Appunti di analisi matematica:

Integrale Definito

Il concetto d'integrale nasce per risolvere due classi di problemi:

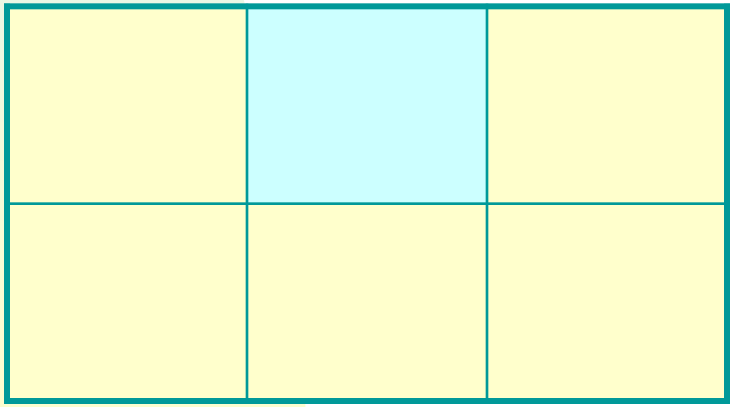
Integrale Definito	• Calcolo delle aree di fig. delimitate da curve • calcolo di volumi • calcolo del lavoro di una forza • calcolo dello spazio percorso …..
Integrale Indefinito	• Problema inverso del calcolo della derivata: *nota la derivata di una funzione calcolare la funzione stessa.*

Calcolo delle Aree

- Area dei poligoni:

È la situazione più semplice in quanto qualunque poligono può essere scomposto in triangoli e la sua area ricondotta all'area di un rettangolo equivalente.

Area del Rettangolo



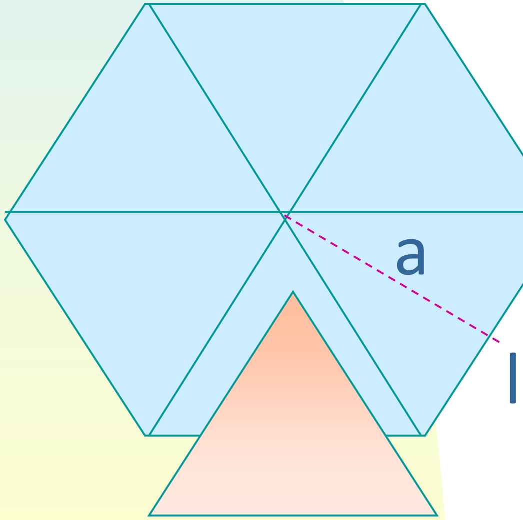
$$A = b \bullet h$$

Basta ricoprire la superficie del rettangolo con quadratini di area unitaria

- <u>Poligoni regolari</u>

Scomponendoli in triangoli congruenti è facile calcolare l'area

Area di un Esagono



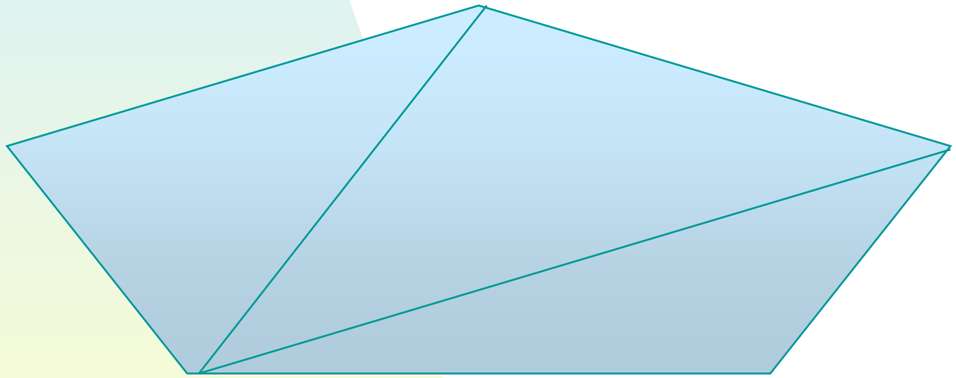
$$A_{triangolo} = \frac{l \cdot a}{2}$$

$$A_{poligono} = \frac{a \cdot l}{2} \cdot n = \frac{a \cdot l \cdot n}{2} = \frac{a \cdot (l \cdot n)}{2} = \frac{a \cdot p}{2}$$

- Poligoni Irregolari

Basta scomporli opportunamente in triangoli

Area di un Poligono qualsiasi



$$A_{poligono} = \sum_{1}^{n} A_{triangoli}$$

Area del Cerchio

Il calcolo dell'area è molto più complesso in quanto non è possibile scomporre il cerchio in triangoli.

