ogni domanda è indicato il punteggio. Non è necessario descrivere le equazioni di retrazioni od omotopie nel caso siano evidenti. Si è ammessi all'orale con un punteggio minimo di 12/33.

Esercizio 1.
[3] Si considerino la sfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e dei suoi cerchi massimi $C_{\lambda,\mu} = \{(x, y, z) \in S^2 | \lambda x + \mu y = 0\}$. Si consideri la seguente collezione di sottoinsiemi

$$\mathcal{B} := \{C_{\lambda,\mu}\}_{\lambda,\mu\in\mathbb{R}} \cup \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}.$$

Si mostri che $\mathcal{B}$ è una base per una topologia su S^2.

Sia $\mathcal{U}_B$ la topologia associata e $X = (S^2, \mathcal{U}_B)$
[4] Si mostri che X non è compatto e si determini la chiusura e l'interno di $W_1 = \{((x, y, z) \in X | x \geq 0\}$ e $W_2 = \{((x, y, z) \in X | y = 0\}$
[4] Si mostri che X è connesso e non è di Hausdorff. Si dia un esempio di un sottospazio infinito $Y \subset X$ di Hasudorff.
[6] Si mostri, con un esempio, che esistono:

- sottospazi topologici $Z \subset X$ compatti per la topologia $\mathcal{U}_B$ e non compatti per la topologia usuale di S^2,
- sottospazi topologici $W \subset X$ connessi per la topologia $\mathcal{U}_B$ e non connessi per la topologia usuale di S^2.

Esercizio 2. Si consideri $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ dotato della topologia usuale
[4] Siano

$M^+ := \{(x, y, z) \in S^2 | x > 0, y = 0\}$, $M^- := \{(x, y, z) \in S^2 | x < 0, y = 0\}$

si definisca $X = S^2 \setminus (M^+ \cup M^-)$. Si determini il gruppo fondamentale di X.
[7] Si mostri che:

- X non è una varietà topologica,
- $X \not\approx S^1 \vee S^2$

[5] Sia $\mathbb{Z}_2 \times X \to X$ l'usuale azione antipodale e $g : X \to W$ il quoziente associato. Si mostri che $W \simeq S^1$.