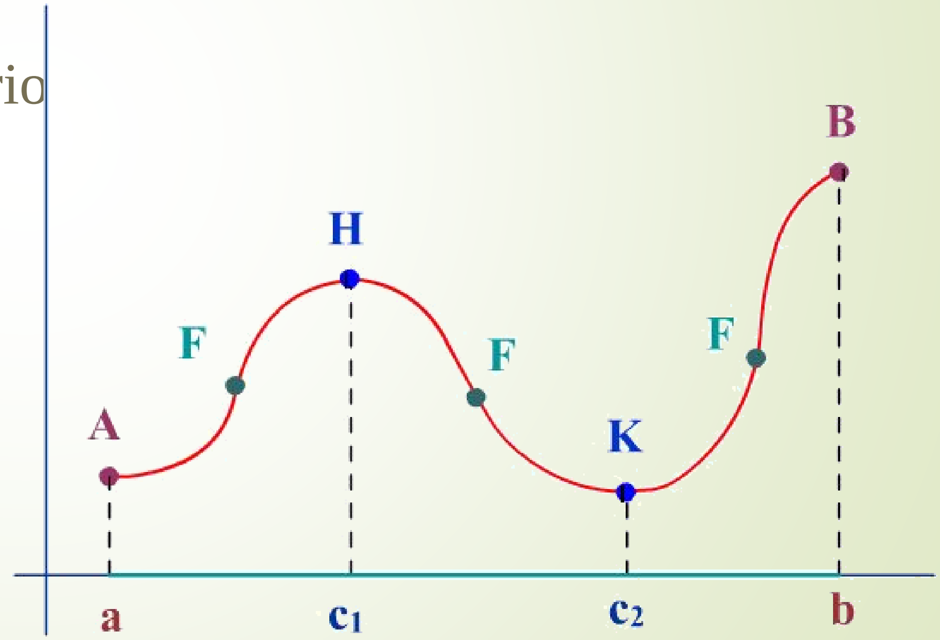
Derivate per lo studio di funzione

- Il concetto di derivata è fondamentale nello studio delle caratteristiche di una funzione
- Infatti permette di stabilire
  - *le caratteristiche di monotonia,*
  - *di determinare i punti di massimo e minimo di una funzione,*
  - *le caratteristiche di concavità e convessità.*

Caratteristiche delle funzioni

Il diagramma di una funzione è caratterizzato dalle proprietà di monotonia, dalla concavità o convessità e da alcuni punti particolari. Esaminiamo le caratteristiche di questi punti.

- H è un punto di max relativo proprio di f(x)
- K è un punto di minimo relativo proprio di f(x) (anche min assoluto)
- B è max assoluto
- F sono punti di flesso



Monotonia – studio della derivata prima

Teor 1 Se y = f(x) è una funzione continua in un intervallo [a, b] e derivabile nei punti interni,]a, b[, si ha:

- *Se f '(x) è sempre positiva allora f(x) è strettamente crescente in* [a, b]

  f '(x) > 0 ⇒ y = f(x) è strettamente crescente

- *Se f '(x) è sempre negativa allora f(x) è strettamente decrescente in* [a, b]

