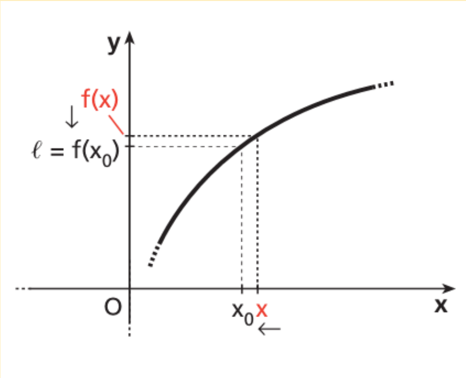
LA DEFINIZIONE
DI LIMITE FINITO IN UN PUNTO

1. LA DEFINIZIONE

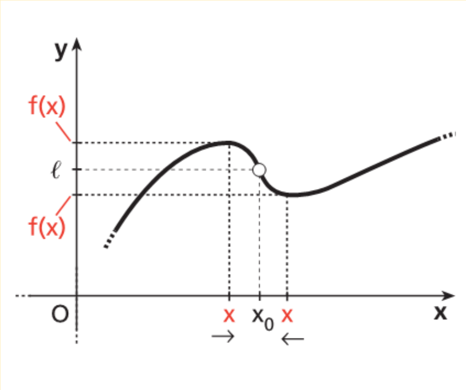
Quando *x* si avvicina a x_0,
$f(x)$ si avvicina a $f(x_0)$
o a un altro valore reale *l* ?

Quando *x*
si avvicina a x_0,
$f(x)$ si avvicina a
un valore *l* che è
proprio $f(x_0)$.



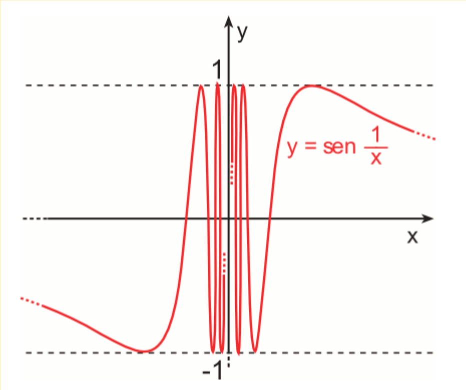
x_0 non appartiene
al campo di
esistenza.

Quando *x*
si avvicina a x_0,
$f(x)$ si avvicina a
un valore *l* che
non è $f(x_0)$.



Quando x si
avvicina a 0 la
funzione oscilla
indefinitamente.

$f(x)$ non si avvicina
ad alcun valore
determinato.



LA DEFINIZIONE DI LIMITE FINITO IN UN PUNTO

1. LA DEFINIZIONE

ESEMPIO

Cosideriamo la funzione:

$$y = f(x) = \frac{2x^2 - 6x}{x - 3}.$$

Che cosa succede ai valori di ***f*(*x*)** quando ***x* si avvicina a 3**?

x	f(x)
2,9	5,8
2,99	5,98
2,999	5,998
2,9999	5,9998

x	f(x)
3,1	6,2
3,01	6,02
3,001	6,002
3,0001	6,0002

$\rightarrow$ **6** $\leftarrow$

La condizione per avere $|f(x) - 6| < \varepsilon$

è $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}$.

