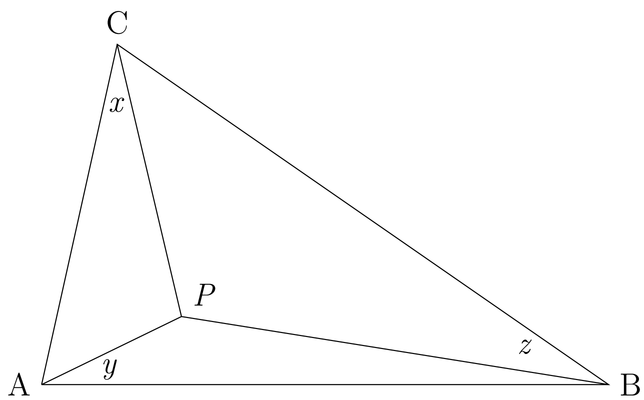
I punti di Brocard

Enrico Lucchin

November 20, 2018

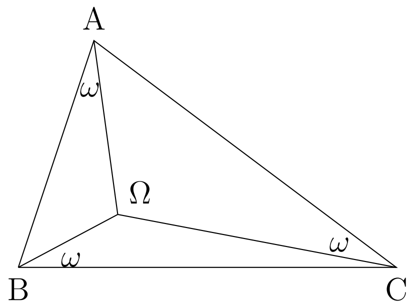
1 Punti di Brocard

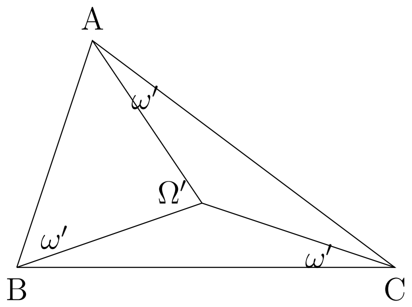


Un punto P all'interno di un triangolo ABC, se collegato ad ognuno dei suoi vertici forma una coppia di angoli con ciascun lato del triangolo. Se consideriamo i 3 angoli x, y e z come in figura nella maggior parte dei casi i tre angoli non sono congruenti, intuitivamente sarebbe semplice imporre la congruenza di due di questi, ma trovare il punto Ω che verifichi anche la terza condizione di congruenza è invece più complicato.
Ci chiediamo quindi se esiste e, in caso affermativo come trovarlo, un punto P all'interno di un triangolo ABC tale che gli angoli considerati sopra siano tra loro tutti congruenti : la risposta alla prima domanda è affermativa, indicheremo tale punto con Ω e tra poco vedremo il procedimento per trovarlo.

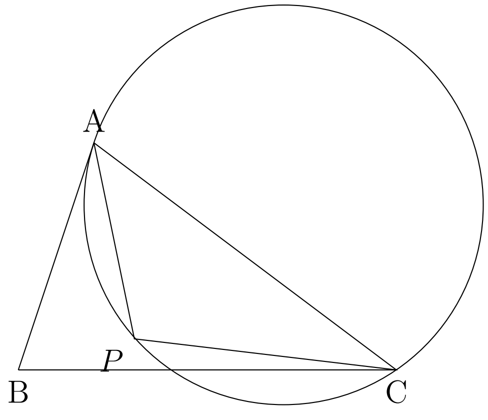
Esiste inoltre un altro punto Ω' con le stesse proprietà in riferimento alla terna di angoli dalla parte opposta rispetto ai segmenti che uniscono Ω' ad A, B e C. Questi due punti sono chiamati **punti di Brocard** e gli angoli congruenti che essi formano con ciascun lato sono chiamati **angoli di**

Brocard, in onore di Henri Brocard, generale dell'esercito francese del XIX secolo, nonostante l'esistenza di tali punti fosse già nota 60 anni prima che lui si dedicasse allo studio dell'argomento.