  f '(x) < 0 ⇒ y = f(x) è strettamente decrescente

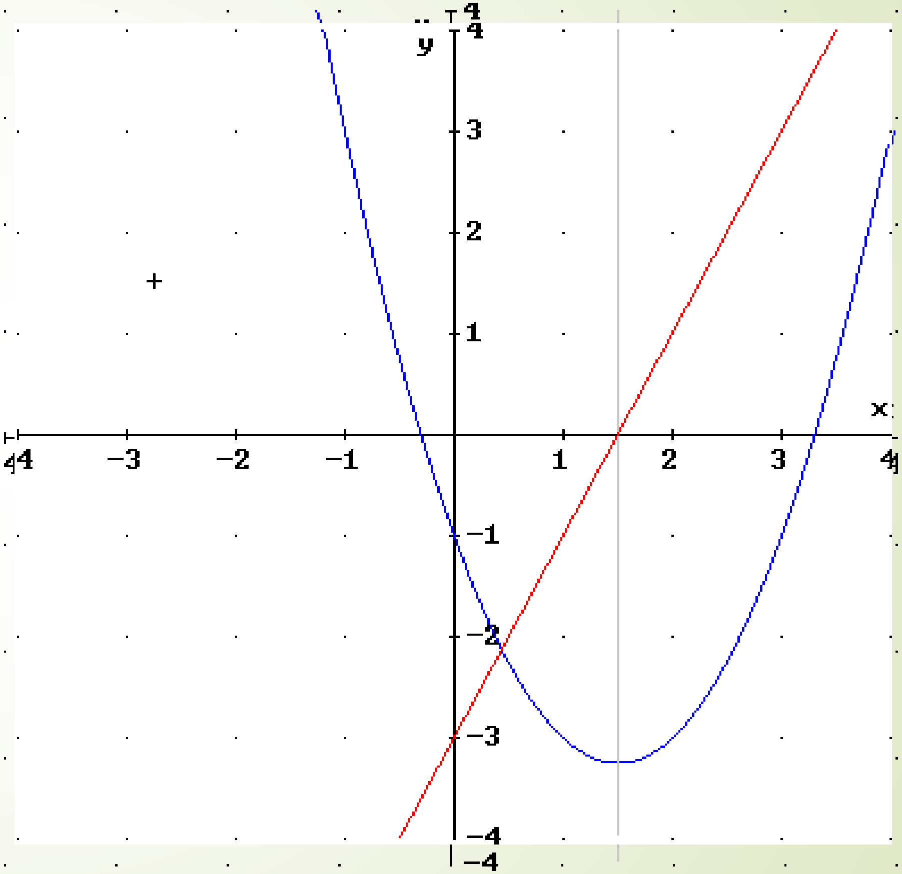
Monotonia – studio della derivata prima

Esempio 1 $y = x^2 - 3x - 1$

$f'(x) = 2x - 3$

$f'(x) > 0$ per $x > 3/2$

$f'(x) < 0$ per $x < 3/2$



$f'(x) > 0$ per $x > 3/2$ ==> $f'(x)$ strett. crescente per $x > 3/2$

$f'(x) < 0$ per $x < 3/2$ ==> $f'(x)$ strett. decrescente per $x < 3/2$

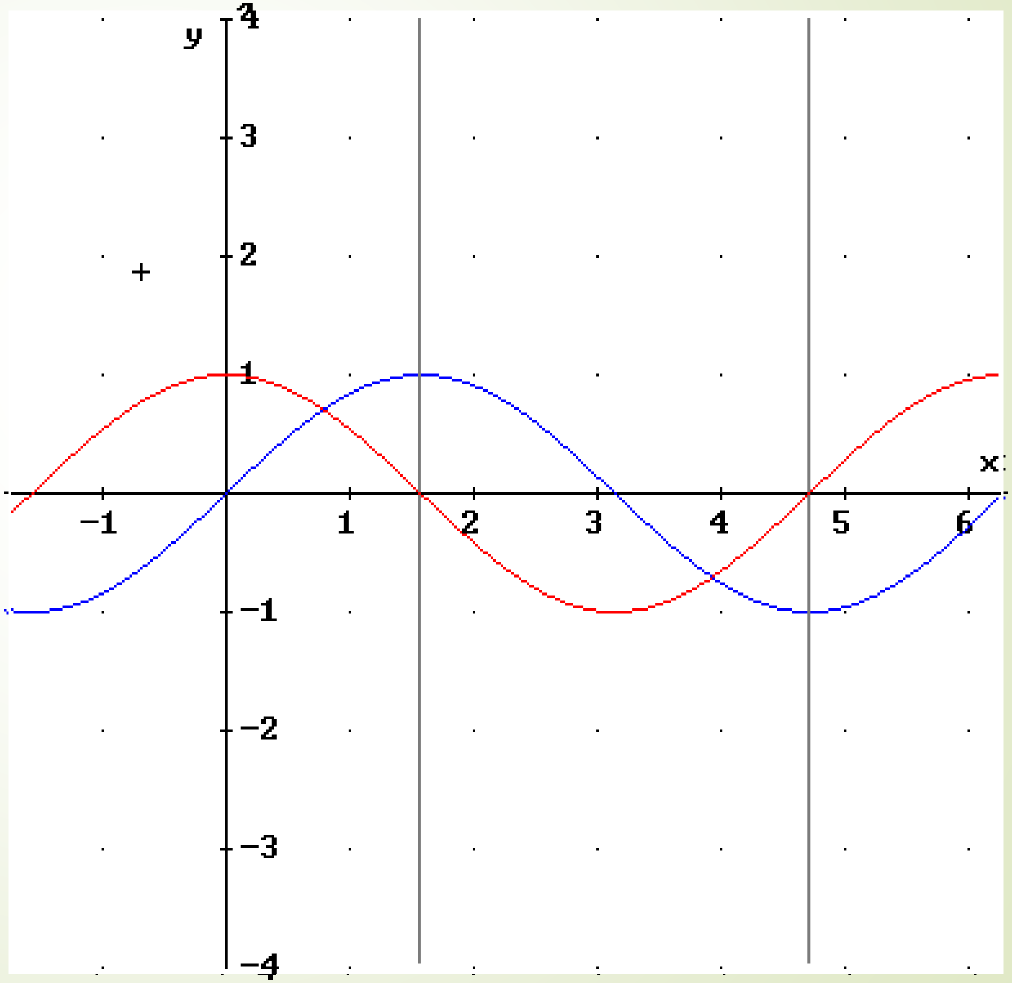
Monotonia – studio della derivata prima

Esempio 2 y = sen x

f ’(x) = cos x

f ’(x) >0
per $-\pi/2 < x < \pi/2$

f ’(x) <0
per $\pi/2 < x < 3\pi/2$



Monotonia – studio della derivata prima

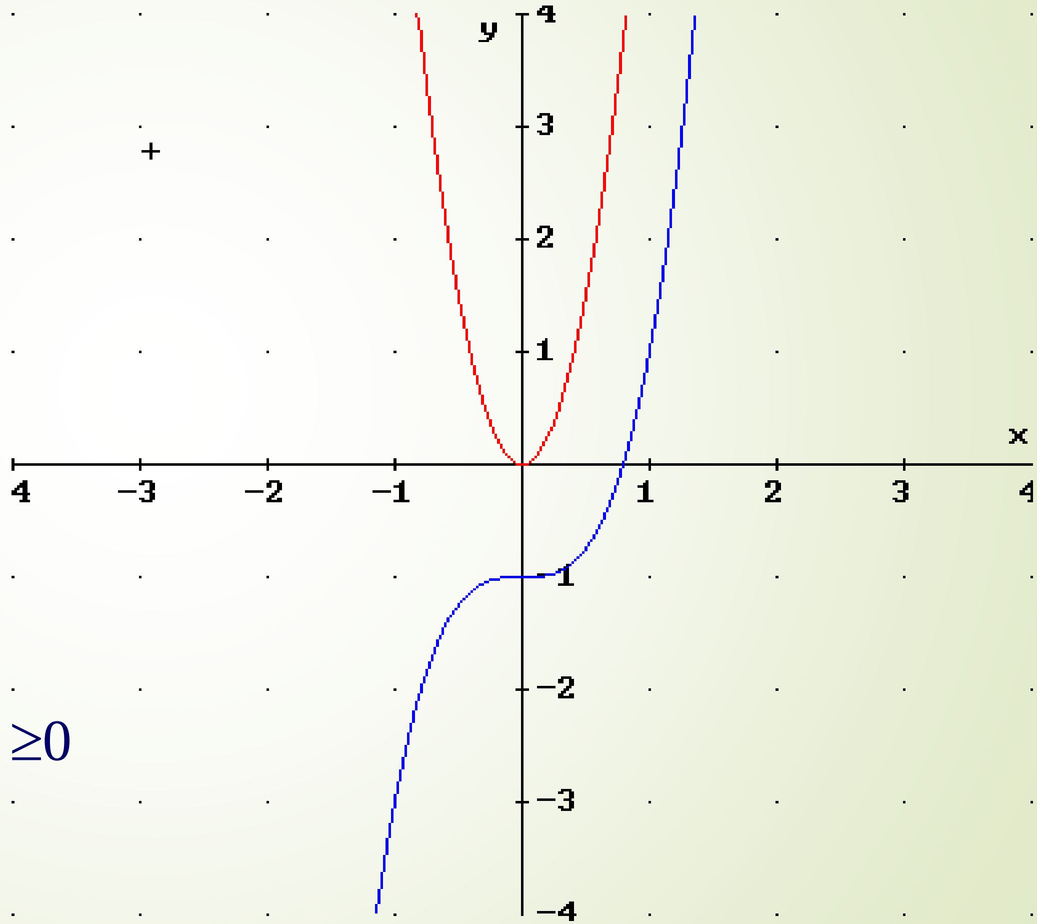
Il teorema 1 è invertibile ma "non perfettamente", infatti:

