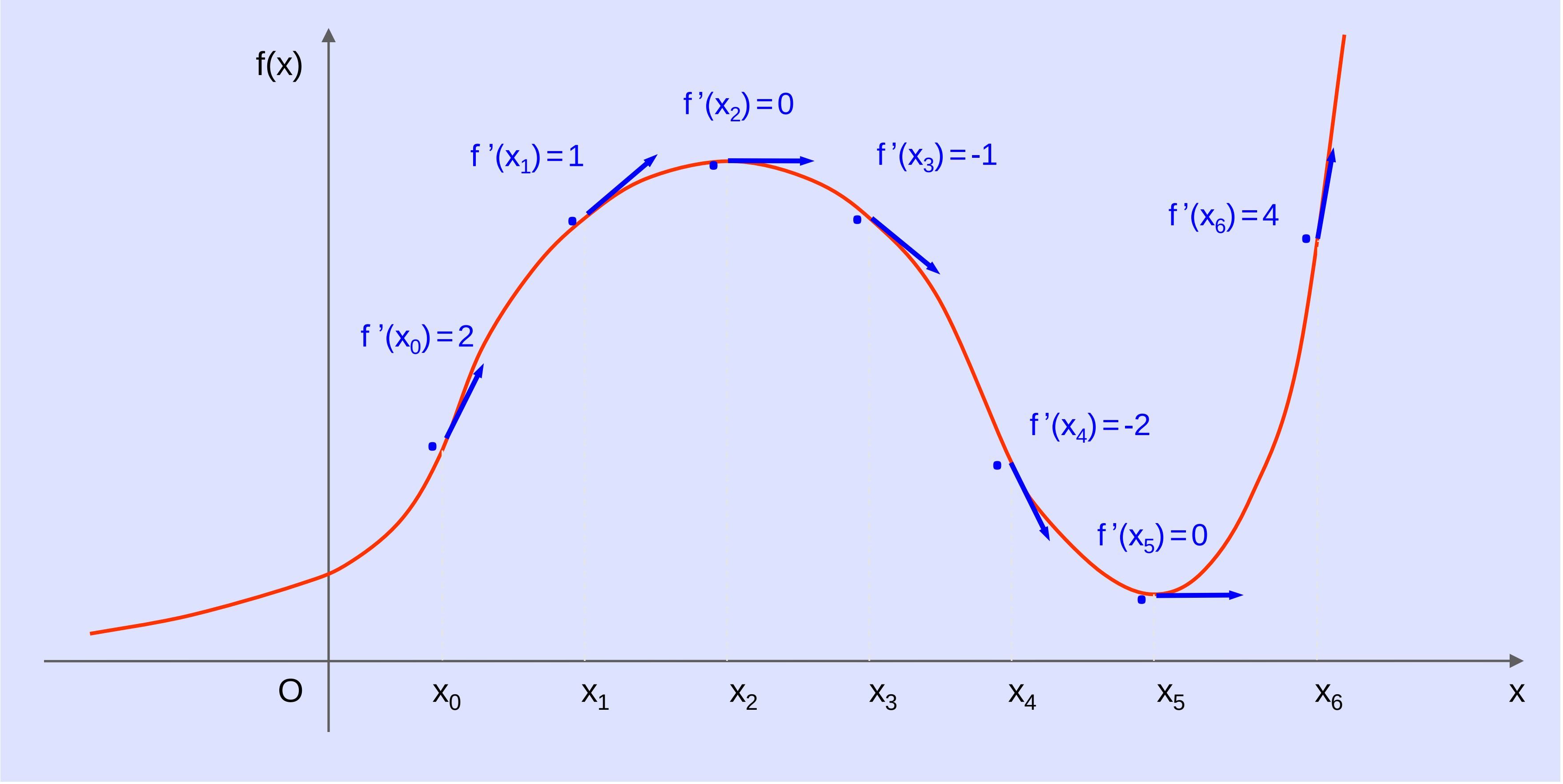
LA DERIVATA
DI UNA FUNZIONE

CONCETTI INTRODUTTIVI

La derivata di una funzione in un punto x_0 , che indicheremo col simbolo $f'(x_0)$, è un numero che misura la variazione della f(x) in un intorno del punto, ovvero la "rapidità" con cui cresce o decresce la f(x) in un intorno di x_0 . La derivata risulta quindi essere legata alla pendenza del grafico della funzione in un intorno di x_0 :