E' possibile però calcolare l'area per approssimazioni successive:

Indichiamo con A la classe dei poligoni regolari inscritti nel cerchio,
di 3, 4, 5, 6, n lati rispettivamente
e con a_3, a_4, a_5, … a_n le relative aree;

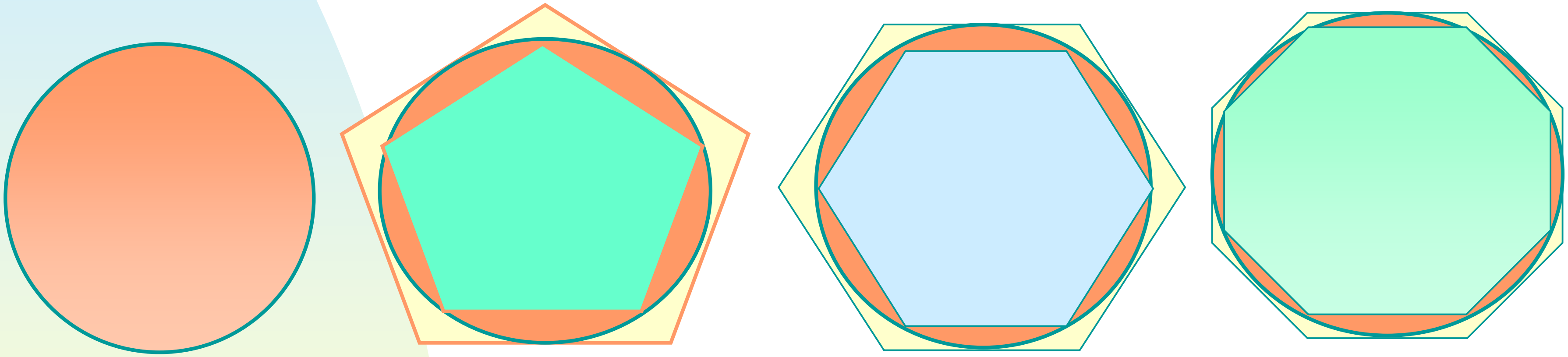
e con B la classe dei poligoni regolari circoscritti al cerchio
di 3, 4, 5, 6, …n lati
e con b_3, b_4, b_5, b_n le rispettive aree.

Se S è l'area del cerchio (incognita) sarà sempre:

$$a_n \leq S \leq b_n$$

e passando al limite di infiniti lati :

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = S = Area\,Cerchio$$

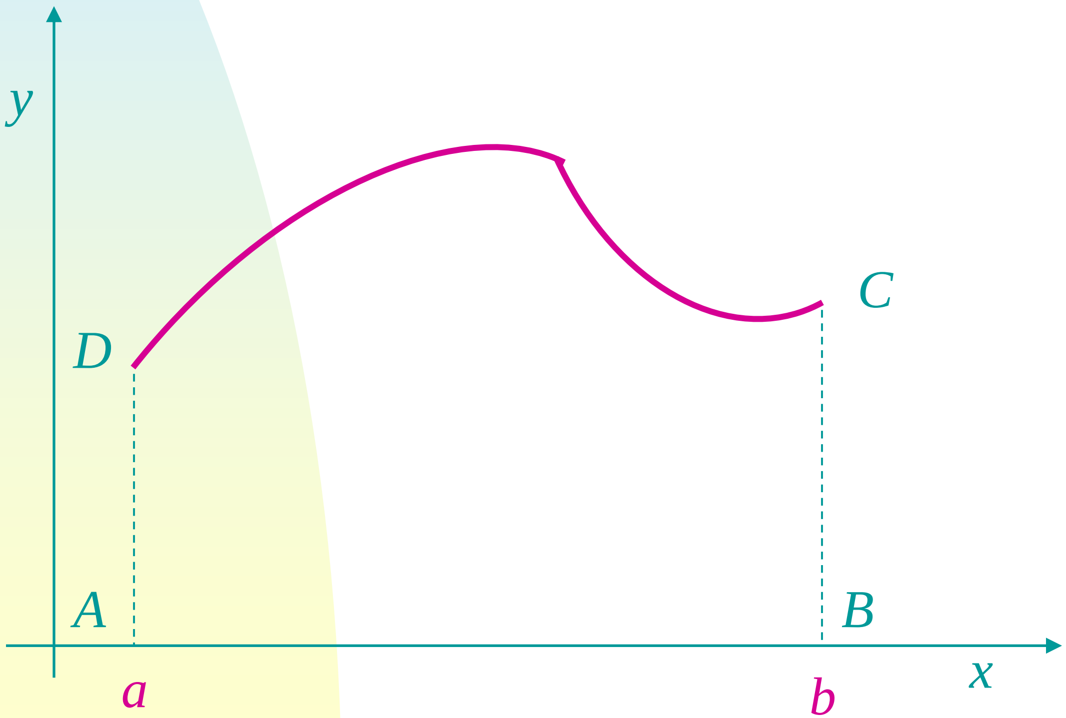


Allora: L'area del cerchio è uguale al limite comune, *quando il numero lati* → *∞*, al quale tendono le successioni formate dalle aree dei poligoni inscritti e circoscritti al cerchio