Teor 2 Se y = f(x) è una funzione continua in un intervallo [a, b] e derivabile nei punti interni di [a, b] si ha che:

- $y = f(x)$ *è crescente* $\Rightarrow f'(x) \geq 0$
- $y = f(x)$ *è decrescente* $\Rightarrow f'(x) \leq 0$

Monotonia – studio della derivata prima

Esempio 1 $y = 2x^3 - 1$



$f'(x) = 6x^2$

$f'(x) = 6x^2 \geq 0$

per ogni $x \in R$

f(x) crescente ==> $f'(x) \geq 0$

Punti di Massimo e Minimo

Dalla relazione tra segno della derivata 1° e monotonia possiamo ottenere facilmente alcuni teoremi che permettono di determinare i punti di max e minimo relativo

Teor 3 (*Teor. di Fermat*) Se $y = f(x)$ è una funzione definita in un intervallo $[a, b]$, se c è un punto interno ad $[a, b]$ *(quindi di accumulazione a dx e a sx)* e $f(x)$ è derivabile in c si ha:

$$\text{Se} \left.\begin{array}{l} c \text{ è punto di max relativo per } f(x) \\ \\ c \text{ è punto di min relativo per } f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f'(c) = 0$$

Punti di Massimo e Minimo

Esempio 1 $y = \sin x$

$y' = \cos x$

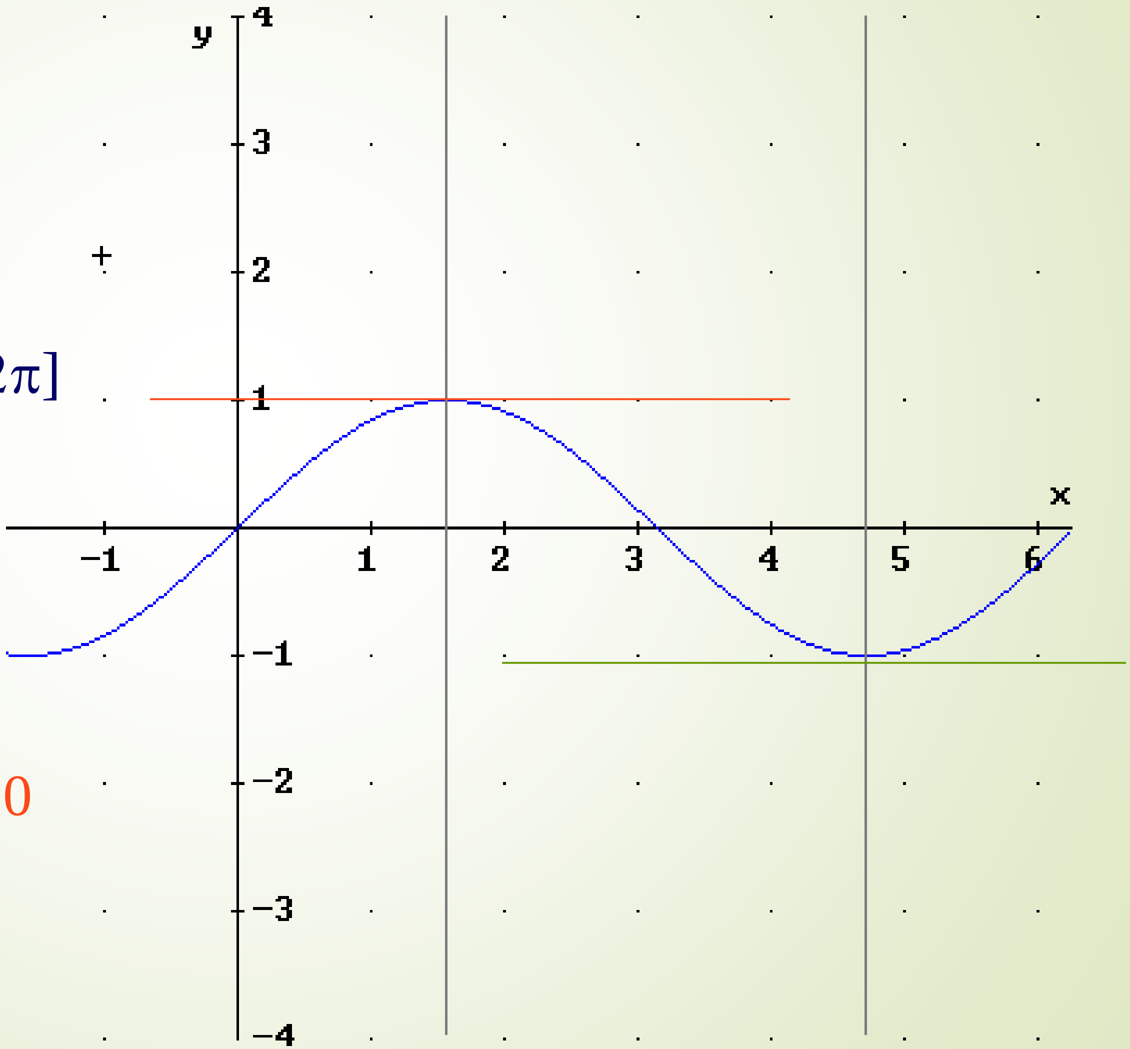
consideriamo la funzione
$y = \sin x$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$

Per $x = \pi/2$ max relativo

$f'(\pi/2) = \cos \pi/2 = 0$

Per $x = 3\pi/2$ min relativo

$f'(3\pi/2) = \cos(3\pi/2) = 0$



Punti di Massimo e Minimo

Oss.1 Essendo c punto interno non può essere punto di frontiera.
Nei punti di frontiera possiamo avere MAX e MIN relativi senza che f ' calcolata in essi sia = 0

Oss.2 Il teorema 3 è condizione necessaria ma non sufficiente cioè il teorema non è invertibile

$$f'(c) = 0 \not\Rightarrow \begin{cases} c \text{ è punto di max relativo per } f(x) \\ c \text{ è punto di min relativo per } f(x) \end{cases}$$

Infatti nell'esempio seguente f'(c) = 0 ma non ci sono max o minimi.