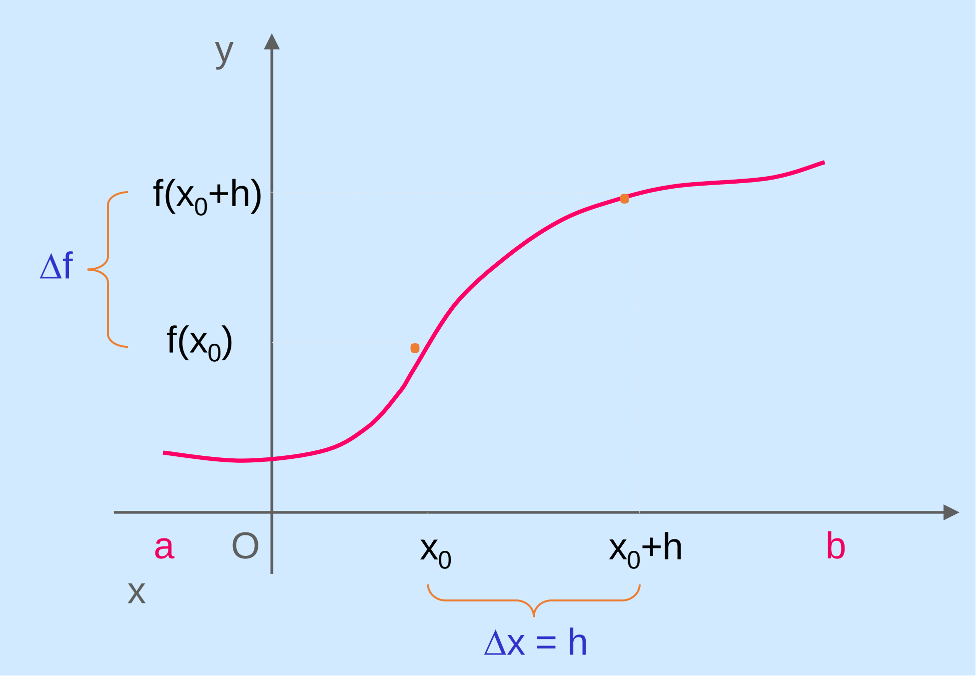


DEFINIZIONE DI DERIVATA DI UNA FUNZIONE IN UN PUNTO

Consideriamo una funzione $f(x)$ definita in un intervallo (a, b)

Sia x_0 un punto interno ad (a, b) e sia $x_0 + h$ il punto ottenuto aggiungendo ad x_0 la quantità h

Indicheremo con i simboli Δf e Δx le seguenti differenze:



$\Delta f = f(x_0+h) - f(x_0)$

$\Delta x = x_0+h - x_0 = h$

e le chiameremo rispettivamente incremento della funzione (Δf) e incremento della variabile ($\Delta x = h$)

Chiameremo infine rapporto incrementale relativo al punto x_0 e all'incremento h il seguente rapporto:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Definizione: funzione derivabile in un punto – derivata in un punto

Una funzione si dice derivabile in un punto x_0 se esiste ed è finito il limite del rapporto incrementale della funzione quando l'incremento h della variabile tende a zero, cioè se esiste ed è finito il seguente limite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Il risultato del precedente limite lo diremo derivata della f(x) nel punto x_0 e lo indicheremo con uno qualunque dei simboli:

$$f'(x_0) \qquad y'(x_0) \qquad \left[Df(x)\right]_{x=x_0} \qquad \frac{df}{dx}_{(x=x_0)}$$

Se il precedente limite non esiste, oppure non dà come risultato un numero finito, allora diremo che la funzione f(x) non è derivabile nel punto x_0

derivata in simboli:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

DERIVATA DESTRA E DERIVATA SINISTRA

Certe volte, pur non esistendo il limite per $h \to 0$ del rapporto incrementale, possono esistere finiti il limite destro e/o il limite sinistro:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \qquad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Allora possiamo dare la seguente:

Definizione:* *derivata destra e derivata sinistra

Diremo derivata destra e derivata sinistra di f(x) in x_0, e le indicheremo con i simboli $f'_+(x_0)$ *e* $f'_-(x_0)$ *i risultati, se esistono e sono finiti, dei seguenti limiti:*