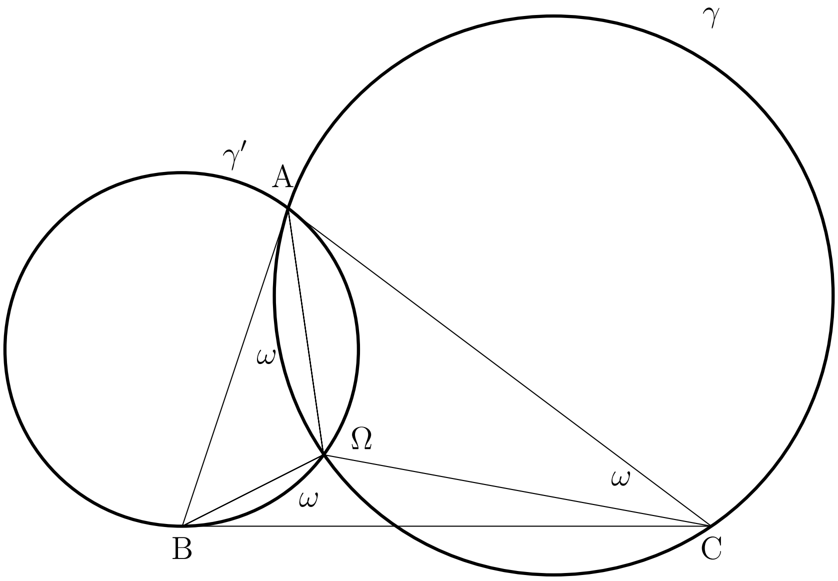




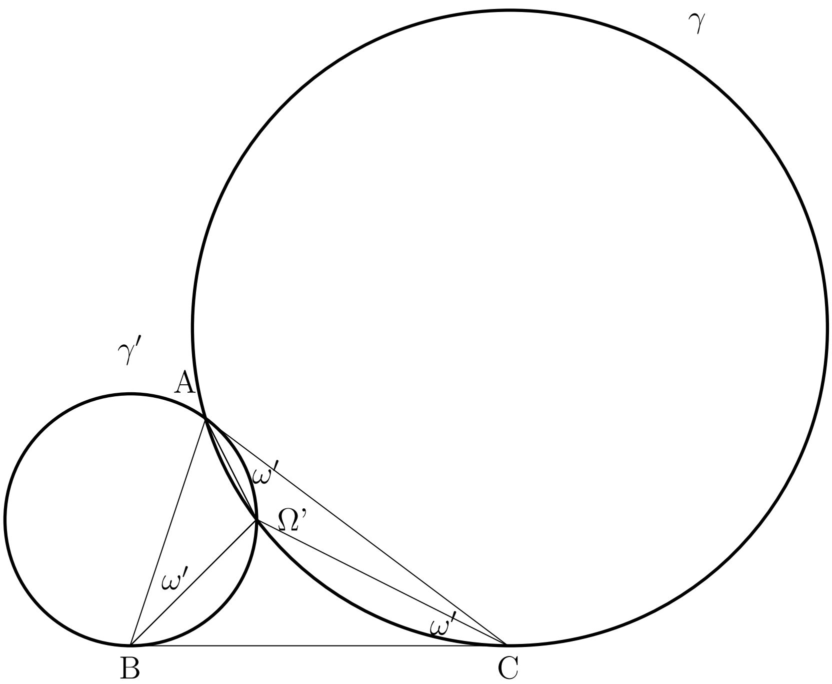
Vediamo ora il procedimento di costruzione di Ω e Ω' che ne verifica anche esistenza e unicità.
Come prima cosa affinché gli angoli relativi ai vertici A e C risultino congruenti la circonferenza γ passante per A, Ω e C deve essere tangente a AB in A perché in questo modo, preso un qualsiasi punto sulla circonferenza e interno al triangolo, chiamiamolo P, gli angoli $P\hat{A}B$ e $A\hat{C}P$ sottendono lo stesso arco AP e sono quindi congruenti.



Per lo stesso ragionamento affinché gli angoli relativi ad A e a B siano anch'essi congruenti, la circonferenza γ' passante per A, B e Ω deve essere tangente a BC in B.
γ e γ', essendo due circonferenze non tangenti si intersecano in due punti, uno dei due è A che ovviamente non può essere un punto di Brocard, l'altro punto per costruzione è proprio Ω.



In modo del tutto simile troviamo Ω' come l'intersezione della circonferenza passante per A e C tangente a BC in C e la circonferenza attraverso A e B tangente ad AC in A.



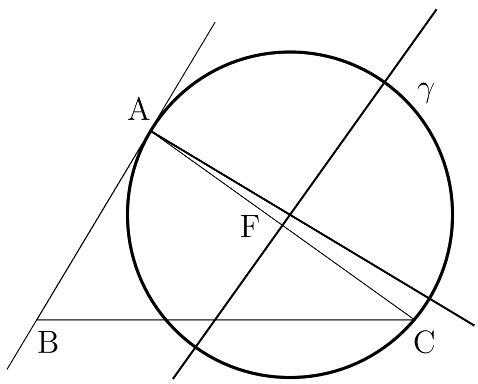
In seguito chiameremo Ω il *primo* punto di Brocard e Ω' il *secondo* punto di Brocard.

Mostriamo ora un altro procedimento per la costruzione del punto di Brocard Ω.