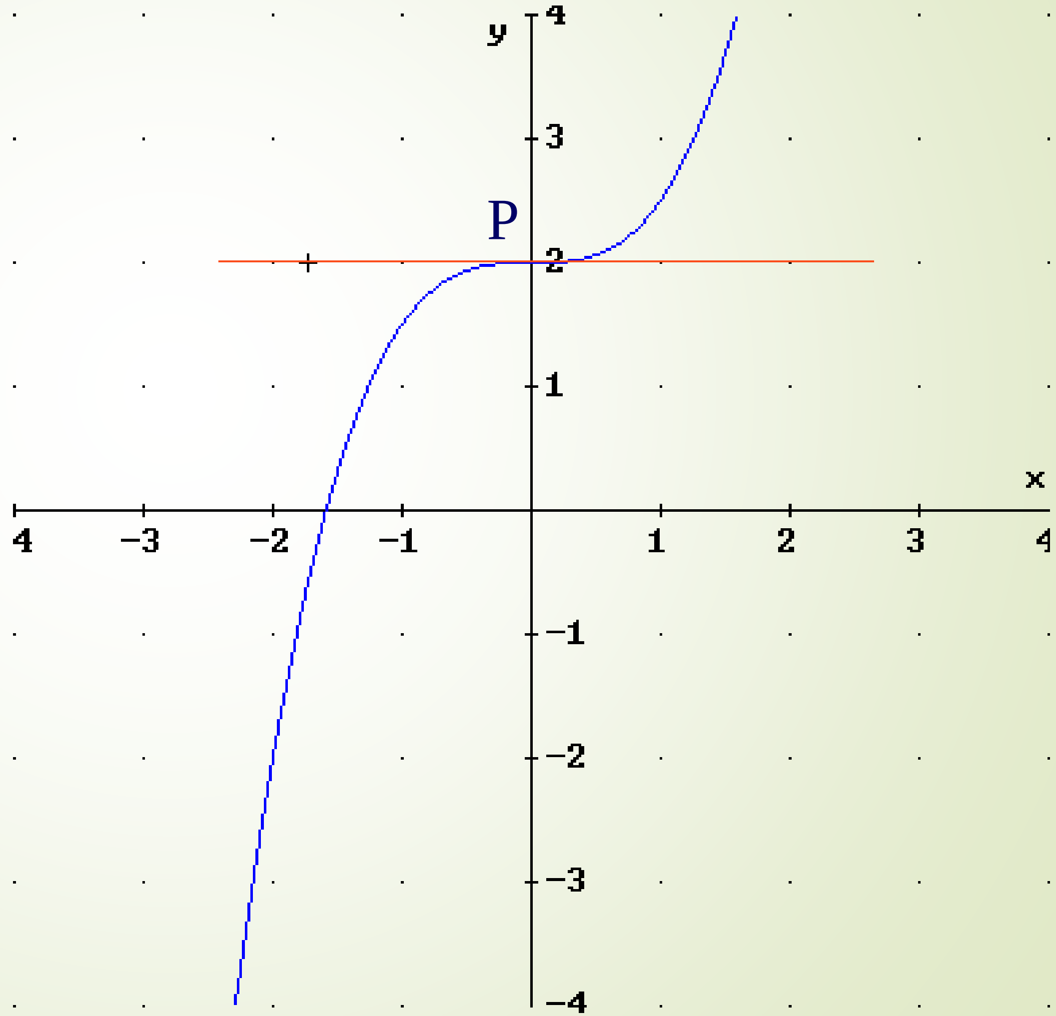
Punti di Massimo e Minimo

<u>Esempio 1</u> $y = x^3+2$

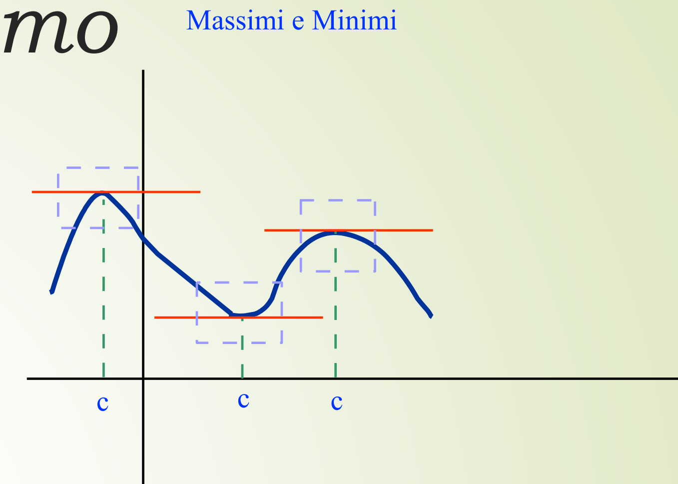
$f'(x) = 3x^2$

$f'(0) = 3(0)^2 = 0$

il punto P di ascissa x=0 ha derivata prima = 0 ma non è un punto di max o di min, bensì un flesso a tangente orizzontale.



Punti di Massimo e Minimo



Esiste tuttavia. una condizione necessaria e sufficiente che caratterizza i punti di massimo e minimo relativo

<u>Teor 4</u> Se y = f(x) è una funzione definita in D e c è un punto interno a D e se inoltre

1. *f(x) è continua in c e se*
2. *y=f(x) è derivabile in un intorno I(c)-{c} e si ha:*

a sinistra di c f'(x)>0
a destra di c f'(x)<0
c *è punto di* ***Max relativo*** *per f(x)*

a sinistra di c f'(x)<0
a destra di c f'(x)>0
c *è punto di* ***Min relativo*** *per f(x).*