Integrale Definito - Calcolo delle Aree

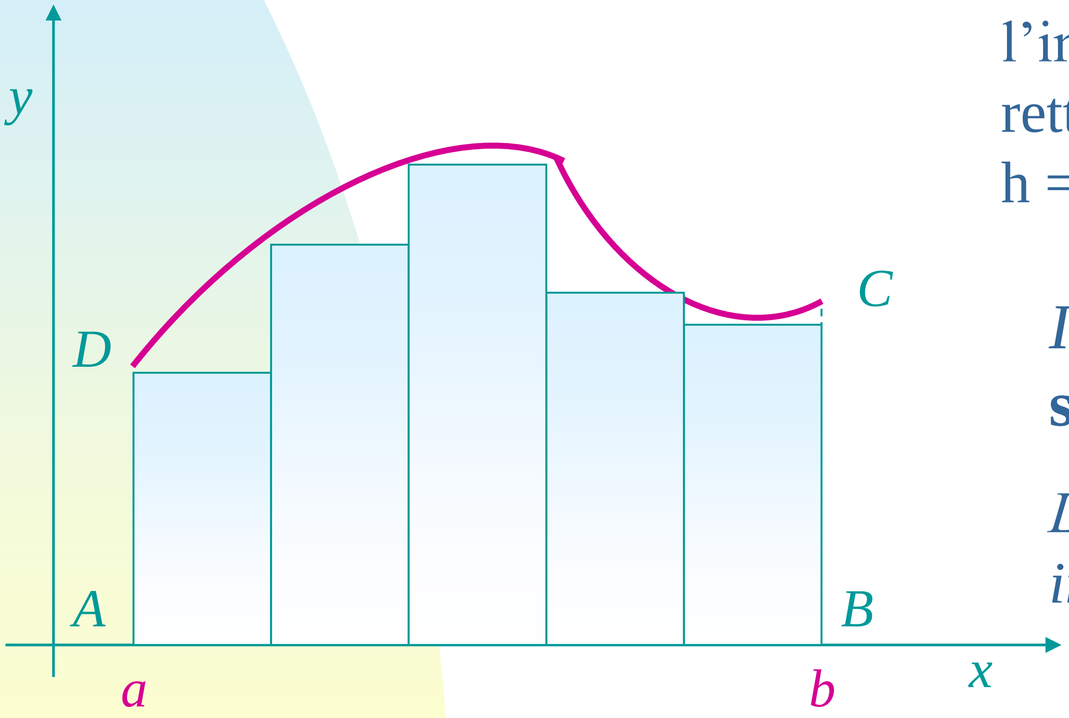
- Area del Trapezoide

Vogliamo calcolare l'area della figura mistilinea determinata dal diagramma di una funzione $y = f(x)$ definita e continua nell'intervallo $[a, b]$



Possiamo determinare l'area approssimandola con dei rettangoli inscritti e dei rettangoli circoscritti

Utilizzando lo stesso metodo usato per il cerchio.



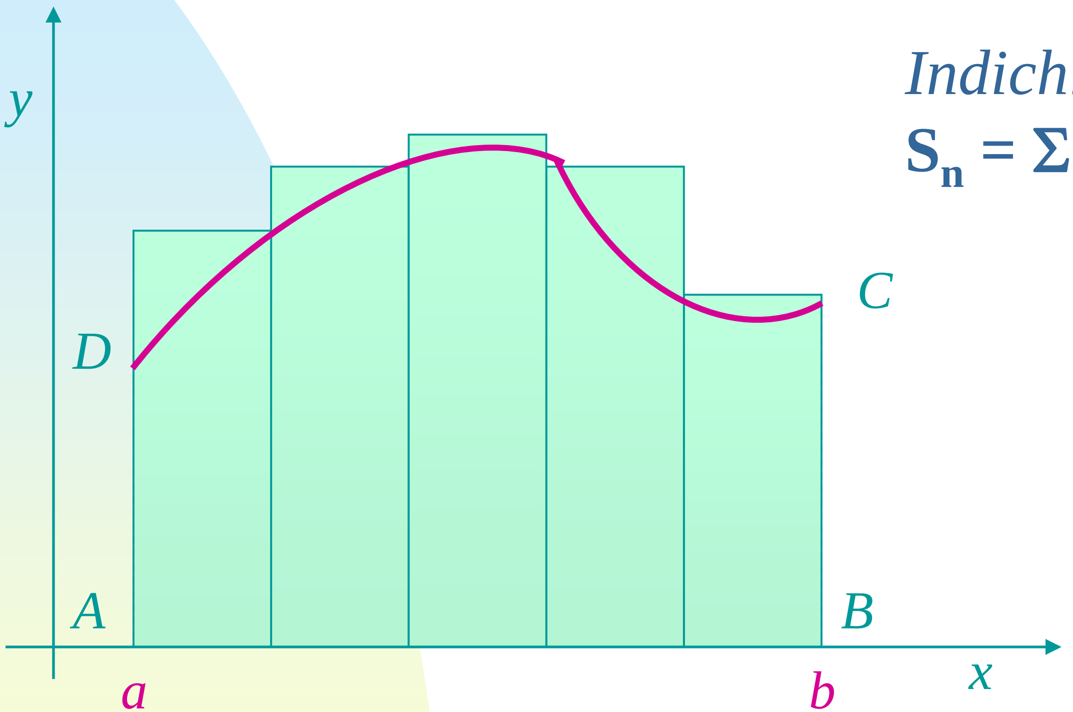
Dividendo in n parti l'intervallo [a, b], avremo n rettangoli di base
$h = (b – a)/n$