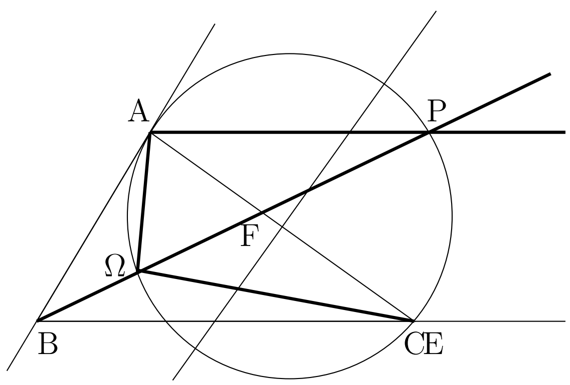
La prima parte di quest'ultimo è analoga a alla prima parte del procedimento illustrato sopra,vediamo nel dettaglio infatti come tracciare la circonferenza passante per A, Ω e C e tangente ad AB in A.

Vediamo AC come una corda della circonferenza e tracciamone l'asse.

Affinché la circonferenza γ sia tangente ad AB in A tracciamo la perpendicolare al lato AB passante per A, il centro della circonferenza che cerchiamo sarà quindi dato dall'intersezione tra l'asse del segmento AC e la perpendicolare al lato AB passante per A.



Tracciamo da A la parallela al lato BC e su tale parallela troviamo il punto P dato dall'intersezione di quest'ultima parallela con la circonferenza γ. Il punto Ω che cerchiamo è dato dall'intersezione tra il segmento BP e la circonferenza γ.



Verifchiamo che Ω sia effettivamente un punto di Brocard.

L'angolo $P\hat{B}E$ è congruente all'angolo $B\hat{P}A$ perché alterni interni.
L'angolo $B\hat{P}A$ è congruente all'angolo $B\hat{A}\Omega$ perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $A\Omega$.
L'angolo $B\hat{P}A$ è congruente all'angolo $A\hat{C}\Omega$ perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $A\Omega$.
Quindi i tre angoli che Ω forma con i lati del triangolo sono congruenti,che è allora proprio un punto di Brocard.

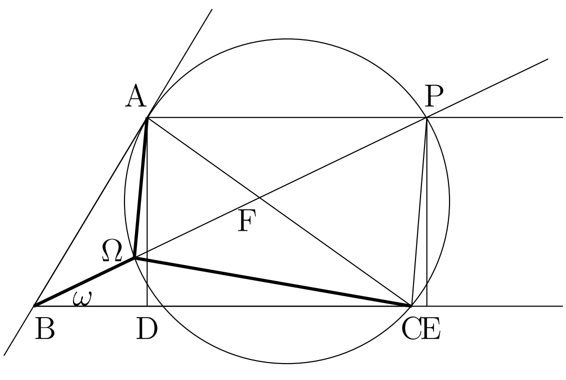
Sfruttando questa costruzione vediamo un modo per trovare una relazione tra la misura degli angoli del triangolo e l'angolo di Brocard.
Tracciamo ora da A e da P le perpendicolari a BC e al suo prolungamento che intersecano quest'ultimo rispettivamente in D e in E, abbiamo quindi che $ADEP$ è un rettangolo e che quindi $AD \cong PE$
Consideriamo l'angolo $P\hat{B}E$, che è proprio ω, e calcoliamone la cotangente. Essendo il triangolo $B\hat{E}P$ rettangolo in E, possiamo calcolare la cotangente come il rapporto tra il cateto adiacente e quello opposto ad ω, quindi

$$cotg(\omega) = \frac{BE}{PE} = \frac{BD + DC + CE}{PE} = \frac{BD}{AD} + \frac{DC}{AD} + \frac{CE}{PE} =$$