Punti di Massimo e Minimo

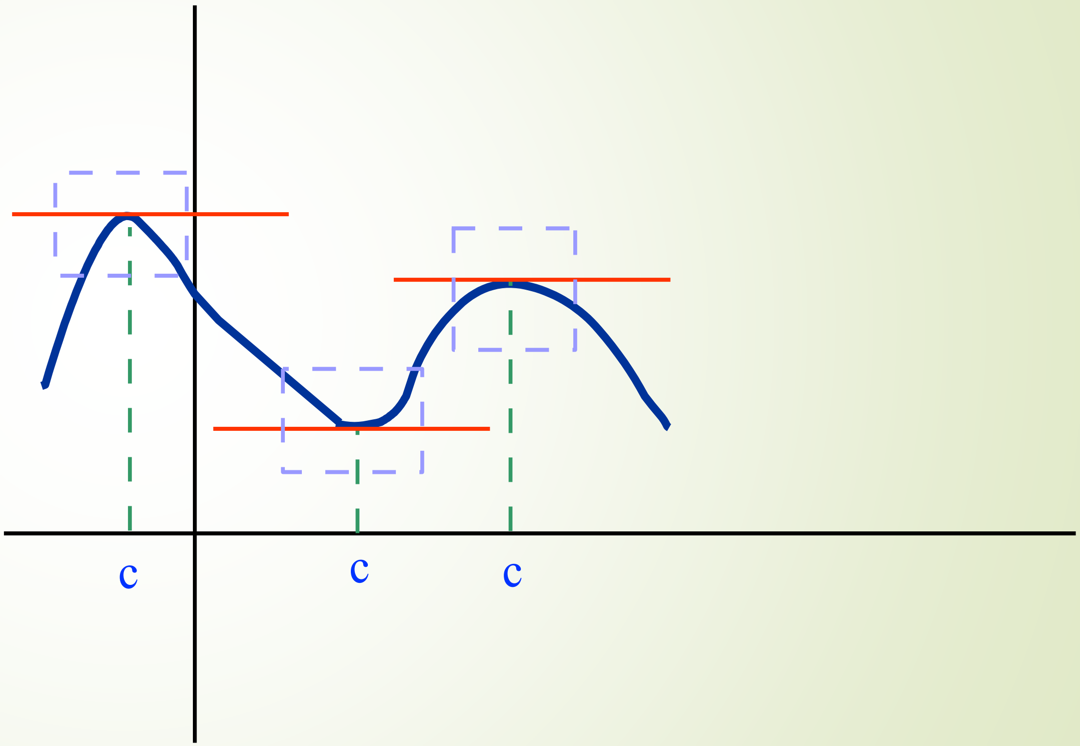
Massimi e Minimi

Oss al Teor. 4

f (x) continua in c

f(x) derivabile in un intorno di c

f'(c)=0



Il teorema è applicabile e permette il calcolo dei massimi e minimi

Punti di Massimo e Minimo

Massimi e Minimi

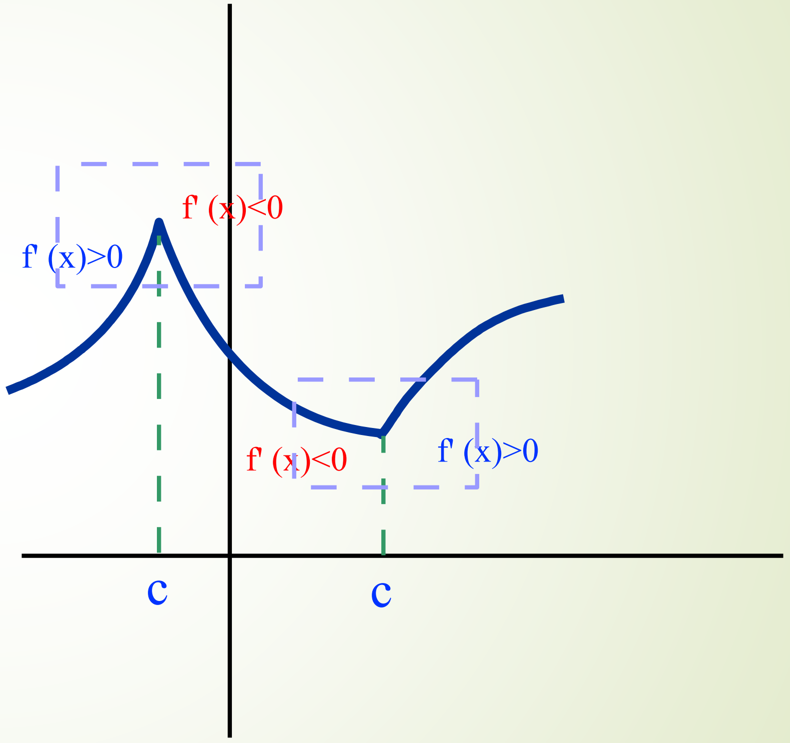
Oss al Teor. 4

f (x) continua in c

f(x) derivabile in un intorno di c

ma non nel punto c $\nexists f'(c)$

$$f_-'(c) \neq f_+'(c)$$



Il teorema è applicabile e permette il calcolo dei massimi e minimi

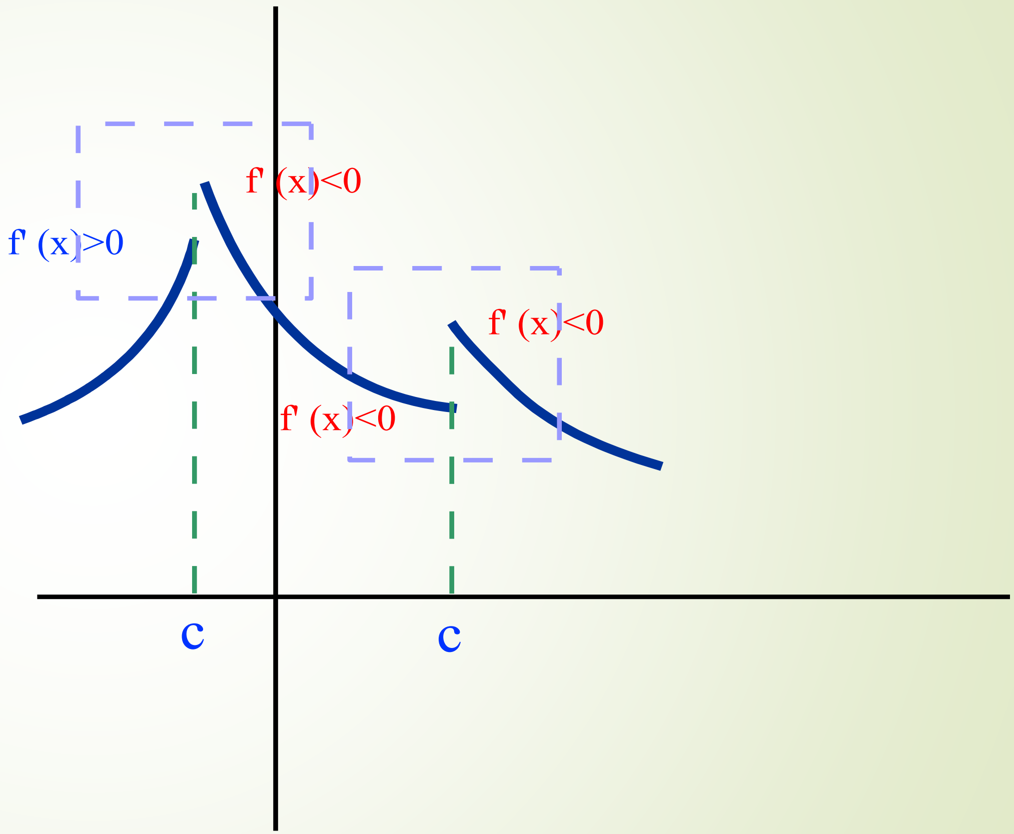
Punti di Massimo e Minimo

Oss al Teor. 4

f (x) discontinua in c