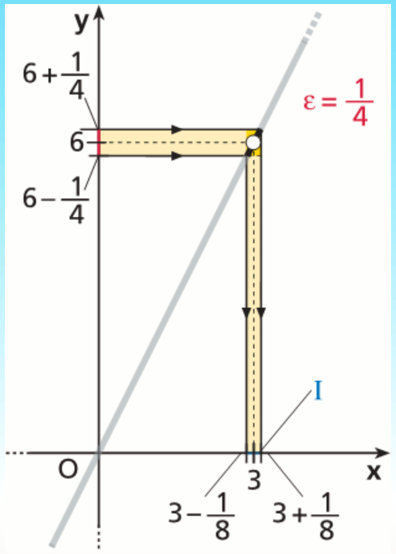
Cioè, per ogni numero reale positivo ε,

se

$$x \in \left]3 - \frac{\varepsilon}{2}; 3 + \frac{\varepsilon}{2}\right[,$$

allora

$$f(x) \in \left]6 - \varepsilon; 6 + \varepsilon\right[.$$



1. LA DEFINIZIONE

DEFINIZIONE

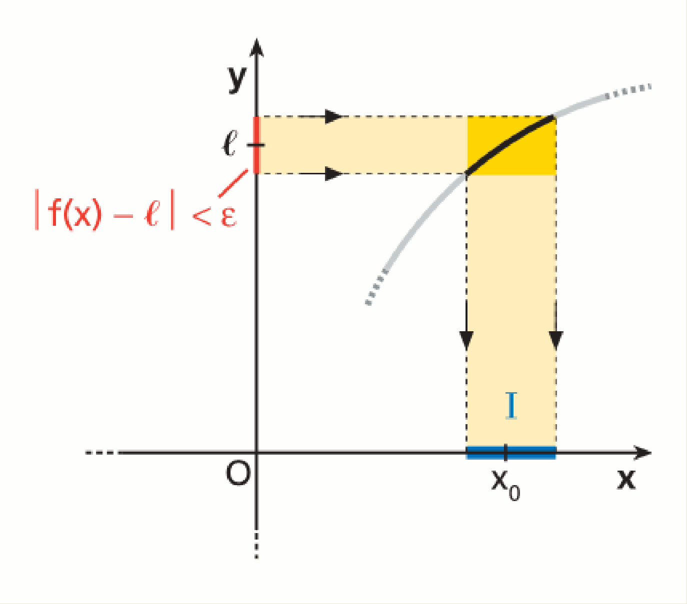
Limite finito per *x* che tende a x_0
Si dice che la funzione *f* (*x*) ha per limite il numero reale *l* per *x* che tende a x_0, e si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \,,$$

quando, comunque si scelga un numero reale positivo f, si può determinare un intorno completo *I* di x_0 tale che risulti

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

per ogni *x* appartenente a *I*, diverso (al più) da x_0.



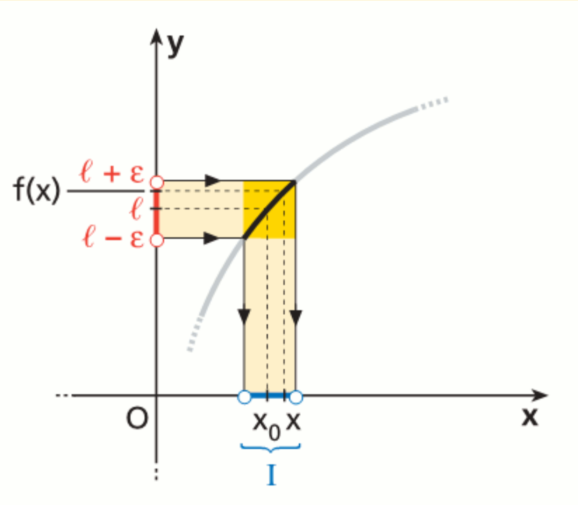
In simboli $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I(x_0) \mid \; |f(x) - l| < \varepsilon, \forall x \in I(x_0), x \neq x_0 \,.$

LA DEFINIZIONE DI LIMITE FINITO IN UN PUNTO

2.IL SIGNIFICATO DELLA DEFINIZIONE

Qual è il significato intuitivo della definizione?

L'esistenza del limite assicura che:
se x si avvicina indefinitamente a x_0,
$f(x)$ si avvicina indefinitamente a $\boldsymbol{l}$.



Se riduciamo ε, troviamo un intorno di x_0 più piccolo.

In simboli $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I(x_0) \,\big|\, |f(x) - l| < \varepsilon,\ \forall x \in I(x_0),\ x \neq x_0$.

LA DEFINIZIONE DI LIMITE FINITO IN UN PUNTO

3. LA VERIFICA

ESEMPIO

Verifichiamo che $\lim_{x \to 2} (2x - 1) = 3$.

Per ogni ε troviamo l'insieme dei valori di *x* che soddisfano la condizione

$$\left|(2x-1)-4\right| < \varepsilon$$

e verifichiamo che contenga un intorno di 2.

Quindi $\left|2x-4\right| < \varepsilon$,

cioè $4 - \varepsilon < 2x < 4 + \varepsilon$

da cui si ricava $2 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 2 + \frac{\varepsilon}{2}$.

In temini di intervalli: $\left]2 - \frac{\varepsilon}{2}; 2 + \frac{\varepsilon}{2}\right[$,

che è un intorno di 2.