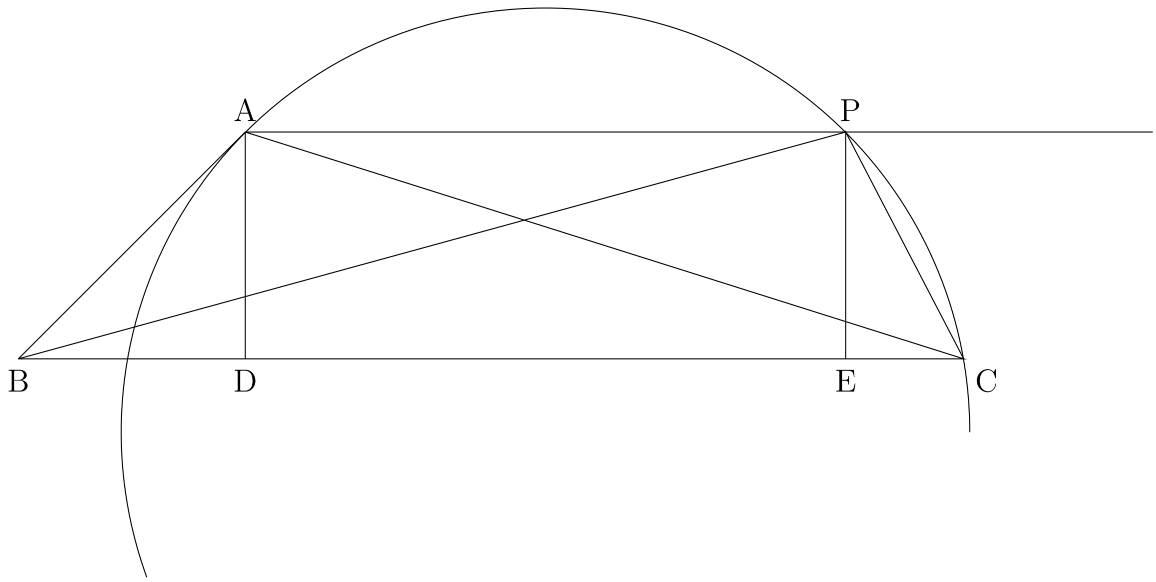
$$cotg(\omega) = cotg(\hat{B}) + cotg(\hat{C}) + cotg(P\hat{C}E)$$

Abbiamo inoltre che $P\hat{C}E \cong C\hat{P}A$ perché alterni interni di rette parallele e che $C\hat{P}A \cong \hat{A}$ perché sottendono lo stesso arco, quindi

$$cotg(\omega) = cotg(\hat{A}) + cotg(\hat{B}) + cotg(\hat{C})$$



Se il triangolo ABC è ottusangolo il punto E non cadrà alla destra del punto C, non rendendo più valido il nostro ragionamento precedente, dimostriamo ora che comunque la relazione $cotg(\omega) = cotg(A) + cotg(B) + cotg(C)$ continua a valere.



Ragionamento come in precedenza, usando le proprietà della cotangente e il fatto che $P\hat{C}E$ e $C\hat{P}A$ sono coniugati interni di rette parallele e quindi supplementari

$$cotg(\omega) = \frac{BE}{PE} = \frac{BD + DC - EC}{PE} = \frac{BD}{AD} + \frac{DC}{AD} - \frac{CE}{PE} =$$

$$= cotg(\hat{B}) + cotg(\hat{C}) - cotg(P\hat{C}E) = cotg(\hat{B}) + cotg(\hat{C}) - cotg(\pi - \hat{A}) =$$

$$cotg(\hat{B}) + cotg(\hat{C}) + cotg(\hat{A})$$

Ci proponiamo ora di trovare la massima misura che un angolo di Brocard ω può avere.
Siano A, B e C gli angoli interni di un triangolo, conseguentemente

$$A + B + C = \pi$$

,

$$S = cotg(A) + cotg(B) + cotg(C) =$$

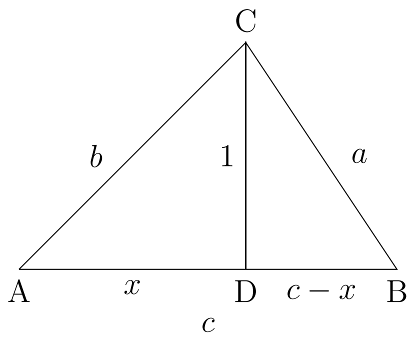
$$= cotg(A) + cotg(B) + cotg(\pi - (A + B)) =$$

$$= cotg(A) + cotg(B) - cotg(A + B) =$$

$$= cotg(A) + cotg(B) - \frac{cotg(A) \cdot cotg(B) - 1}{cotg(A) + cot(B)}$$

Ora, senza perdita di generalità, possiamo ordinare gli angoli del triangolo ABC in modo tale che sia $A \leq B \leq C$.
In questo caso l'altezza CD, tracciata dal vertice in C con l'angolo maggiore

interseca il lato opposto AB in un punto che chiamiamo D e fissato CD come unità di riferimento, avremo $CD = 1$



Posto $AD = x$ e quindi $DB = c - x$, usando il fatto che ADC e CDB sono rettangoli in D abbiamo

$$cotg(A) = x, \quad cotg(B) = c - x.$$

Allora

$$cotg(A) + cotg(B) = c$$

Sostituendo in quanto trovato prima otteniamo

$$S = c - \frac{x \cdot (c - x) - 1}{c}$$

e equivalentemente

$$cS = c^2 - xc + x^2 + 1,$$

che, arrangiato in modo opportuno, fornisce

$$cS = (x - \frac{c}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}c - 1)^2 + \sqrt{3}c \geq \sqrt{3}c$$

che implica

$$S \geq \sqrt{3}$$

che ci dice che la somma delle cotangenti degli angoli interni ad un triangolo è maggiore o uguale di $\sqrt{3}$, con uguaglianza verificata se e solo se $(x - \frac{c}{2})^2$ e $(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1)$" sono entrambi nulli, ossia se e solo se

$$x = \frac{c}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

cioè quando ABC è un triangolo equilatero.