f(x) derivabile in un intorno di c

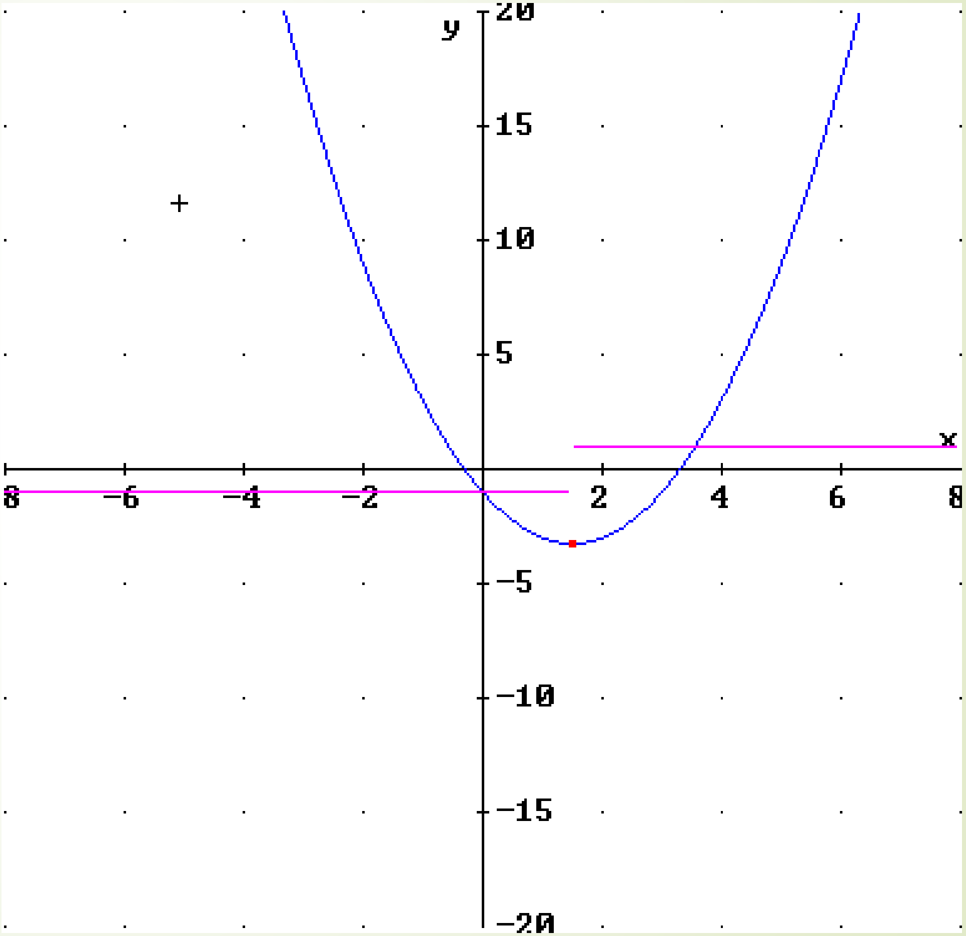
ma non nel punto c $\nexists f'(c)$



Il teorema NON è applicabile.

Punti di Massimo e Minimo

<u>Esempio 1</u> $y = x^2 - 3x - 1$



$f'(x) = 2x - 3$

$f'(x) > 0$ per $x > 3/2$

$f'(x) < 0$ per $x < 3/2$

Il punto P di ascissa x = 1,5 e ordinata y = - 3,25 è un punto di minimo relativo ed anche minimo assoluto per la funzione

Derivata II – Concavità, Convessità, Flessi

La derivata seconda è la derivata della funzione derivata prima.

Es. $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ $f'(x) = 3x^2 - 6x$ $f''(x) = 6x - 6$