Indichiamo con

$\mathbf{s_n = \Sigma}\ \boldsymbol{areaRett}_{\boldsymbol{.inscritti}}$

L'area del plurirettangolo inscritto

Analogamente possiamo determinare l'area $\mathbf{S_n}$ *del plurirettangolo circoscritto*



Indichiamo con

$\mathbf{S_n = \Sigma}$ ***areaRett*** $_{\mathbf{.circoscritti}}$

L'area S del trapezoide sarà sempre compresa tra $\mathbf{s_n}$ e $\mathbf{S_n}$

$$\Sigma\ \textit{areaRett}_{.inscritti} \leq \ \ S \ \ \leq \Sigma\ \textit{areaRett}_{.circoscritti}$$

Aumentando il numero dei rettangoli l'approssimazione di S sarà sempre più precisa.

Considerando un numero di rettangolini via via crescente avremo due successioni di aree di

plurirettangoli inscritti $s_1, s_2, \ldots s_n, \ldots$ e di

plurirettangoli circoscritti $S_1, S_2, \ldots S_n, \ldots$

che convergono all'area del trapezoide ABCD

Teorema 1. Se y = f(x) è continua e positiva in [a, b], allora le successioni delle aree $s_1, s_2, \ldots s_n, \ldots$ e $S_1, S_2, \ldots S_n, \ldots$ convergono allo stesso limite S uguale all'area del trapezoide ABCD

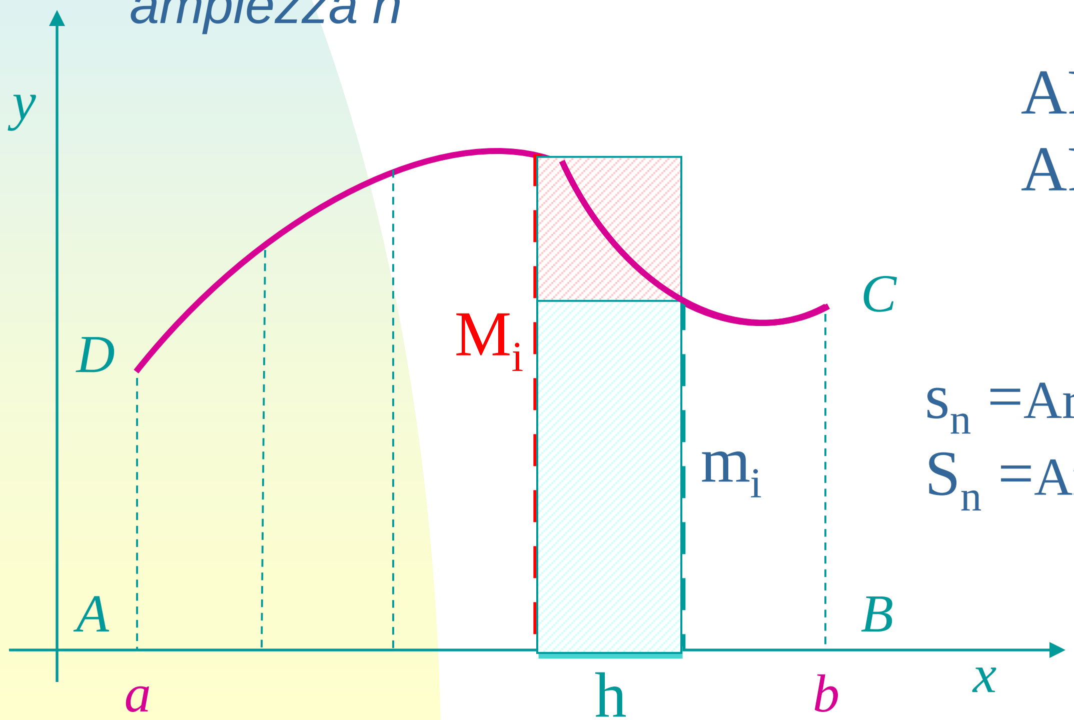
$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} S_n = S}$$