Ricapitolando sappiamo ora che S, dato dalla somma delle cotangenti degli angoli interni di un triangolo qualsiasi, è maggiore o uguale a $\sqrt{3}$ e che l'uguaglianza vale se e solo se il triangolo è equilatero.
Sappiamo inoltre che $S = cotg(\omega)$, quindi

$$\cot \omega \geq \sqrt{3} = cotg(\frac{\pi}{6})$$

Poiché la cotangente è una funzione decrescente nell'intervallo $(0, \pi)$ concludiamo che

$$\omega \leq \frac{\pi}{6}$$

Calcoliamo ora l'area del tiangolo ABC, applicando semplicemente la formula del calcolo dell'area di un triangolo, risulta

$$A = \frac{1}{2} \cdot c = \frac{c}{2}$$

Applicando il teorema di Pitagora ai due triangoli rettangoli ADC e CDB, ricaviamo:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= [(c - x)^2 + 1] + (x^2 + 1) + c^2 = \\ &= 2(c^2 - xc + x^2 + 1) = 2cS \geq 2c\sqrt{3} = 4\sqrt{3}A \end{aligned}$$

detta *disuguaglianza di Weitzenböck*.

Inoltre da $a^2 + b^2 + c^2 = 2cS$ otteniamo

$$cotg(\omega) = S = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4A}$$

2 Angoli di Brocard

In un triangolo ABC, fissato il vertice A definiamo retta isogonale rispetto ad una ceviana uscente da A la sua simmetrica rispetto alla bisettrice dell'angolo in A.
Se due ceviane uscenti da due vertici distinti si incontrano in P le rispettive coniugate isogonali si incontrano in un punto P' chiamato coniugato isogonale di P. Per una proprietà delle ceviane, le rette isogonali di tre ceviane concorrenti sono ancora tre ceviane concorrenti.
Se ci chiediamo quale sia il coniugato isogonale di Ω troviamo immediatamente che è proprio Ω' e questo ci dimostra una anche una proprietà molto

importante, ovvero che gli angoli di Brocard relativi ai due punti di Brocard Ω e Ω sono quindi congruenti tra loro, $\omega \cong \omega'$.

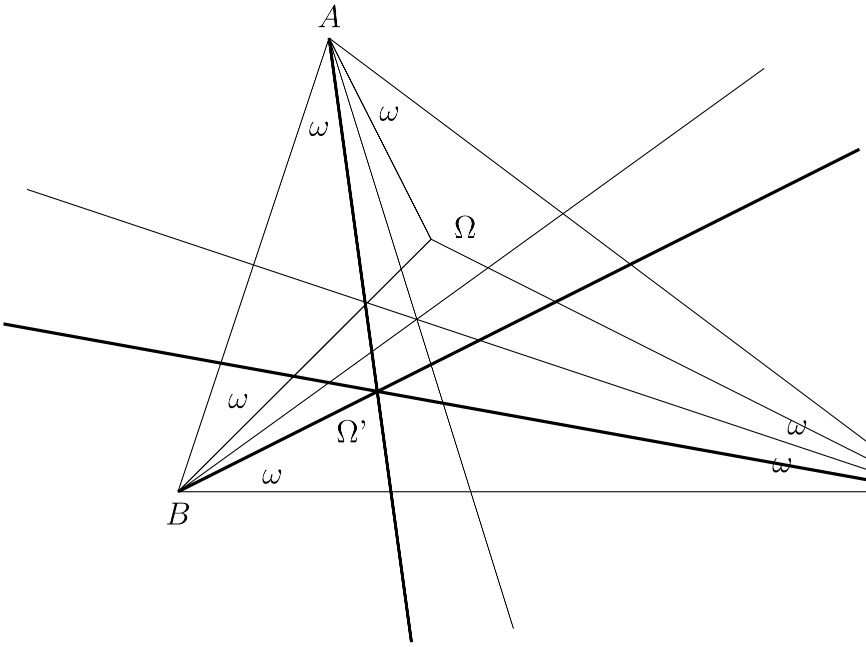
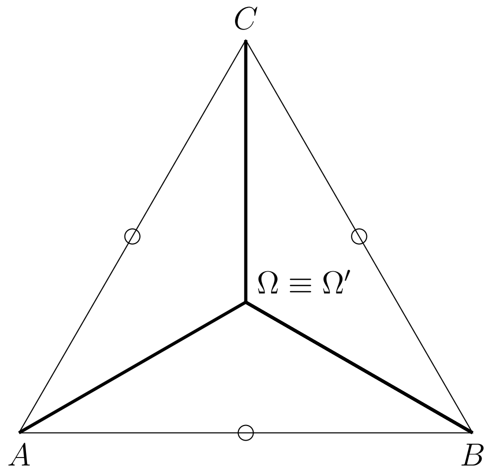