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

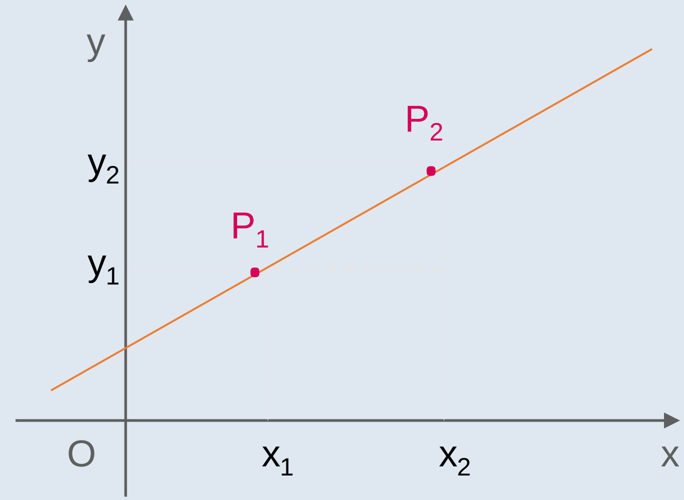
$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Osservazione: *Quando una funzione è derivabile in x_0 nel senso della definizione ordinaria allora esistono anche la derivata destra e quella sinistra e sono uguali fra loro*

SIGNIFICATO GEOMETRICO DELLA DERIVATA

Promemoria:
Il coefficiente angolare di una retta passante per i due punti $P_1(x_1,y_1)$ e $P_2(x_2,y_2)$ è :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



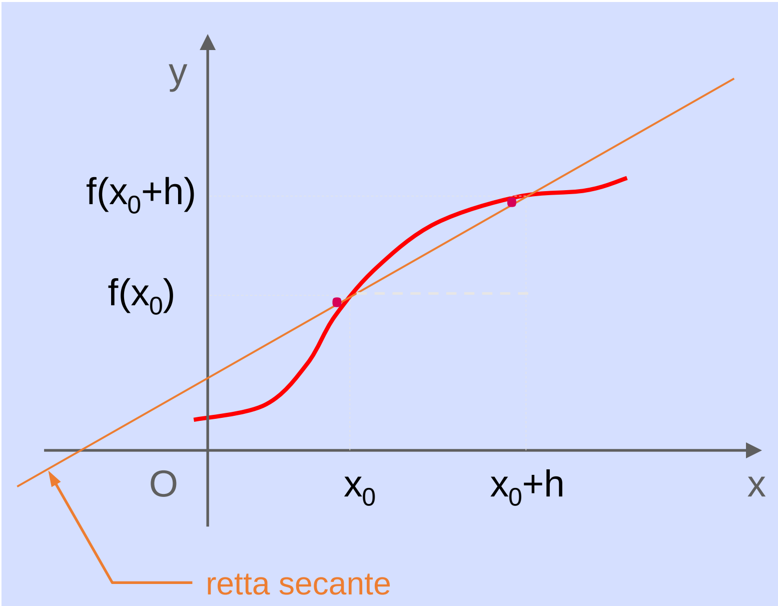
Data una funzione f(x), il rapporto incrementale relativo al punto x_0 :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

risulta essere il coefficiente angolare della retta passante per i punti:

$$\left(x_0 \ , \ f(x_0) \right) \qquad \left(x_0 + h \ , \ f(x_0 + h) \right)$$

Questa retta la chiameremo retta secante passante per il punto di ascissa x_0

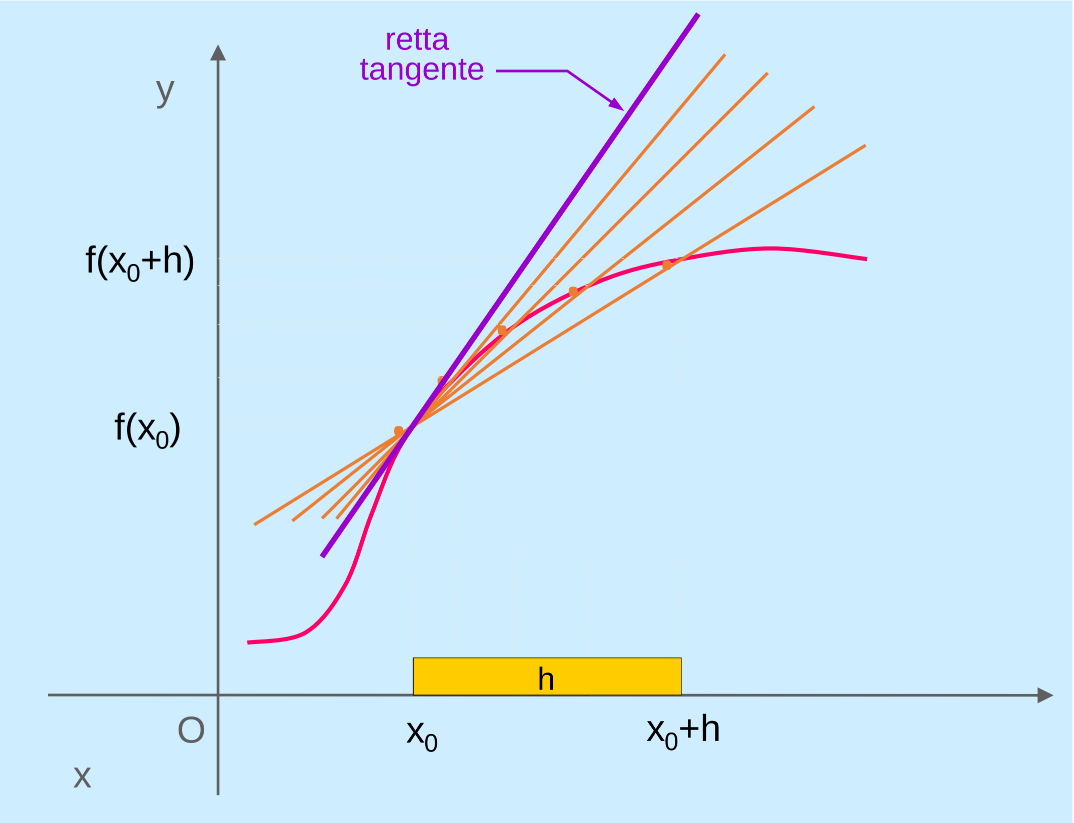


Quando $h \to 0$ accade che:

1. il rapporto incrementale tende alla derivata, infatti:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

2. la retta secante tende alla retta tangente



Quindi: ***La derivata di una funzione in un punto x_0 è uguale al coefficiente angolare della tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa x_0***

Osservazione: *Ricordando che l'equazione della retta passante per un punto è*

$y - y_0 = m\,(x - x_0)$ *allora l'equazione della **retta tangente** al grafico della funzione nel punto di ascissa x_0 è:*

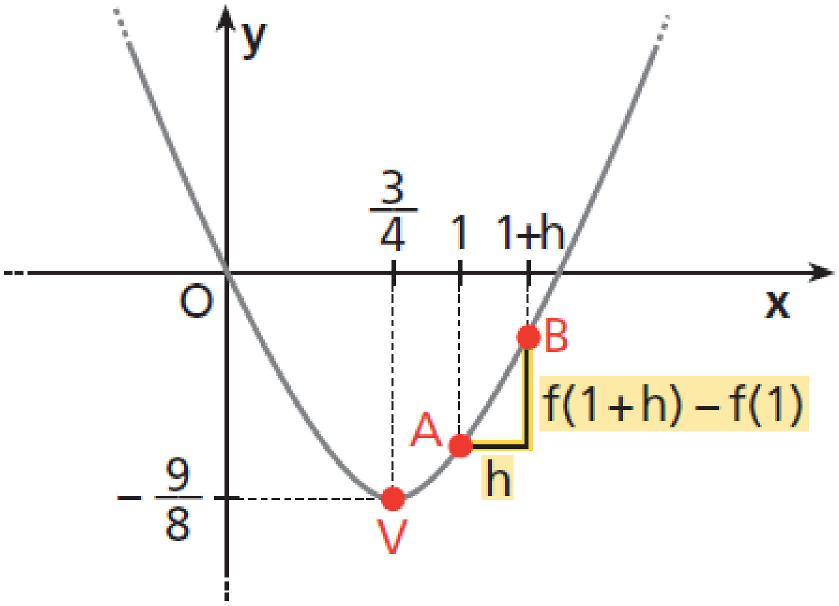
$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

ESEMPIO

Data la funzione $y = f(x) = 2x^2 - 3x$

Fissato il punto A di ascissa 1 e incremento h,

Determiniamo il rapporto incrementale



$$
\begin{aligned}
f(1+h) &= 2(1+h)^2 - 3(1+h) = \\
&= 2(1+2h+h^2) - 3 - 3h = \\
&= 2 + 4h + 2h^2 - 3 - 3h = \\
&= -1 + h + 2h^2,
\end{aligned}
$$

$f(1) = -1$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1 + h + 2h^2 - (-1)}{h} = \frac{h + 2h^2}{h} = 1 + 2h.$$

ESEMPIO

Calcoliamo **il valore della derivata** della funzione: $y = x^2 - x$ in $x = 3$.