Possiamo finalmente giungere al concetto d'integrale definito

- Integrale Definito

Data la funzione y=f(x) definita e continua in [a, b],

dopo aver diviso l'intervallo in n parti, indichiamo con
m_i = min f(x) *e con* ***M_i = max f(x)*** *nell'intervallino i-esimo di ampiezza h*



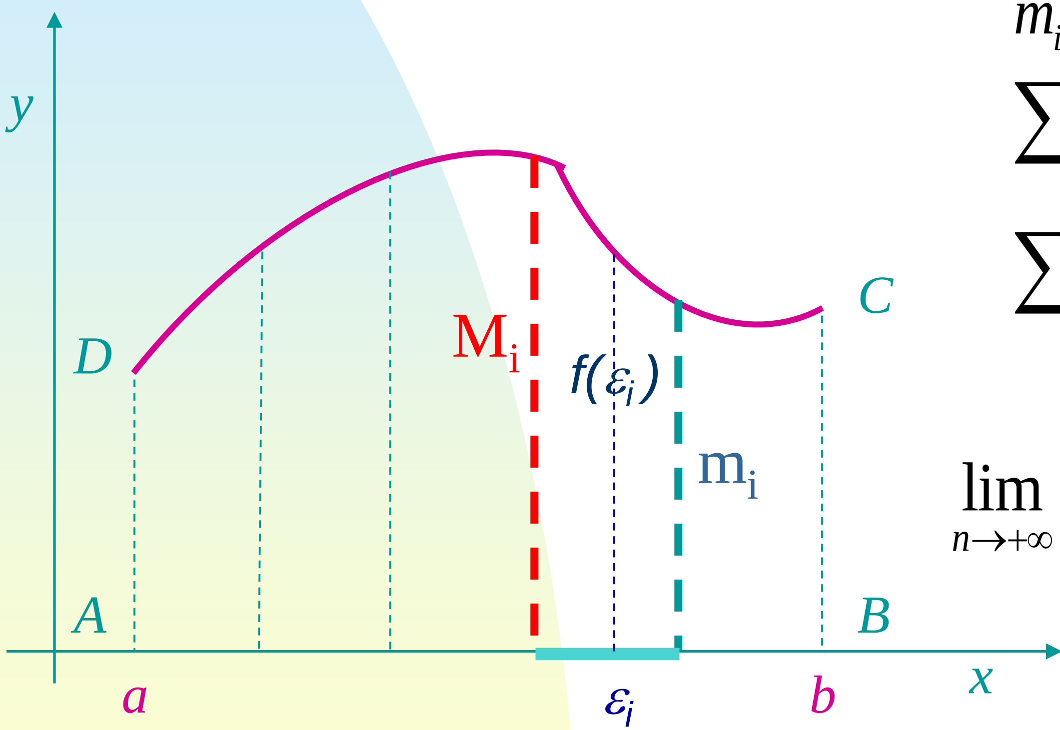
$ARett_{circo.} = M_i \cdot h$

$ARett_{inscr.} = m_i \cdot h$

$s_n = AreaPluriRett_{inscr.} = \Sigma\, m_i \cdot h$

$S_n = AreaPluriRett_{circo.} = \Sigma\, M_i \cdot h$

Allora,indicando con $f(\varepsilon_i)$ il valore della funzione in un punto qualsiasi dell'intervallo i-esimo,
tenendo conto del teorema del confronto e del teorema 1



$$m_i \le f(\varepsilon_i) \le M_i$$

$$\sum m_i \le \sum f(\varepsilon_i) \le \sum M_i$$

$$\sum m_i \cdot h \le \sum f(\varepsilon_i) \cdot h \le \sum M_i \cdot h$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum m_i \cdot h = \lim_{n\to+\infty} \sum M_i \cdot h = S$$

avremo che:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum m_i \cdot h = \lim_{n\to+\infty} \sum M_i \cdot h = \lim_{n\to+\infty} \sum f(\varepsilon_i) \cdot h = S$$

Allora, possiamo dare la seguente definizione:

Def. Data la funzione y=f(x) definita e continua in [a, b], si dice Integrale definito di f(x) relativo all'intervallo [a, b] il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\sum m_i\cdot h=\lim_{n\to+\infty}\sum M_i\cdot h=\lim_{n\to+\infty}\sum f(\varepsilon_i)\cdot h=S$$

e si indica con $\boxed{\int_a^b f(x)dx}$

Proprietà dell'Integrale definito

$$a)\quad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad b)\quad \int_a^a f(x)dx = 0$$

Proprietà di linearità

$$c)\quad \int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$d)\quad \int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Proprietà di additività

$$e)\quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Funzione Primitiva

Il calcolo dell'integrale come $\lim \Sigma$ è estremamente complesso e per nulla conveniente, occorre allora trovare un altro sistema per calcolarlo.