Figure 1: Anche l'angolo $B\hat{C}\Omega \cong A\hat{C}\Omega'$ per la definzione di coniugato isogonale

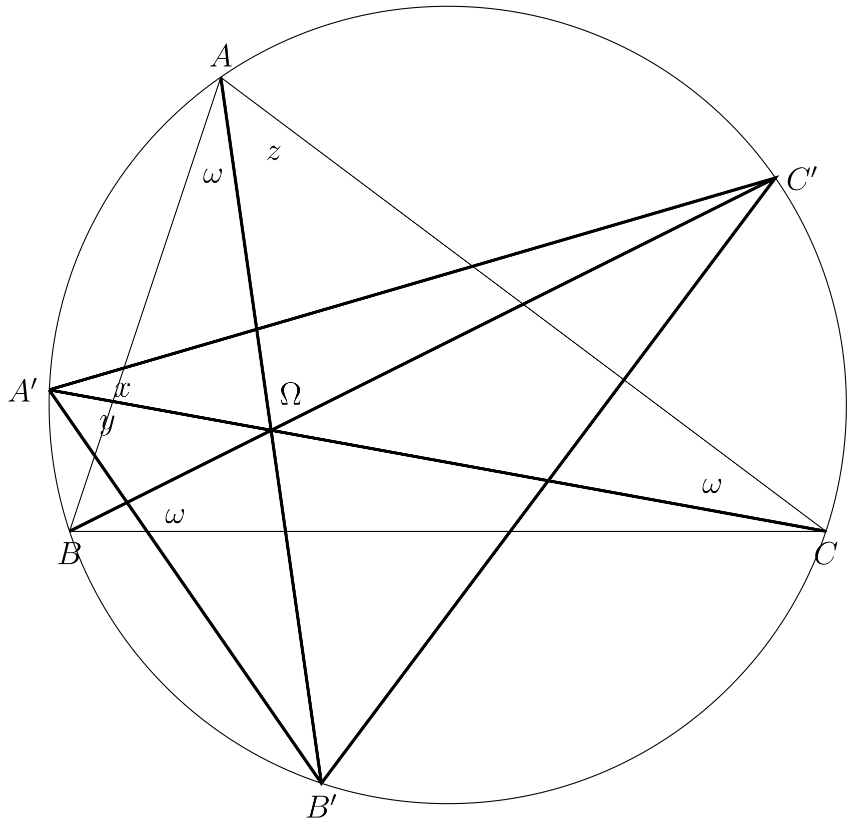
3 Punti di Brocard di un triangolo equilatero



In un triangolo equilatero sappiamo che circocentro, ortocentro, baricentro ed incentro coincidono in un punto Ω. Poiché appunto questo è in particolare l'incentro, i segmenti ΩA, ΩB e ΩC formano una coppia di angoli di $\frac{\pi}{6}$ con ogni lato, conseguentemente Ω è sia il primo che il secondo punto di Brocard del triangolo.