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} =$$

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 3 - h - 9 + 3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{5h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (5 + h) .$$

$$f'(3) = 5.$$

ESEMPIO

Calcoliamo **la funzione derivata** della funzione: $y = 4x^2$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4(x+h)^2 - 4x^2}{h} =$$

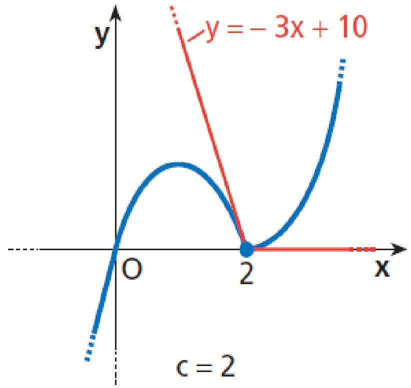
$$= \lim_{h \to 0} \frac{4x^2 + 8xh + 4h^2 - 4x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{8xh + 4h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (8x + 4h) .$$

$$f'(x) = 8x .$$

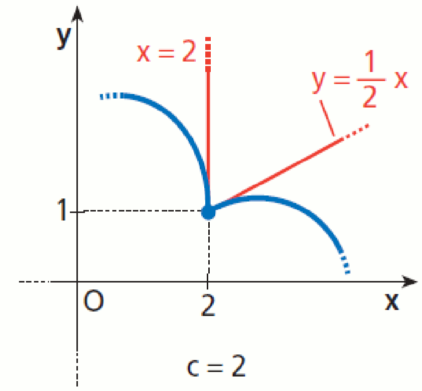
Esamina i seguenti grafici e ricava il valore delle derivate, sinistra e destra, nel punto indicato, utilizzando il significato geometrico di derivata.

77



$[f'_-(2) = -3;\ f'_+(2) = 0]$

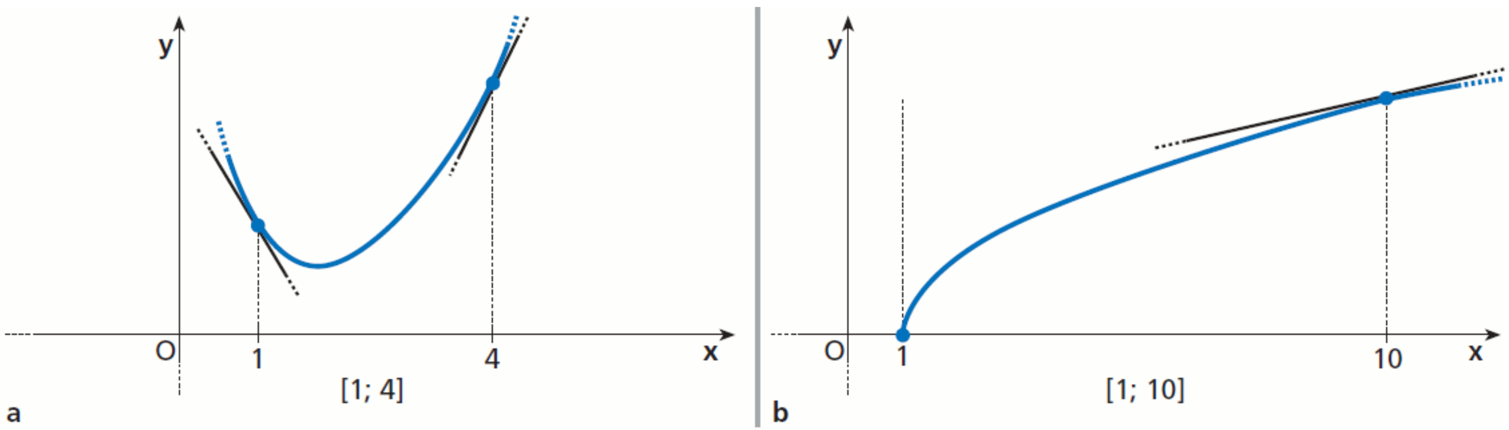
80



$\left[f'_-(2) = -\infty;\ f'_+(2) = \frac{1}{2}\right]$

Esaminando i grafici e utilizzando il significato geometrico di derivata, deduci se le seguenti funzioni sono derivabili negli intervalli indicati.