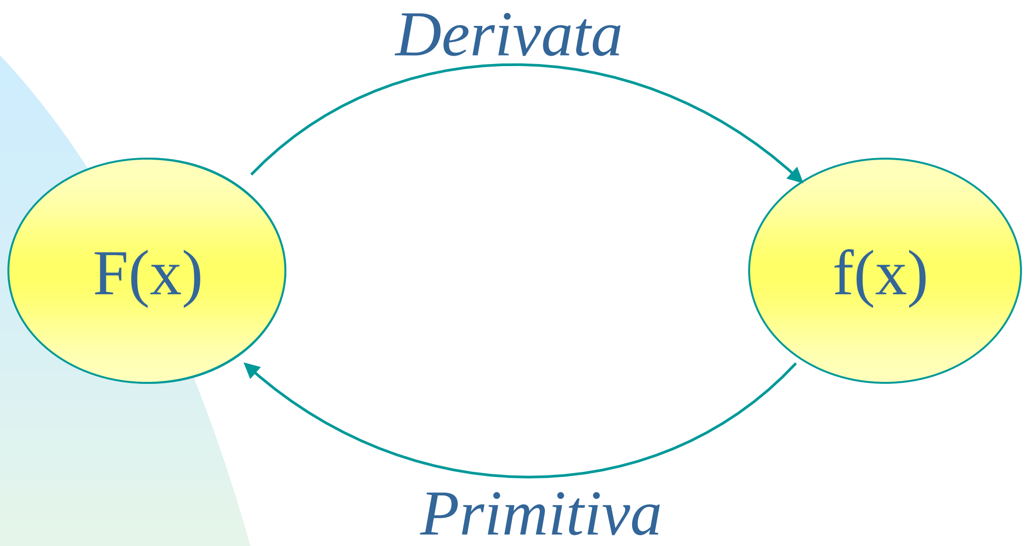
abbiamo bisogno di vedere il concetto di primitiva e il teorema di Torricelli-Barrow

Il problema del calcolo della Primitiva è il problema inverso del calcolo della derivata:

calcolare la primitiva significa:

data la derivata $f(x)$ di una certa funzione non nota $F(x)$ calcolare la funzione $y=F(x)$,

quindi $F'(x) = f(x)$



Def. Diremo che F(x) è una primitiva della funzione y=f(x) in [a, b]

sse F(x) è derivabile in [a, b] e risulta:

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall\ x \in [a, b]$$

Primitive, alcuni esempi:

Primitiva $(2x) = x^2$ --- *infatti* $\rightarrow$ $D(x^2) = 2x$

Primitiva $(\cos x) = \operatorname{sen} x$ --- *infatti* $\rightarrow$ $D(\operatorname{sen} x) = \cos x$

Primitiva $(1/x) = \ln x$ --- *infatti* $\rightarrow$ $D(\ln x) = 1/x$

Primitiva $(1/\cos^2 x) = \operatorname{tg} x$ --- *infatti* $\rightarrow$ $D(\operatorname{tg} x) = 1/\cos^2 x$

Osserviamo anche che:

$D(x^2-1) = 2x$ --- *quindi* $\rightarrow$ *Primitiva* $(2x) = x^2 - 1$

$D(x^2+5) = 2x$ --- *quindi* $\rightarrow$ *Primitiva* $(2x) = x^2 + 5$

$D(x^2+a) = 2x$ --- *quindi* $\rightarrow$ *Primitiva* $(2x) = x^2 + a$

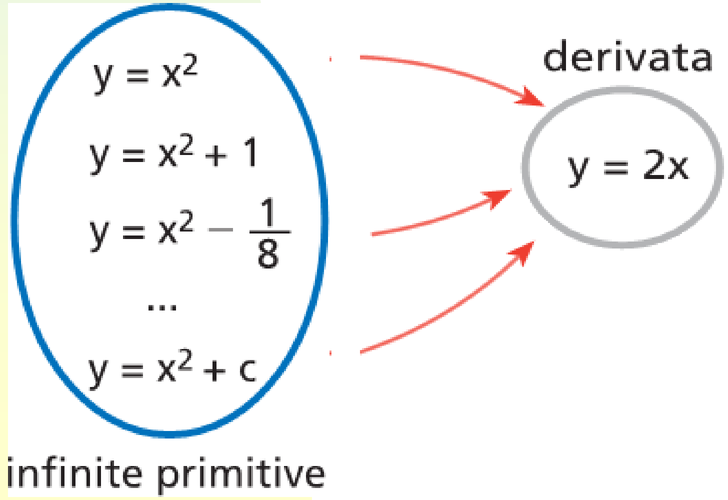
- Oss

Se F(x) è una primitiva di f(x) allora
anche $G(x) = F(x) + c \quad \forall\, c \in R$ è una primitiva di f(x)

e viceversa
se F(x) e G(x) sono primitive di f(x) allora

$$G(x) = F(x) + c$$

Allora una funzione ammette infinite primitive che differiscono per una costante reale e costituiscono una famiglia di infinite curve ottenibili per traslazione secondo l'asse y.