4 Una relazione tra Ω e Ω'

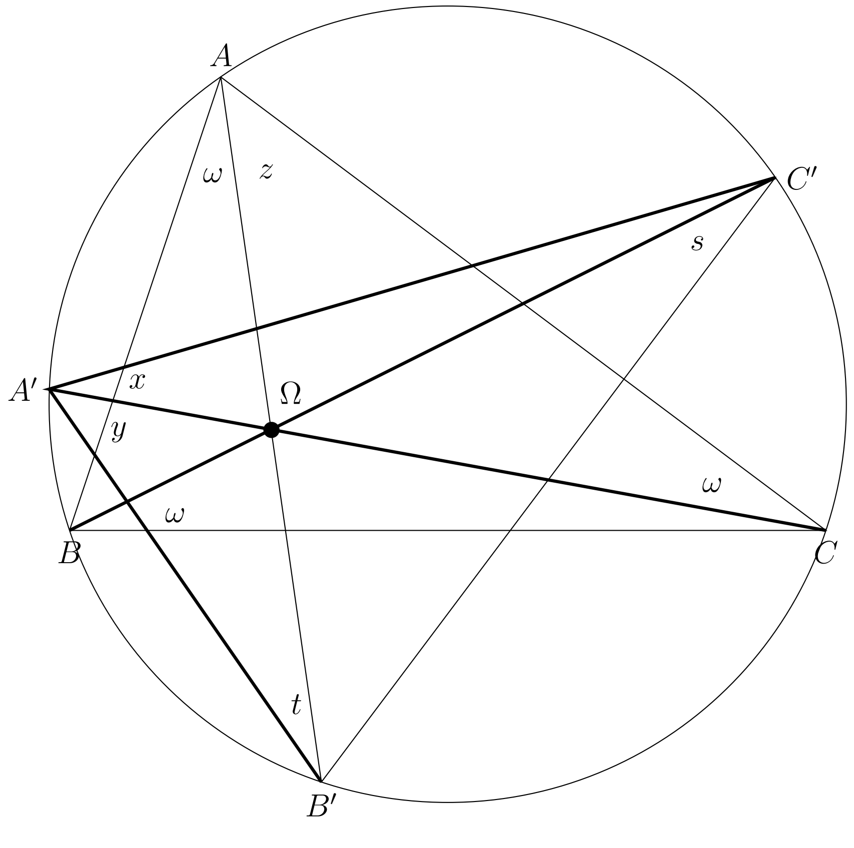
Tracciamo la circonferenza circoscritta al triangolo ABC e sia Ω il primo punto di Brocard di ABC. Prolunghiamo i tre segmenti $A\Omega, B\Omega$ e $C\Omega$ fino ad incontrare tale circonferenza rispettivamente nei punti B', C' e A'.



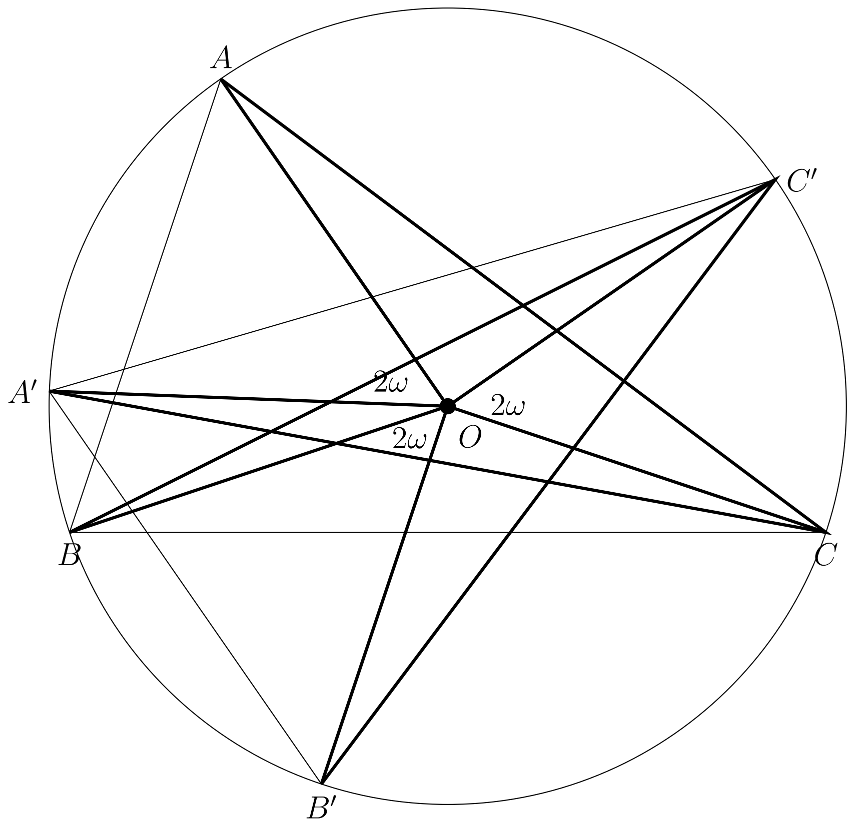
Consideriamo l'angolo x in A', esso è un angolo alla circonferenza e sottende l'arco $C'C$, l'angolo ω in B è anch'esso un angolo alla circonferenza che sottende l'arco $C'C$, quindi $x \cong \omega$.
Consideriamo ora l'angolo y sempre in A', anch'esso è un angolo alla circonferenza che però sottende l'arco $B'C$, proprio come l'angolo z in A, che

chiamiamo z, quindi $y \cong z$.
Allora
$$\hat{A}' \cong x + y \cong \omega + z \cong \hat{A}$$
Angoli alla circonferenza congruenti sottendono corde congruenti, quindi
$$BC \cong B'C'$$

Applicando un ragionamento analogo si dimostra la cognruenza tra gli altri lati, deducendo il fatto che i due triangoli ABC e $A'B'C'$ sono congruenti.