83



[a) sì; b) no, perché non esiste la derivata destra in 1]

Le derivate fondamentali

Derivata della funzione costante: $y = k$ con $\mathrm{k} \in R \to y' = 0$

Derivata della variabile indipendente: $y = x \to y' = 1$

Derivata di $y = x^n$ con $n \in N_0$ $y = x^n \to y' = nx^{x-1}$

Derivata di y=$\sqrt{x}$ ® y=$\sqrt{x} \to y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Derivata di y=$\sqrt[3]{x}$ ® y=$\sqrt[3]{x} \to y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

Derivata di $y = a^x$ $y = a^x \to y' = a^x \ln a$

Derivata di $y = e^x$ $y = e^x \to y' = e^x$

Derivata di $y = \log(x)$ $y = log_{\,a}x \to y' = \frac{1}{x} log_{\,a}e = \frac{1}{x * \log a}$

Derivata di $y = sen(x)$ $y = sin\, x \to y' = \cos x$

Derivata di $y = \cos(x)$ $y = \cos x \to y' = -\sin x$

Tutte queste derivate sono tutte dimostrabili facendo il rapporto incrementale relativo a qualsiasi numero o x.

Derivata della somma di due funzioni

Definizione:
La derivata della somma di due funzioni derivabili è uguale alla somma delle derivate delle funzioni stesse.

$$y = f(x) + g(x) \rightarrow y' = f'(x) + g'(x)$$

Per dimostrare che è veramente così bisogna fare il rapporto incrementale della funzione da derivare, relativo
A un punto generico x del suo insieme di definizione.

Derivata della differenza di due funzioni

Definizione:

La derivata della differenza di due funzioni derivabili è uguale alla differenza delle derivate delle funzioni stesse.

$$y = f(x) - g(x) \rightarrow y' = f'(x) - g'(x)$$

La derivata della somma/differenza algebrica di più funzioni derivabili è la somma/differenza algebrica delle derivate delle singole funzioni.

$$y = f(x) \pm g(x) \pm h(x) \rightarrow y' = f'(x) \pm g'(x) \pm h(x)$$

Derivata del prodotto di due funzioni

Definizione:
La derivata del prodotto di due funzioni è uguale al prodotto della derivata della prima funzione per la seconda, aumentato del prodotto della prima funzioni per la derivata dalla seconda.

$$y = f(x) * g(x) \rightarrow y' = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$$

La derivata del prodotto di una funzione per una costante è uguale al prodotto della derivata della funzione per la costante stessa.

$$y = f(x) * c \rightarrow y' = f'(x) * c$$

Derivata del quoziente di due funzioni

Definizione:
La derivata del quoziente di due funzioni derivabili (con la funzione divisore diversa da zero nei punti nei quali si calcola la derivata),
è uguale a una frazione che ha per denominatore il quadrato della funzione divisore e per numeratore il prodotto tra la derivata del dividendo e il divisore diminuito del prodotto del dividendo per la derivata del divisore.

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow y' = \frac{f'(x) * g(x) - f(x) * g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Nel caso particolare in cui f(x) = 1 ed essendo g(x) $\neq 0$, si applica regola sopra esposta.

$$y = \frac{1}{g(x)} \rightarrow y' = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Esempi di alcuni esercizi

Somma:

$$y = x^3 + x + 7 \rightarrow y' = 3x^2 + 1 + 0 = 3x^2$$

Differenza:

$$y = \sin(x) - \cos(x) - \cos(\frac{\pi}{8}) \rightarrow y' = \cos(x) - (-\sin(x)) - 0 = \cos(x) + \sin(x)$$

Prodotto:

$$y = x * \log x \rightarrow y' = 1 * \log x + x * \frac{1}{x}$$

Quoziente:

$$y = \frac{2x-1}{x^2+1} \rightarrow y' = \frac{2(x^2+1) - (2x-1) * 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2x+2}{(x^2+1)^2}$$