Ogni funzione del tipo $y = x^2 + c$
ha per derivata $2x$
quindi è una **primitiva** di $y = 2x$.

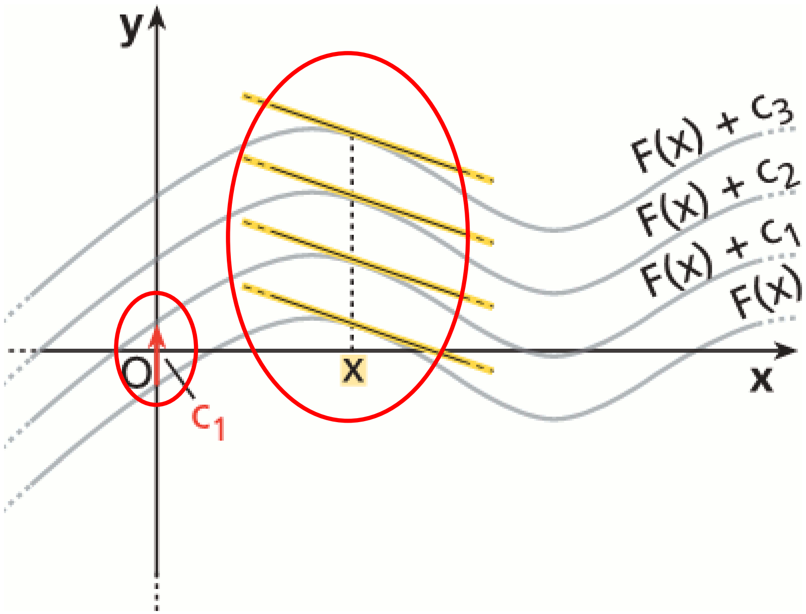
Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, allora le funzioni

$$F(x) + c ,$$

con c numero reale qualsiasi, sono **tutte** e **sole** le primitive di $f(x)$.

Ovvero:

- se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, allora anche $F(x) + c$ lo è;
- se $F(x)$ e $G(x)$ sono entrambe primitive di $F(x)$, allora $G(x) - F(x) = c$.



I grafici di queste funzioni sono traslati di un vettore del tipo $(0; c)$.

Tutte le funzioni hanno la stessa derivata perché nei punti con la stessa ascissa hanno tangente parallela.

- <u>Def</u>

L'insieme di tutte le primitive di una funzione $y = f(x)$ si chiama **INTEGRALE INDEFINITO** di $f(x)$,

si indica col simbolo:

$$\int f(x)dx$$

e si legge "Integrale indefinito di $f(x)$ in dx"

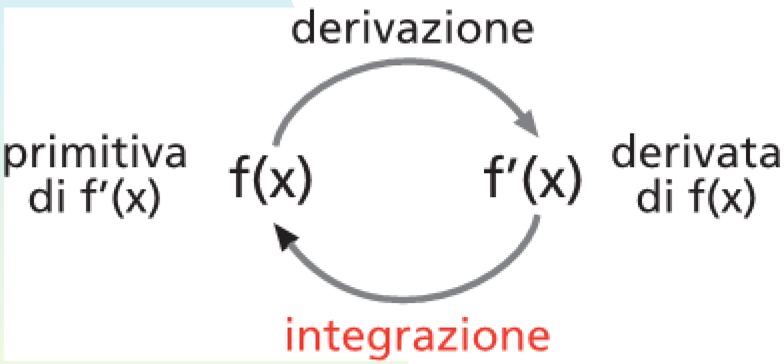
ESEMPIO

L'integrale indefinito di $\cos x$ è l'insieme delle primitive di $\cos x$, cioè $\operatorname{sen} x + c$.

$$\int \cos x \, dx = \underline{\operatorname{sen} x + c}$$

$$D[\operatorname{sen} x + c] = \cos x$$

L'INTEGRAE INDEFINITO



L'integrazione di una funzione agisce come operazione inversa della derivazione.