Abbiamo dedotto prima che l'angolo x in A' è congruente ad ω, per lo stesso ragionamento anche l'angolo t in B' e l'angolo s in C' sono congruenti ad ω, quindi ricaviamo che $x \cong t \cong s$.
Pertanto il punto Ω, primo punto di Brocard del triangolo ABC coincide con il secondo punto di Brocard del triangolo $A'B'C'$.



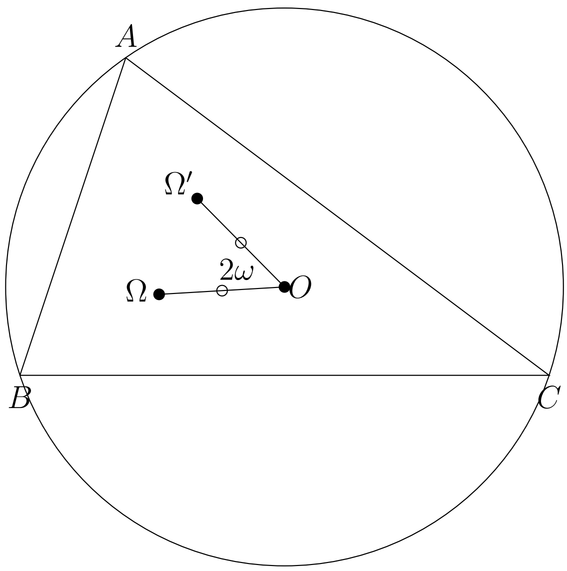
Usando il teorema per cui un angolo al centro è il doppio del corrispondente angolo alla circonferenza abbiamo

$$A\hat{O}A' \cong 2A\hat{C}A' \cong 2\omega$$

Per lo stesso ragionamento $B\hat{O}B' \cong C'\hat{O}C \cong 2\omega$.
Riprendiamo ora la congruenza dei triangoli ABC e $A'B'C'$, se applichiamo una rotazione di centro O e di angolo 2ω nell'opportuna direzione a uno dei due triangoli riusciamo a far coincidere le 3 coppie di vertici. Questa rotazione inoltre porta il secondo punto di Brocard Ω' del triangolo $A'B'C'$ a sovrapporsi al secondo punto di Brocard di ABC. Quindi

$$\Omega\hat{O}\Omega' \cong 2\omega$$

$$\Omega O \cong \Omega' O$$

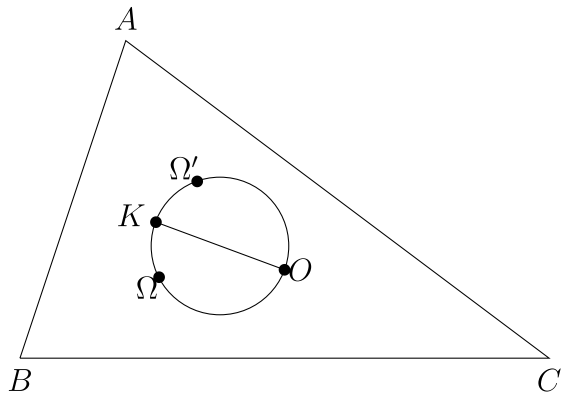


5 Il cerchio di Brocard

Richiamiamo la definizione di simmediana: in un dato triangolo tracciamo la mediana e la bisettrice relative ad un vertice, il segmento simmetrico alla mediana rispetto alla bisettrice è detto *simmediana*, o equivalentemente la simmediana è la retta isogonale della mediana. Le 3 simmediane di un triangolo si incontrano in un unico punto chiamato *punto simmediano*, o *punto di Lemoine*.

Nonostante non sembri esserci alcun legame tra i punti di Brocard di un triangolo Ω e Ω' e il relativo punto simmediano K, si può dimostrare che, chiamato O il centro della circonferenza circoscritta, Ω e Ω' appartengono sempre alla circonferenza di diametro OK.

Chiamiamo quindi la circonferenza di diametro OK e passante per Ω, Ω' *circonferenza di Brocard*.



In triangolo equilatero coincide il punto simmediano K coincide col circocentro O, come Ω e Ω', la circonferenza di Brocard in un triangolo equilatero degenera in un punto.

6 Bibliografia

"Episodes in nineteenth and twentieh century, Euclidean geometry", Ross Honsberger, 1995