4. LE FUNZIONI CONTINUE

DEFINIZIONE

Una funzione f è **continua in x_0** se x_0 appartiene al dominio di f e il limite in x_0 coincide con $f(x_0)$, cioè:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) .$$

DEFINIZIONE

Una funzione f è **continua nel suo dominio D**, se è continua in ogni punto di D.

Se una funzione è continua in un punto, il valore del limite in quel punto è semplicemente il valore della funzione.

Funzioni continue in intervalli reali

La funzione costante
$f(x) = k$, continua in tutto **R**.

La funzione polinomiale
$f(x) = a_0x_n + a_1x_{n\text{-}1}+\ldots+a_{n\text{-}1}x+a_n$, continua in tutto **R**.

La funzione radice quadrata
$f(x) = \sqrt{x}$, continua in **R**$^+$ U {0}.

Le funzioni goniometriche (esempi)
$f(x) = \text{sen}(x)$, continua in tutto **R**.
$f(x) = \text{cotg}(x)$, continua in **R** – $\{k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

La funzione esponenziale
$f(x) = a^x$, con $a > 0$, continua in tutto **R**.

La funzione logartimica
$f(x) = \log_a x$, con $a > 0$, $a \neq 1$, continua in **R**$^+$.

LA DEFINIZIONE DI LIMITE FINITO IN UN PUNTO

6. IL LIMITE DESTRO E IL LIMITE SINISTRO

DEFINIZIONE

Si scrive $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$

e si dice che l è il **limite destro** di f in x_0, se soddisfa una speciale condizione di limite applicata agli intorni destri di x_0.

A differenza della definizione standard di limite, la disuguaglianza $|f(x) - l| < \varepsilon$ deve essere soddisfatta nell'intorno destro di x_0, $]x_0; x_0 + \delta[$.

Se x si avvicina indefinitamente a x_0 **da valori più grandi**, $f(x)$ si avvicina indefinitamente a l.

DEFINIZIONE

Si scrive $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$

e si dice che l è il **limite sinistro** di f in x_0, se soddisfa una speciale condizione di limite applicata agli intorni sinistri di x_0.

A differenza della definizione standard di limite, la disuguaglianza $|f(x) - l| < \varepsilon$ deve essere soddisfatta nell'intorno sinistro di x_0, $]x_0 - \delta; x_0[$.

Se x si avvicina indefinitamente a x_0 **da valori più piccoli**, $f(x)$ si avvicina indefinitamente a l.

6.IL LIMITE DESTRO E IL LIMITE SINISTRO

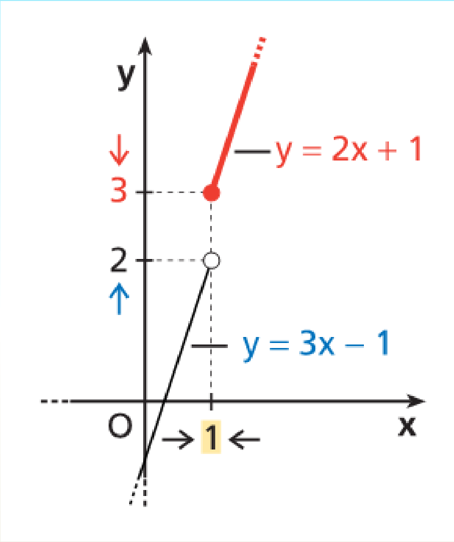
ESEMPIO

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x \geq 1 \\ 3x-1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

e verifichiamo che

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$ $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$



Limite destro

Verifichiamo se $|f(x) - 3| < \varepsilon$ è soddisfatta in un intorno destro di 1.

$|(2x + 1) - 3| < \varepsilon$

$\longrightarrow$ $-\varepsilon < 2x - 2 < \varepsilon$

$\longrightarrow$ $1 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$

$\longrightarrow$ Soddisfatta in $\left]1; 1 + \frac{\varepsilon}{2}\right[$.

Limite sinistro

Verifichiamo se $|f(x) - 2| < \varepsilon$ è soddisfatta in un intorno sinistro di 1.

$|(3x - 1) - 2| < \varepsilon$

$\longrightarrow$ $-\varepsilon < 3x - 3 < \varepsilon$

$\longrightarrow$ Soddisfatta in $\left]1 - \frac{\varepsilon}{3}; 1\right[$.