ESEMPIO

derivazione

sen $x + c$	cos x
$x^2 + c$	$2x$
$e^x + c$	e^x

integrazione

Allora, riprendendo gli esempi precedenti

$$\int f(x)dx = \{\mathbf{Pr}\,imitive(f(x))\} \qquad D\left(\int f(x)dx\right) = f(x)$$

$$\int 2x dx = \{\mathbf{Pr}\,imitive(2x)\} = x^2 + c \qquad D\left(x^2 + c\right) = 2x$$

$$\int \cos x dx = \{\mathbf{Pr}\,imitive(\cos x)\} = \sin x + c \qquad D(\sin x + c) = \cos x$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \left\{\mathbf{Pr}\,imitive\left(\frac{1}{x}\right)\right\} = \ln x + c \qquad D(\ln x + c) = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \left\{\mathbf{Pr}\,imitive\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)\right\} = tgx + c \qquad D(tgx + c) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

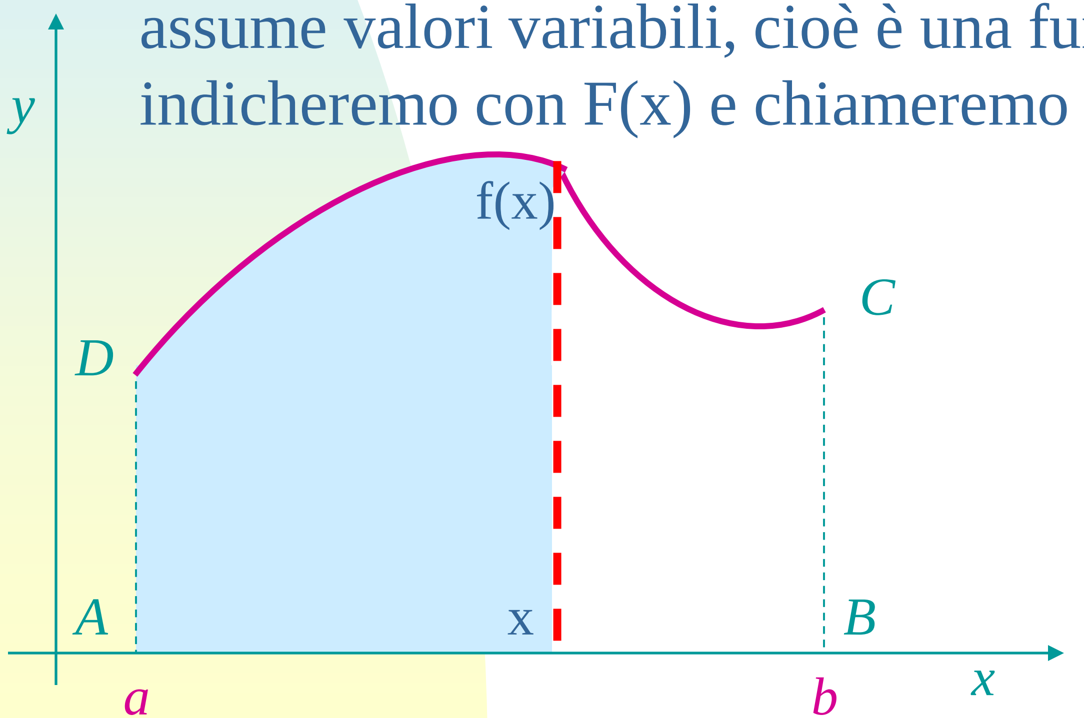
Vedi formule di integrazione a pag. 338 del testo M. Abate

- <u>Teor. di Torricelli- Barrow</u> (funzione Integrale)

  Sia $y = f(x)$ funz. continua nell'intervallo [a, b], consideriamo un punto x variabile $\in$(a, b)

  Al variare di x l'integrale $\int_a^x f(t)dt$

  assume valori variabili, cioè è una funzione di x che indicheremo con F(x) e chiameremo funzione integrale



$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

In particolare

Se $x = a$ $$F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$$ *se $x = b$* $$F(b) = \int_a^b f(t)dt$$

Avremo allora il seguente

- <u>Teor. di Torricelli- Barrow</u>

Se *y = f(x)* è continua in [a, b] allora la funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

è derivabile e risulta: F'(x) = f(x);

cioè F(x) è una primitiva di f(x).

Calcolo dell'Integrale Definito

Formula di Newton-Leibniz

Finalmente possiamo calcolare l'integrale definito

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = area\ trapezoide}$$

Considerando la funzione integrale avremo:

$$\int_a^x f(t)dt = G(x) + c$$ e per x = a $$\int_a^a f(t)dt = G(a) + c = 0$$

Da cui c = – G(a) $$\int_a^x f(t)dt = G(x) + c = G(x) - G(a)$$

e per x = b

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a) = \left[G(x)\right]_a^b}$$

- Teorema fondamentale del calcolo integrale

L'integrale definito di una funzione continua *y=f(x)*, calcolato nell'intervallo [a, b], è uguale alla differenza tra i valori che una qualunque primitiva di *f(x)* assume agli estremi superiore e inferiore dell'intervallo d'integrazione.

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a) = \left[G(x)\right]_a^b$$