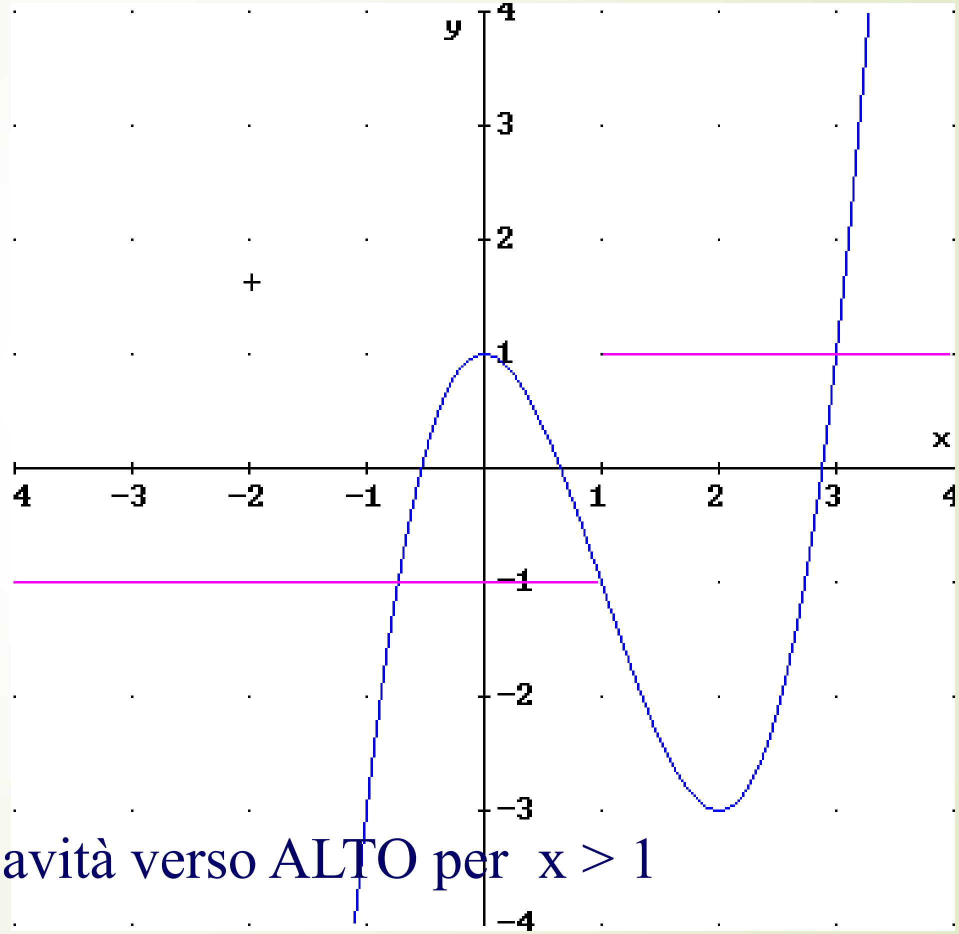
Lo studio della derivata seconda permette di determinare le caratteristiche di concavità o convessità della funzione

<u>Teor 5</u> Se $y = f(x)$ è una funzione derivabile due volte nei punti interni di un intervallo I e se $f''(x)$ è continua in I allora si ha:

1. *Se $f''(x)>0$ $\forall x$ interno ad I $\Rightarrow$ $y=f(x)$ volge la concavità verso l'alto in I.*
2. *Se $f''(x)<0$ $\forall x$ interno ad I $\Rightarrow$ $y=f(x)$ volge la concavità verso il basso in I.*

Derivata II – Concavità, Convessità, Flessi

<u>Esempio 1</u> $y = x^3 - 3x^2 + 1$



$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(x) > 0$ per $x>1$

$f''(x) < 0$ per $x<1$

$f''(x) > 0$ per $x>1$ ==> f(x) concavità verso ALTO per $x > 1$

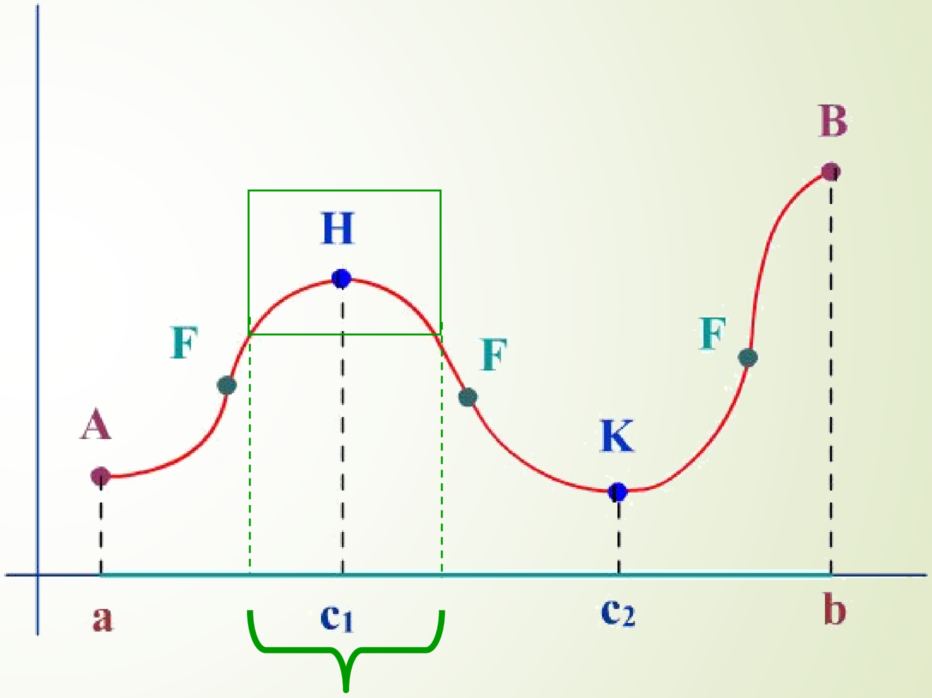
$f''(x) < 0$ per $x<1$ ==> f(x) concavità verso BASSO per $x < 1$

Caratteristiche delle funzioni – Punti estremanti

Si dicono Punti Estremanti di f(x) i punti di max e min relativo della funzione:

Def massimo relativo

- x_0 è punto di max relativo proprio per f(x) se esiste almeno un intorno di x_0 tale che $f(x) < f(x_0)\ \forall x \in I \quad x \neq x_0$



Caratteristiche delle funzioni – Punti estremanti

definiamo meglio i concetti precedenti:

Def minimo relativo

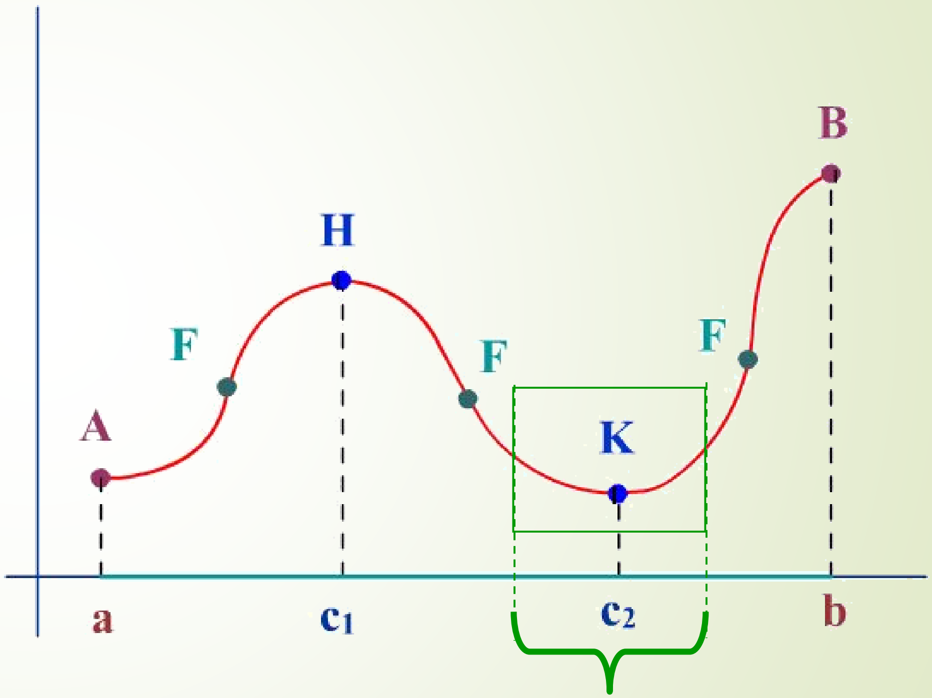
- x_0 è punto di min relativo per f(x) se

esiste almeno un intorno di x_0 tale che $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in I \quad x \neq x_0$

Def minimo relativo

- x_0 è punto di minimo relativo proprio per f(x) se

esiste almeno un intorno di x_0 tale che $f(x) > f(x_0)$ $\forall x \in I \quad x \neq x_0$



Il massimo e il minimo relativo sono concetti locali, cioè relativo ad un intorno del punto.

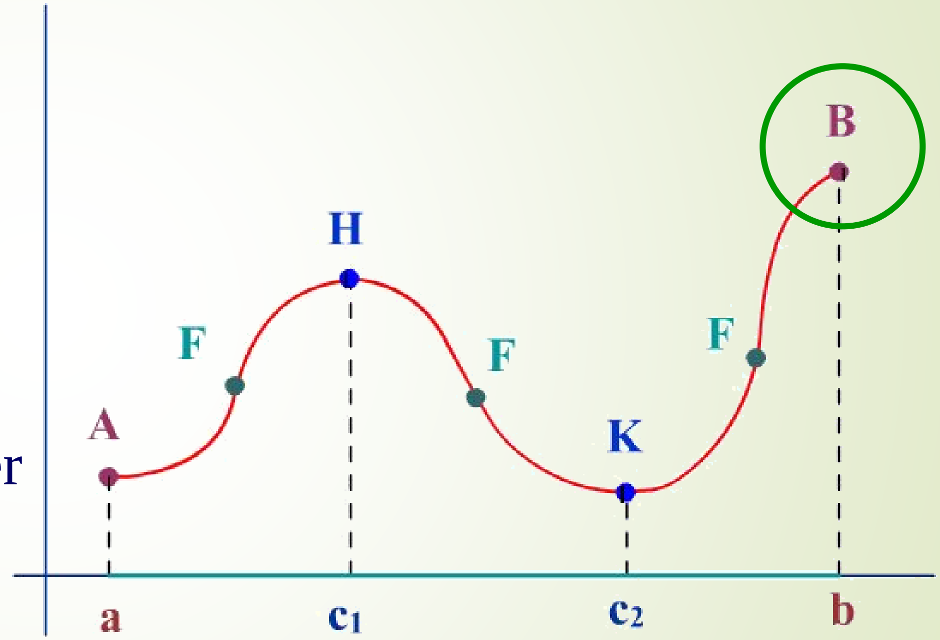
Caratteristiche delle funzioni

definiamo meglio i concetti precedenti:

Def massimo assoluto

- x_0 è punto di max assoluto per $f(x)$ se

  $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in D$



Def minimo assoluto

- x_0 è punto di minimo assoluto per $f(x)$ se

  $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in D$

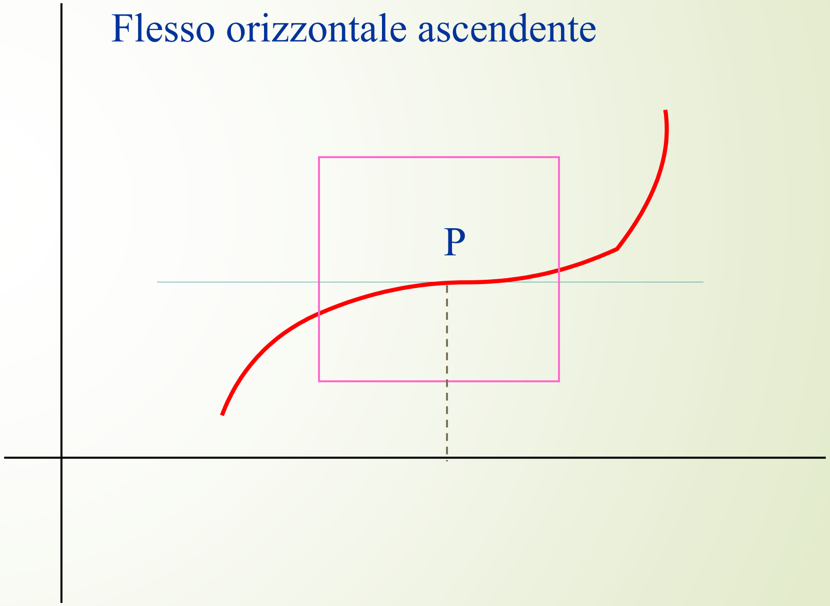
Il max e il nim assoluti sono proprietà generali di tutta la funzione

Caratteristiche delle funzioni

definiamo meglio i concetti precedenti:

Def Punto di Flesso a tangente orizzontale

- x_0 è punto di flesso (ascendente) a tangente orizzontale per f(x) se
- $f'(x_0) = 0$
- ed esiste un intorno $I(x_0)$: $\forall x \in I(x_0)$
  $x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$
  $x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$



Caratteristiche delle funzioni

definiamo meglio i concetti precedenti:

Def Punto di Flesso a tangente obliqua

- x_0 è punto di flesso (ascendente) a tangente obliqua per f(x) se
- $f'(x_0) > 0$
- esiste un intorno $I(x_0)$: $\forall x \in I(x_0)$

$x < x_0 \Rightarrow$ f(x) sotto la tangente

$x > x_0 \Rightarrow$ f(x) sopra la tangente